

***Задачи с параметром
на ЕГЭ***

Основные виды задач с параметром

1. Линейные уравнения
2. Линейные неравенства
3. Графики уравнений на плоскости Oxy
4. Графики неравенств на плоскости Oxy
5. Квадратные уравнения
6. Разложение квадратного трехчлена на множители.
Формулы Виета
7. Расположение корней квадратного уравнения относительно заданных точек
8. Дробно-рациональные уравнения. Отбор корней
9. Использование свойств функций и алгебраических выражений
0. Задачи с модулем

Алгебраическое решение

Найдите все значения параметра a , при которых только один из корней уравнения $|x + a - 7| = 2a + 3$ принадлежит отрезку $[-3; 1]$.

Решение: Если $2a + 3 < 0$, уравнение не имеет корней.

При $2a + 3 \geq 0$, то есть $a \geq -1,5$, получим совокупность

$$\begin{cases} x + a - 7 = 2a + 3, & \begin{cases} x_1 = a + 10, \\ x_2 = -3a + 4. \end{cases} \\ x + a - 7 = -2a - 3, \end{cases}$$

Условие задачи выполняется, если один из корней уравнения $|x + a - 7| = 2a + 3$ принадлежит отрезку $[-3; 1]$, а другой нет.

x_1 принадлежит отрезку $[-3; 1]$, если $-3 \leq a + 10 \leq 1$, $-13 \leq a \leq -9$.

Но при таких значениях параметра уравнение не имеет корней, значит $x_1 = a + 10$ ни при каких значениях не принадлежит отрезку $[-3; 1]$.

Найдём, при каких a корень $x_2 = -3a + 4$ лежит на этом отрезке.

$$-3 \leq -3a + 4 \leq 1, \quad -7 \leq -3a \leq -3, \quad 1 \leq a \leq \frac{7}{3}.$$

Ответ: $1 \leq a \leq \frac{7}{3}$.

Оценка множества значений

При каких значениях параметра a уравнение

$$2x^4 - 18x^2 + 84 =$$

$$= 8 - x^2 - 2xa(a - 2) - a^4 + 4a^3 - 4a^2$$

имеет хотя бы один корень?

Решение.

$$2^{(x^4-18x^2+81)+3} = 8 - (x^2 + 2x(a^2 - 2a) + (a^4 - 4a^3 + 4a^2)),$$

$$2^{(x^2-9)^2+3} = 8 - (x^2 + 2x(a^2 - 2a) + (a^2 - 2a)^2),$$

$$2^{(x^2-9)^2+3} = 8 - (x + a^2 - 2a)^2,$$

$$(x^2 - 9)^2 \geq 0, (x^2 - 9)^2 + 3 \geq 3; 2^{(x^2-9)^2+3} \geq 8.$$

$$-(x + a^2 - 2a)^2 \leq 0; 8 - (x + a^2 - 2a)^2 \leq 8.$$

$$\begin{cases} 2^{(x^2-9)^2+3} = 8, \\ 8 - (x + a^2 - 2a)^2 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 9 = 0, \\ x + a^2 - 2a = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3; x_2 = -3, \\ x + a^2 - 2a = 0. \end{cases}$$

$x = 3, 3 + a^2 - 2a = 0$, корней нет.

$x = -3, -3 + a^2 - 2a = 0; a_1 = -1; a_2 = 3.$

Ответ: $a = -1; a = 3.$

Симметрия алгебраических выражений

С5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - |a - 5 + x| = |5 - a + x| - (a - 5)^2$ имеет единственный корень.

Решени

Пусть x_0 — корень уравнения. Тогда
 $x_0^2 - |a - 5 + x_0| = |5 - a + x_0| - (a - 5)^2$.

Но $x = -x_0$ тоже будет корнем этого уравнения, так как
 $(-x_0)^2 - |a - 5 - x_0| - |5 - a - x_0| + (a - 5)^2 =$
 $= x_0^2 - |-a + 5 + x_0| - |-5 + a + x_0| + (a - 5)^2 =$
 $= x_0^2 - |5 - a + x_0| - |a - 5 + x_0| + (a - 5)^2 = 0$.

Поэтому в уравнении будет единственный корень, если $x = 0$ — это корень и других корней нет. Найдём a , при которых $x = 0$ — корень.

$$-|a-5| = |5-a| - (a-5)^2, \quad |a-5| + |5-a| = (a-5)^2, \quad 2|a-5| = |a-5|^2, \\ |a-5| \cdot (|a-5| - 2) = 0,$$

$$\begin{cases} |a-5| = 0, \\ |a-5| - 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 5, \\ a = 3, \\ a = 7. \end{cases}$$

Пусть $a = 5$.

$x^2 - |x| = |x|$, $x^2 - 2|x| = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$. При значении $a = 5$ уравнение имеет три корня, что не удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a = 3$.
 $x^2 - |x - 2| = |x + 2| - 4$, $x^2 + 4 = |x + 2| + |x - 2|$, $x = 0$ — единственный корень (см. рис. 26).

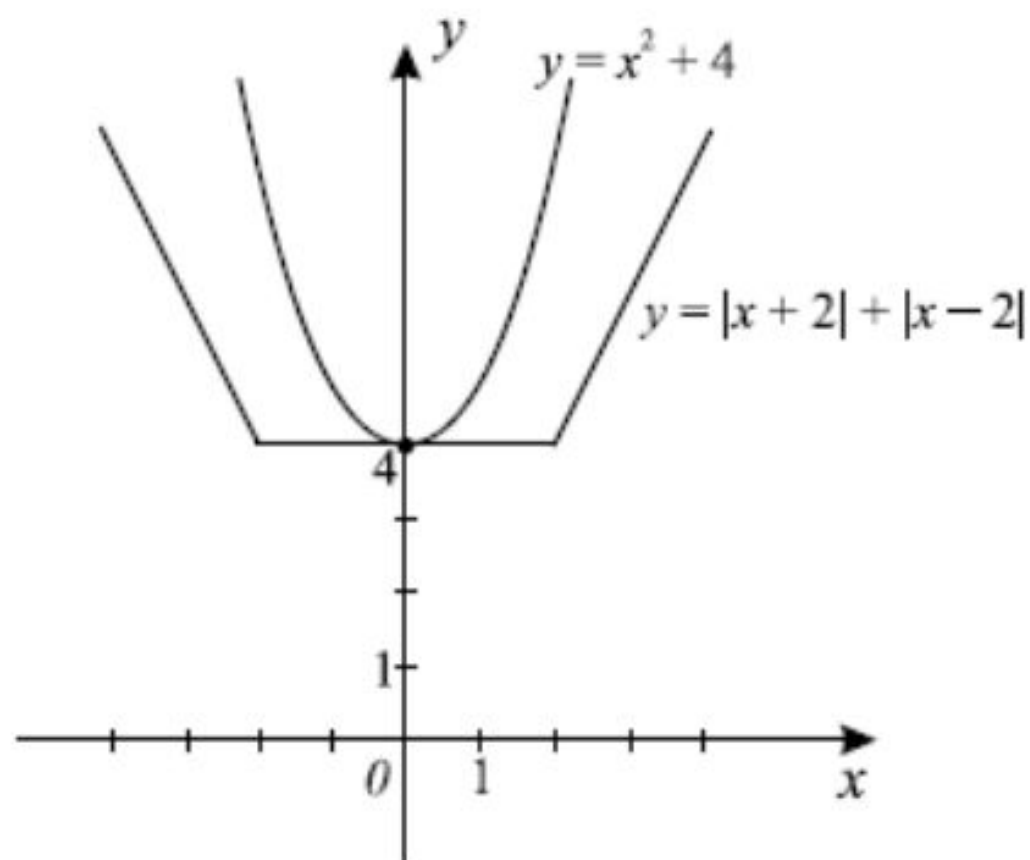


Рис. 26.

Пусть $a = 7$.
 $x^2 - |2 + x| = |-2 + x| - 4$, уравнение получилось такое же, как и при $a = 3$.

Ответ: $\{3; 7\}$.

С5. Найти все значения параметра a , при которых система неравенств

$$\begin{cases} y \leq ax - x^2 - 3, \\ x \leq ay - y^2 - 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что если при некотором значении параметра a пара чисел (x_0, y_0) является решением данной системы неравенств, то пара (y_0, x_0) — также решение, поскольку при подстановке второй пары неравенства системы остаются теми же, но меняются местами. Следовательно, необходимым условием единственности решения является совпадение этих пар. Если $(x_0, y_0) = (y_0, x_0)$, то $x_0 = y_0$.

При подстановке $x_0 = y_0$ в систему каждое неравенство примет вид

$$x_0 \leq ax_0 - x_0^2 - 3 \Leftrightarrow x_0^2 + (1 - a)x_0 + 3 \leq 0,$$

оно будет иметь единственное решение в случае, если дискриминант D соответствующего квадратного трёхчлена равен 0, т. е. $D = (1 - a)^2 - 12 = 0$.

Решая уравнение $(a - 1)^2 = 12$, получаем два значения параметра $a = 1 - 2\sqrt{3}$ и $a = 1 + 2\sqrt{3}$.

Подставляя $a = 1 - 2\sqrt{3}$ в систему неравенств, получаем:

$$\begin{cases} y \leq (1 - 2\sqrt{3})x - x^2 - 3, \\ x \leq (1 - 2\sqrt{3})y - y^2 - 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (1 - 2\sqrt{3})x + y + 3 \leq 0, \\ y^2 - (1 - 2\sqrt{3})y + x + 3 \leq 0. \end{cases}$$

Сложив левые части и правые части неравенств системы, получим:

$$\begin{aligned} & x^2 + 2\sqrt{3}x + y^2 + 2\sqrt{3}y + 6 \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & (x^2 + 2\sqrt{3}x + 3) + (y^2 + 2\sqrt{3}y + 3) \leq 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{3})^2 + (y + \sqrt{3})^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что система имеет единственное решение $x = -\sqrt{3}$ и $y = -\sqrt{3}$.

Аналогично действуя, получим, что при $a = 1 + 2\sqrt{3}$ система имеет единственное решение $x = \sqrt{3}$ и $y = \sqrt{3}$.

$$\text{Ответ: } a = 1 \pm 2\sqrt{3}$$

Свойства функций. Производная

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{1 - 3x} = a - |6x|$ имеет более двух корней.

Решение:

$$a = \sqrt{1 - 3x} + |6x|.$$

$$g(x) = \sqrt{1 - 3x} + |6x|.$$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - 3x} + 6x & \text{при } x \in \left[0; \frac{1}{3}\right], \\ \sqrt{1 - 3x} - 6x & \text{при } x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - 3x} + 6x & \text{при } x \in \left[0; \frac{1}{3}\right], \\ \sqrt{1 - 3x} - 6x & \text{при } x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

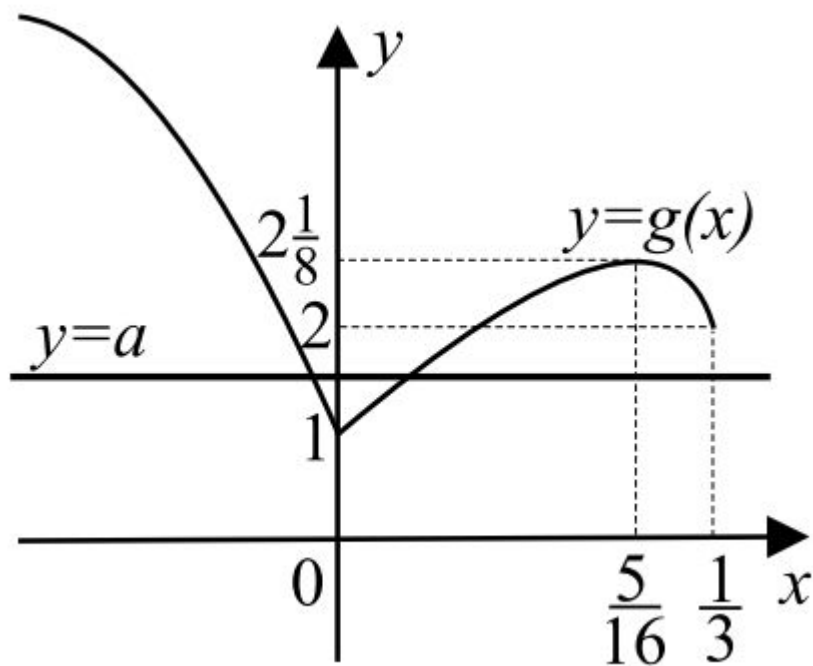
$$\text{При } x < 0 \quad g'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{1 - 3x}} - 6 < 0.$$

$$\text{При } x \in \left[0; \frac{1}{3}\right] \quad g'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{1 - 3x}} + 6.$$

$$g'(x) = 0, \text{ если } \frac{-3}{2\sqrt{1-3x}} + 6 = 0; \quad \sqrt{1-3x} = \frac{1}{4}; \quad x = \frac{5}{16}.$$

$$g\left(\frac{5}{16}\right) = \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{5}{16} = 2\frac{1}{8}, \quad g(0) = 1;$$

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = 2. \quad \begin{array}{c} g'(x) \quad - \quad + \quad - \\ \hline g(x) \quad \searrow \quad \nearrow \quad \searrow \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \quad \frac{5}{16} \quad \frac{1}{3} \end{array} \quad x$$



Ответ: $\left[2; 2\frac{1}{8}\right)$.

Координатно-параметрический метод

Пусть на плоскости даны две взаимно перпендикулярные числовые оси с общим началом в точке O . Ось Ox называется *координатной*, а ось Oa – *параметрической*.

Вся плоскость называется *координатно-параметрической* (КП-плоскость).

Метод решения задач с параметрами, использующий КП-плоскость называется *координатно-параметрическим* или *КП-методом*.

КП-метод основан на нахождении множества всех точек КП-плоскости, значения координаты x и параметра a каждой из которых удовлетворяют условию задачи.

№1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$\frac{x - a}{x - 6a} < 0$$

выполняется при всех значениях x , таких, что

$$2 \leq x \leq 3$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Решение

1. Пусть $a \leq 0$. Тогда при $x \in [2; 3]$ выполняются неравенства $x - a > 0$ и $x - 6a > 0$. Значит, $\frac{x - a}{x - 6a} > 0$, что противоречит исходному неравенству.

2. Пусть $a > 0$. Тогда решением неравенства $\frac{x - a}{x - 6a} < 0$ будет интервал $x \in (a; 6a)$ (см. рис. 1). По условию $[2; 3] \subset (a; 6a)$, то есть $\begin{cases} a < 2, \\ 6a > 3; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a < 2, \\ a > \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(\frac{1}{2}; 2\right).$$

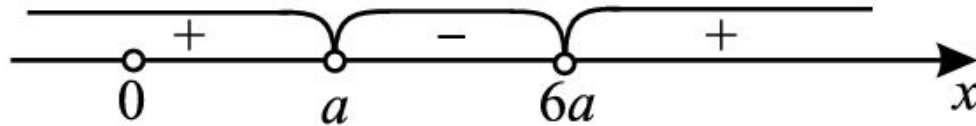
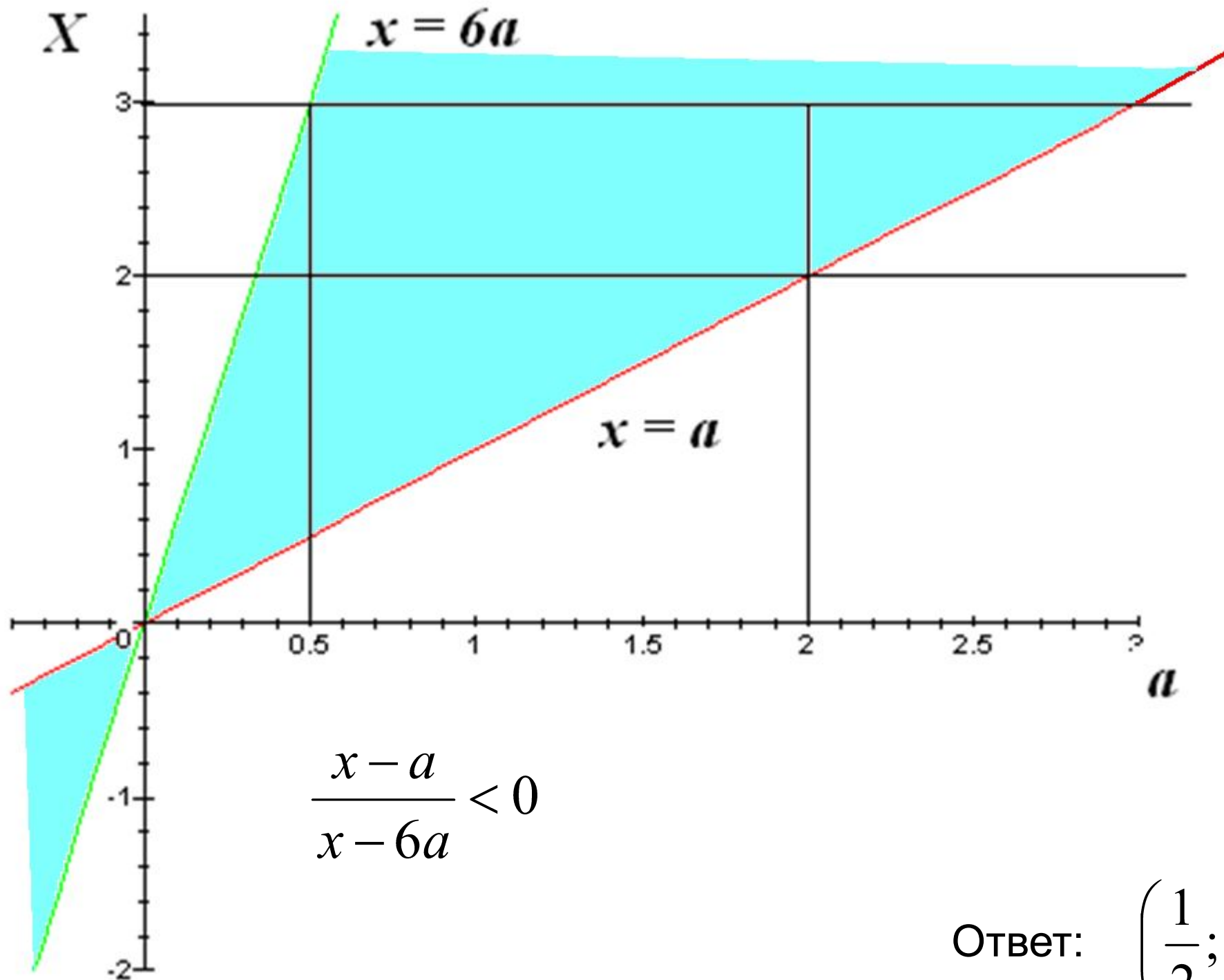


Рис. 1.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Решение



№2. При каких значениях параметра a все корни уравнения

$$3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a - 4) = 0$$

удовлетворяют условию $|x| < 1$?

Ответ: $\{0\} \cup (2 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{5})$.

Решение

1. Пусть $a = 0$. Тогда исходное уравнение

$$3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a - 4) = 0$$

примет вид $-x = 0$. Его единственный корень $x = 0$ удовлетворяет условию $|x| < 1$.

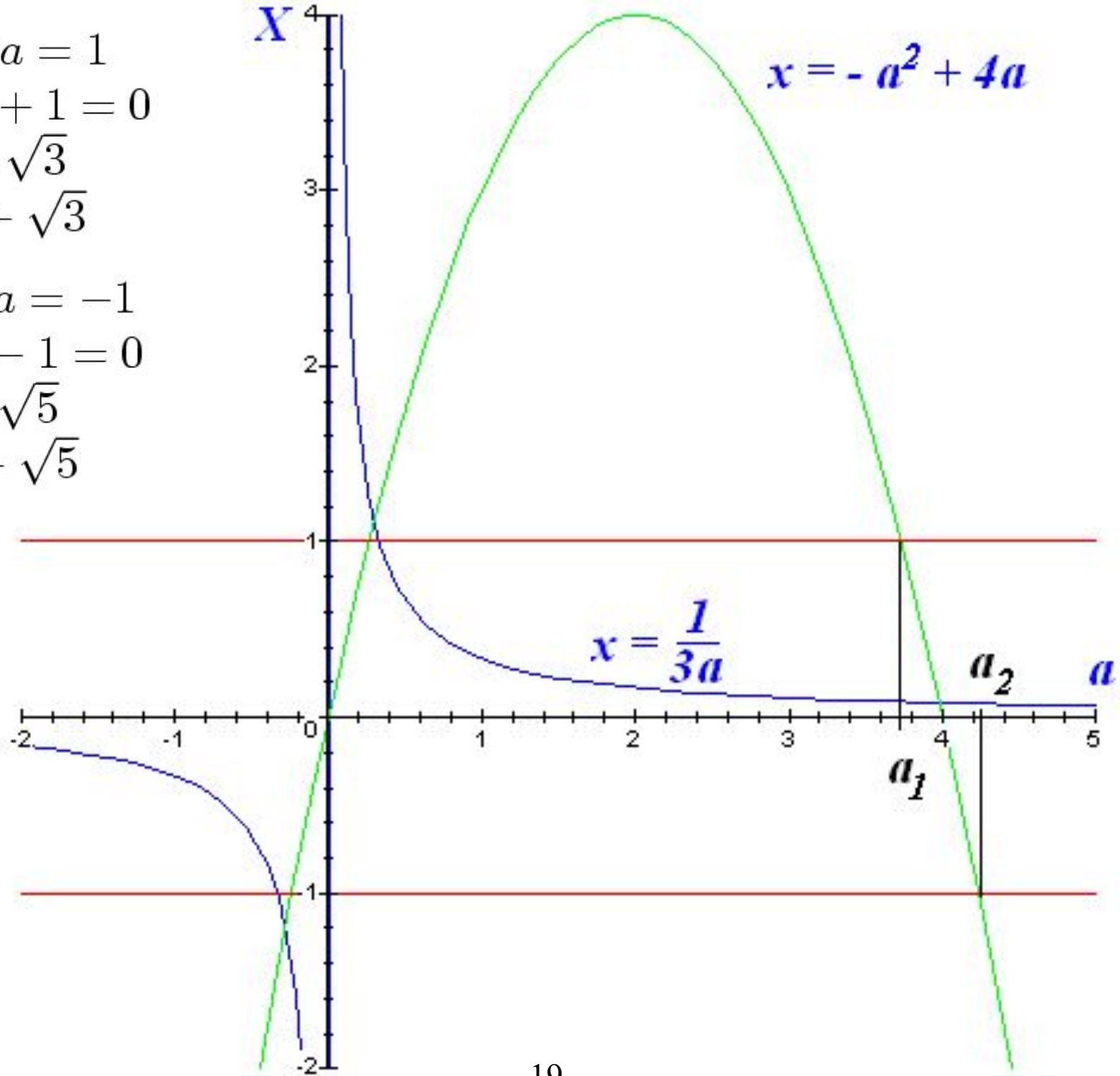
2. Пусть $a \neq 0$. Тогда разделив обе части уравнения на $3a$, получим приведенное уравнение $x^2 + \left(a^2 - 4a - \frac{1}{3a}\right)x - \frac{a - 4}{3} = 0$. Его корни $x_1 = -a^2 + 4a$

и $x_2 = \frac{1}{3a}$. Тогда уравнение примет вид:

$$(x + a^2 - 4a)\left(x - \frac{1}{3a}\right) = 0.$$

$$\begin{aligned}
 -a^2 + 4a &= 1 \\
 a^2 - 4a + 1 &= 0 \\
 a &= 2 \pm \sqrt{3} \\
 a_1 &= 2 + \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -a^2 + 4a &= -1 \\
 a^2 - 4a - 1 &= 0 \\
 a &= 2 \pm \sqrt{5} \\
 a_2 &= 2 + \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

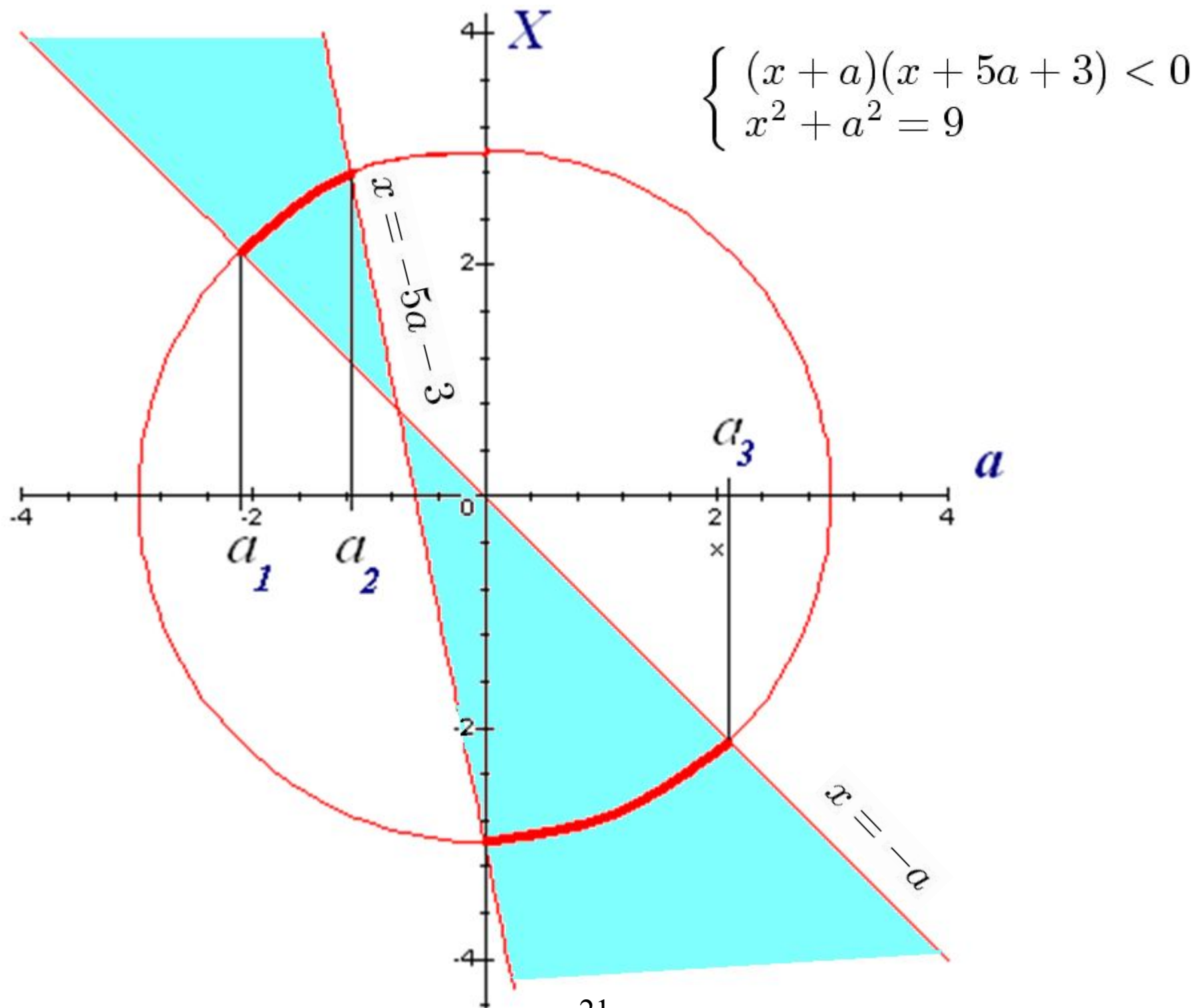


№4. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (6a + 3)x + 5a^2 + 3a < 0, \\ x^2 + a^2 = 9 \end{cases}$$

имеет решения.

Ответ: $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{15}{13}\right) \cup \left(0; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.



18 Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$.

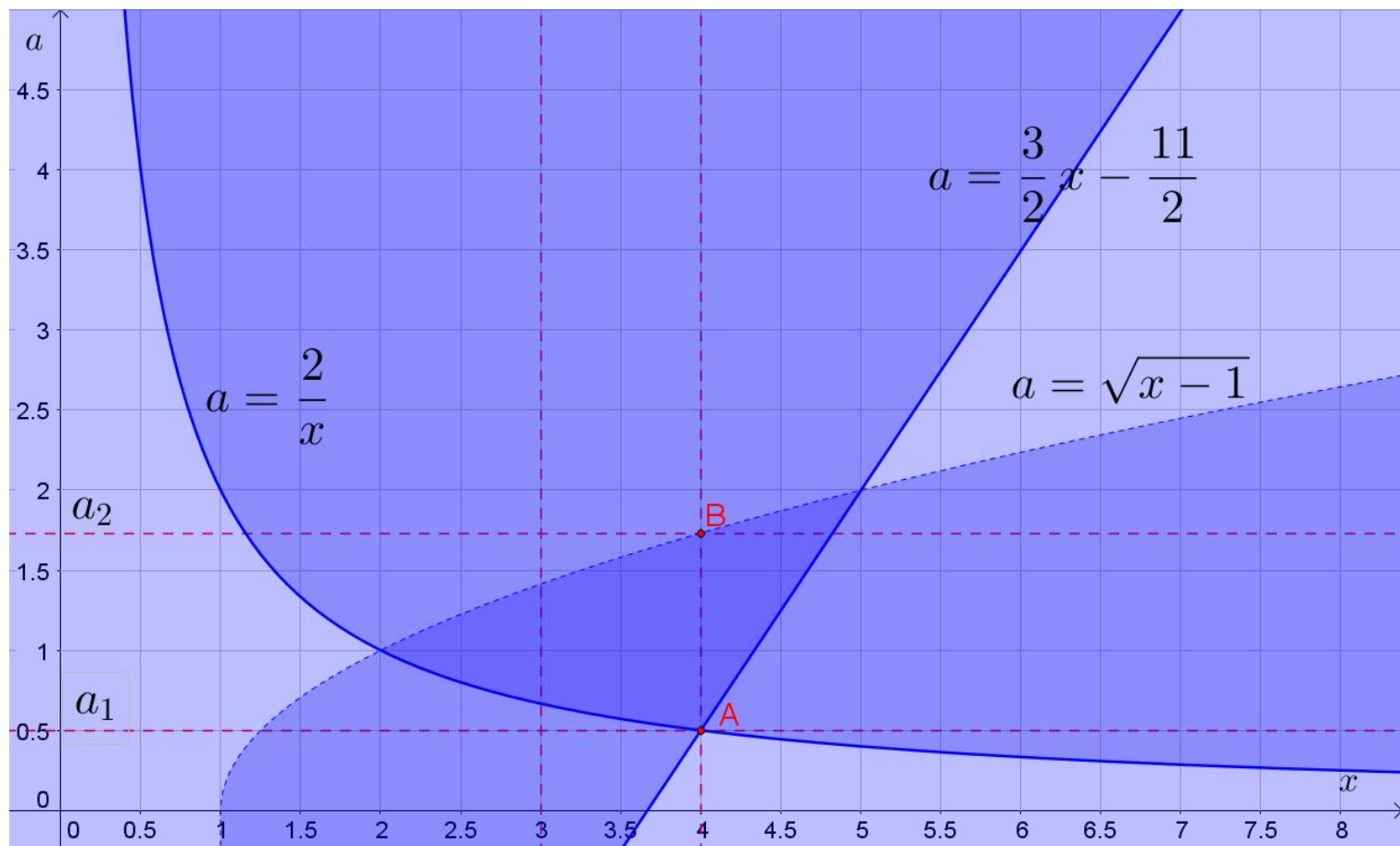
Решение №1

ОДЗ: $x \geq 1$.

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} a \geq \frac{2}{x}, \\ a < \sqrt{x-1}, \\ a \geq \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}. \end{cases}$$

Изобразим решение системы неравенств в системе координат Oax .



$$\begin{cases} a \geq \frac{2}{x}, \\ a < \sqrt{x-1}, \\ a \geq \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}. \end{cases}$$

Из рисунка видно, что искомые значения a удовлетворяют условию $a_1 \leq a < a_2$.

Ординату точки A можно найти подставив $x = 4$, например, в выражение

$$a = \frac{2}{x}: a_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ординату точки B можно найти подставив $x = 4$ в выражение $a = \sqrt{x-1}$:

$$a_2 = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\left[\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$$

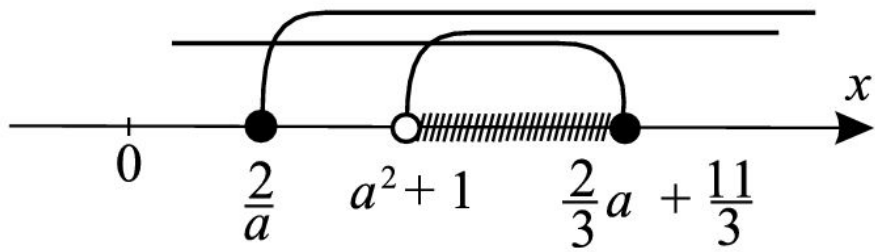
имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$.

Решение №2

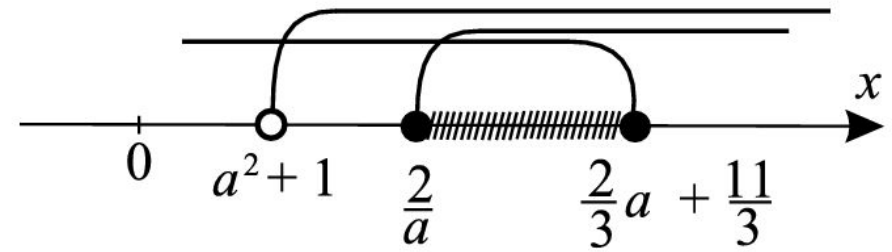
I. Найдём значения a при которых система неравенств имеет решения.

ОДЗ: $x \geq 1$. Так как $ax \geq 2$ и $x \geq 1$, то $a > 0$.

$$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a + 11; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \frac{2}{a}, \\ x > a^2 + 1, \\ x \leq \frac{2}{3}a + \frac{11}{3}. \end{cases}$$



или



Из рисунков видно, что система имеет решения при выполнении условий

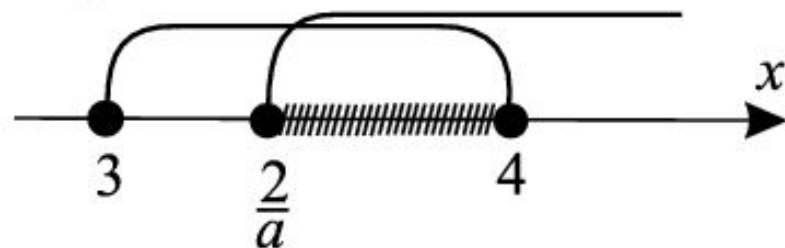
$$\begin{cases} \frac{2}{3}a + \frac{11}{3} > a^2 + 1, \\ \frac{2}{3}a + \frac{11}{3} \geq \frac{2}{a}, \\ a > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3a^2 - 2a - 8 < 0, \\ 2a^2 + 11a - 6 \geq 0, \\ a > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \in \left(-\frac{4}{3}; 2\right), \\ a \in (-\infty; -6] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right), \quad a \in \left[\frac{1}{2}; 2\right), \\ a \in (0; +\infty); \end{cases}$$

II. Найдём значения $a \in \left[\frac{1}{2}; 2\right)$ при которых система неравенств имеет решения на отрезке $[3; 4]$.

$$\begin{cases} x \geq \frac{2}{a}, \\ x > a^2 + 1, \\ x \leq \frac{2}{3}a + \frac{11}{3}. \end{cases}$$

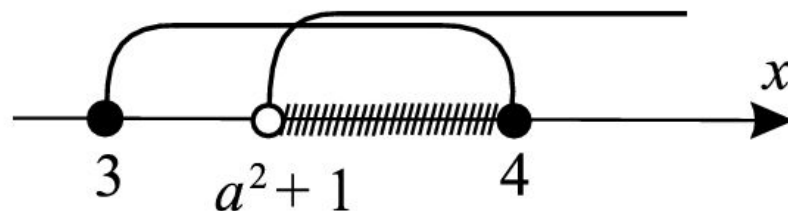
1) Из рисунка видно, что неравенство $x \geq \frac{2}{a}$ имеет решения на отрезке

$[3; 4]$ при $\frac{2}{a} \leq 4$. Так как $a > 0$, то $a \geq \frac{1}{2}$.

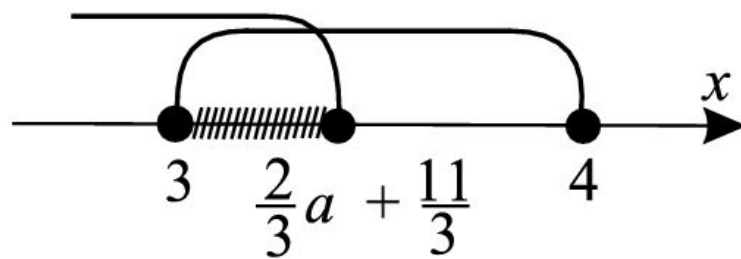


2) Из рисунка видно, что неравенство $x > a^2 + 1$ имеет решения на отрезке $[3; 4]$ при $a^2 + 1 < 4$; $a^2 < 3$. Учитывая, что $\frac{1}{2} \leq a < 2$, получим

$\frac{1}{2} \leq a < \sqrt{3}$.



3) Из рисунка видно, что неравенство $x \leq \frac{2}{3}a + \frac{11}{3}$ имеет решения на отрезке $[3; 4]$ при $\frac{2}{3}a + \frac{11}{3} \geq 3$; $a \geq -1$.



Таким образом, условию задачи удовлетворяют $\frac{1}{2} \leq a < \sqrt{3}$.

Ответ: $\left[\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$.

Решение №3

Пусть $x_0 \in [3; 4]$ и x_0 — удовлетворяет исходной системе, то есть

$$\begin{cases} ax_0 \geq 2, \\ \sqrt{x_0-1} > a, \\ 3x_0 \leq 2a + 11. \end{cases}$$

1) Так как $ax_0 \geq 2$, то $a > 0$.

2) Так как $4 \geq x_0$ и $a > 0$, то $4a \geq ax_0$. Учитывая, что $ax_0 \geq 2$, получим $4a \geq 2$; $a \geq \frac{1}{2}$.

3) При $a \geq \frac{1}{2}$ для $x_1 = 4$ выполняются условия

$$\begin{cases} ax_1 \geq ax_0 \geq 2, \\ \sqrt{x_1 - 1} \geq \sqrt{x_0 - 1} > a, \\ 3x_1 = 3 \cdot 4 = 12 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 11 \leq 2a + 11. \end{cases}$$

Это означает, что $x_1 = 4$ также удовлетворяет исходной системе.

Таким образом, мы доказали, что исходная система имеет решения на отрезке $[3; 4]$ тогда и только тогда, когда $x = 4$ удовлетворяет этой системе.

4) Найдём все значения a при которых исходной системе неравенств удовлетворяет значение $x = 4$:

$$\begin{cases} 4a \geq 2, \\ \sqrt{4 - 1} > a, \\ 3 \cdot 4 \leq 2a + 11; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq \frac{1}{2}, \\ a < \sqrt{3}, \\ a \geq \frac{1}{2}; \end{cases} \quad a \in \left[\frac{1}{2}; \sqrt{3} \right).$$

Ответ: $\left[\frac{1}{2}; \sqrt{3} \right)$.

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x - 2a} \cos x = \sqrt{x - 2a} \sin x$ имеет единственный корень на промежутке $[0; \pi]$.

Решение

Первый способ.

Преобразуем уравнение

$\sqrt{x - 2a}(\cos x - \sin x) = 0$. На промежутке $[0; \pi]$ оно равносильно системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x - 2a = 0, \\ \cos x - \sin x = 0, \end{array} \right. \\ x - 2a \geq 0, \\ 0 \leq x \leq \pi; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 2a, \\ \operatorname{tg} x = 1, \end{array} \right. \\ x - 2a \geq 0, \\ 0 \leq x \leq \pi; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 2a, (1) \\ x = \frac{\pi}{4}, (2) \end{array} \right. \\ x - 2a \geq 0, (3) \\ 0 \leq x \leq \pi. (4) \end{array} \right.$$

Рассмотрим графический способ решения, построим графики входящих в систему уравнений и неравенств на плоскости Oxa .

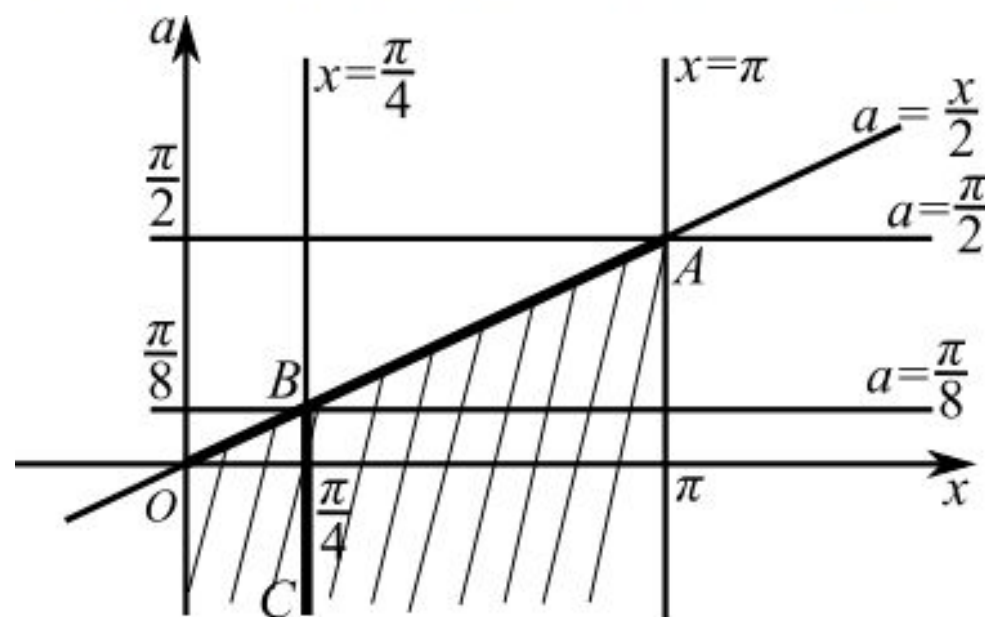
(1) $a = \frac{x}{2}$ — прямая, $a(0) = 0$, $a(\pi) = \frac{\pi}{2}$.

(2) $x = \frac{\pi}{4}$ — вертикальная прямая.

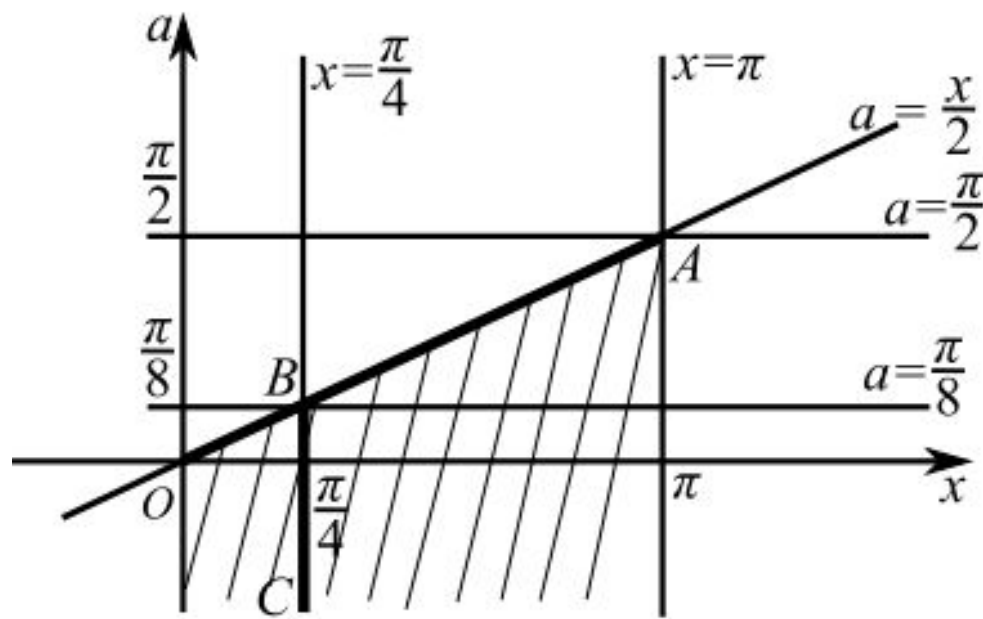
(3) $a \leq \frac{x}{2}$ — полуплоскость с границей $a = \frac{x}{2}$.

(4) $0 \leq x \leq \pi$ — вертикальная полоса с границами $x = 0$ и $x = \pi$.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2a, (1) \\ x = \frac{\pi}{4}, (2) \\ x - 2a \geq 0, (3) \\ 0 \leq x \leq \pi. (4) \end{array} \right. \end{cases}$$



Система неравенств $\begin{cases} x - 2a \geq 0, \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ задаёт множество точек — отрезок OA и часть полосы под ним (на рисунке заштриховано).



Решения всей системы задаются частями прямых $a = \frac{x}{2}$ и $x = \frac{\pi}{4}$, попадающими в это множество точек, на рисунке — это отрезок OA и луч BC .

B — точка пересечения прямых $a = \frac{x}{2}$ и $x = \frac{\pi}{4}$, её координаты $x = \frac{\pi}{4}$, $a = \frac{\pi}{4} : 2 = \frac{\pi}{8}$.

Будем проводить горизонтальные прямые $a = a_k$. Количество корней заданного уравнения при $a = a_k$ равно количеству точек пересечения таких прямых с отрезком OA и лучом BC .

Видим, что единственная точка пересечения с горизонтальной прямой будет, если $a < 0$, $\frac{\pi}{8} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$, то есть $a \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup \left[\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение

Второй способ.

Решим уравнение $\sqrt{x - 2a}(\cos x - \sin x) = 0$ при $x \in [0; \pi]$. ОДЗ $x \geq 2a$.

1. $\sqrt{x - 2a} = 0, x = 2a, 0 \leq x \leq \pi$ только в том случае, если $0 \leq 2a \leq \pi; 0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$.

То есть при $a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ уравнение имеет корень $x = 2a$.

2. $\cos x - \sin x = 0$; $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. С учётом того, что $x \in [0; \pi]$, получим

единственное значение $x = \frac{\pi}{4}$. Оно попадает в ОДЗ при $\frac{\pi}{4} \geq 2a$, то есть $a \leq \frac{\pi}{8}$. Значит,

при $a \leq \frac{\pi}{8}$ уравнение имеет корень $x = \frac{\pi}{4}$. Таким образом, при $a \in (-\infty; 0)$ уравнение

имеет на отрезке $[0; \pi]$ единственный корень $x = \frac{\pi}{4}$, при $a \in [0; \frac{\pi}{8}]$ уравнение имеет корни

$x = \frac{\pi}{4}$ и $x = 2a$, которые могут совпадать или не совпадать, при $a \in (\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{2}]$ уравнение

имеет единственный на отрезке корень $x = 2a$, при $a > \frac{\pi}{2}$ — корней на отрезке $[0; \pi]$ нет.

Найдём при каких значениях параметра a числа $2a$ и $\frac{\pi}{4}$ совпадают: $2a = \frac{\pi}{4}$; $a = \frac{\pi}{8}$. Значит,

при $a = \frac{\pi}{8}$ уравнение тоже имеет единственный корень на отрезке $[0; \pi]$.

Таким образом, единственный корень на отрезке $[0; \pi]$ будет при $a \in (-\infty; 0) \cup [\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{2}]$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup [\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{2}]$.

Построение графиков функций

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

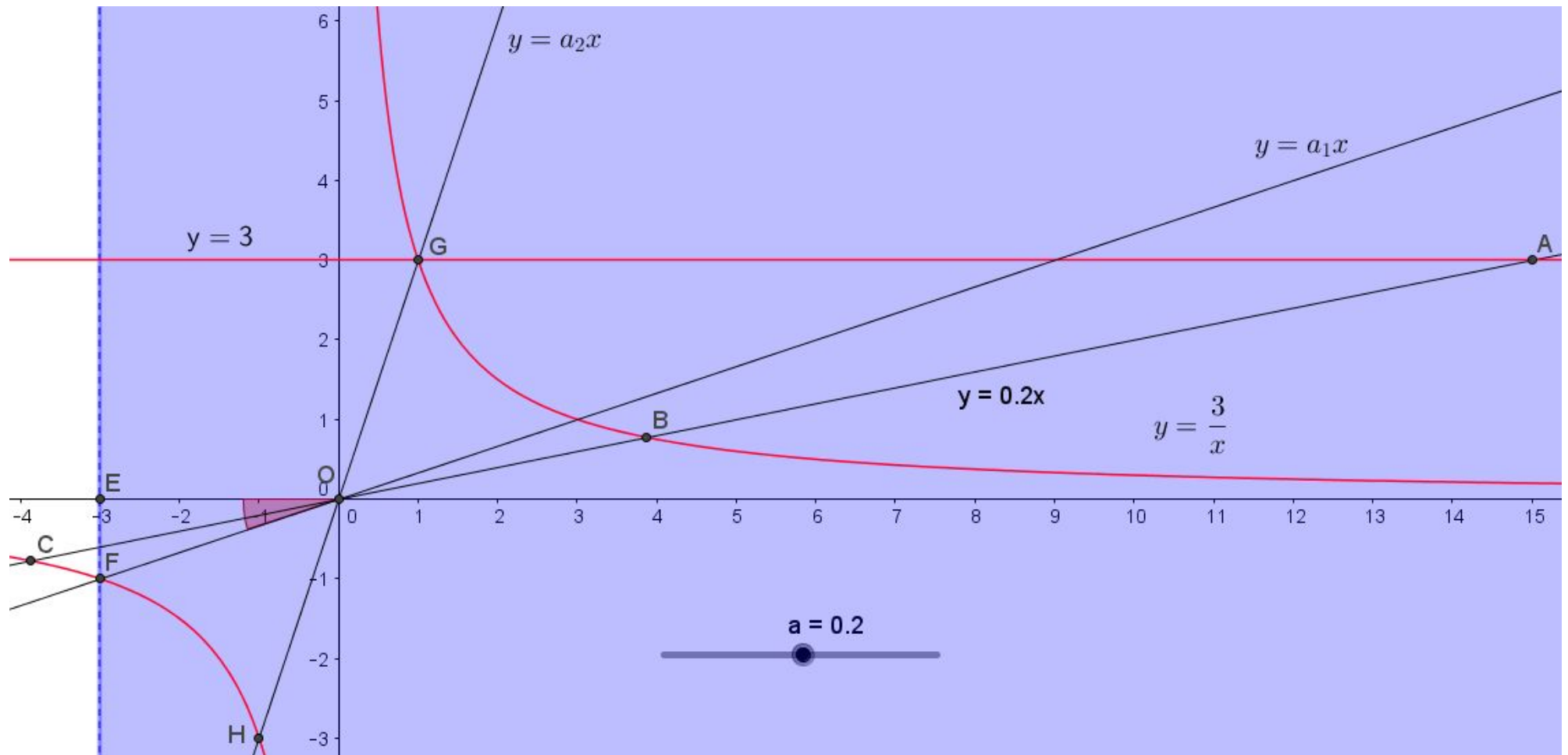
Решение

Первый способ.

Так как $xy^2 - 3xy - 3y + 9 = xy(y - 3) - 3(y - 3) = (y - 3)(xy - 3)$,
то первое уравнение системы можно записать в виде:

$$\frac{(y - 3)(xy - 3)}{\sqrt{x + 3}} = 0.$$

Рассмотрим рисунок.



Из рисунка следует, что $a \in (0; a_1] \cup \{a_2\}$.

Значение a_1 найдём из условия того, что прямая $y = a_1 x$ пересекается с прямой $x = -3$ и гиперболой $y = \frac{3}{x}$. При $x = -3$, $y = \frac{3}{x} = \frac{3}{-3} = -1$.

Тогда $-1 = a_1 \cdot (-3)$, $a_1 = \frac{1}{3}$.

Значение a_2 найдём из условия того, что прямая $y = a_2 x$ пересекается с прямой $y = 3$ и гиперболой $y = \frac{3}{x}$. При $y = 3$, $y = \frac{3}{x}$, $3 = \frac{3}{x}$, $x = 1$.

Тогда $3 = a_2 \cdot 1$, $a_2 = 3$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{3}\right] \cup \{3\}$.

Второй способ.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} \frac{(y-3)(xy-3)}{\sqrt{x+3}} = 0 \\ y = ax. \end{cases}$$

Эта система имеет столько же корней, сколько их имеет уравнение

$$\frac{(ax-3)(ax^2-3)}{\sqrt{x+3}} = 0. \quad (*)$$

1) При $a = 0$ уравнение $(*)$, очевидно, не имеет корней.

2) При $a < 0$ уравнение $ax - 3 = 0$ имеет один корень $x = \frac{3}{a}$, а уравнение $ax^2 - 3 = 0$ не имеет корней. Следовательно, уравнение $(*)$ имеет не более одного корня (с учётом ОДЗ $x > -3$).

3) При $a > 0$ уравнение $(ax - 3)(ax^2 - 3) = 0$ имеет корни $x = \frac{3}{a}$ и

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{a}}.$$

а) Если $-\sqrt{\frac{3}{a}} \leq -3$; $a \leq \frac{1}{3}$, то корень $x = -\sqrt{\frac{3}{a}}$ не удовлетворяет ОДЗ $x > -3$. Тогда уравнение (*) имеет ровно 2 различных положительных корня $x = \sqrt{\frac{3}{a}}$ и $x = \frac{3}{a}$. В этом случае $0 < a \leq \frac{1}{3}$.

б) Если $-\sqrt{\frac{3}{a}} > -3$ (отрицательный корень входит в ОДЗ), то уравнение (*) может иметь ровно 2 корня только если его два положительных корня совпадут. В этом случае $\frac{3}{a} = \sqrt{\frac{3}{a}}$; $a = 3$. При $a = 3$ неравенство $-\sqrt{\frac{3}{a}} > -3$ верно.

Ответ: $(0; \frac{1}{3}] \cup \{3\}$.

18 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ((x-7)^2 + y^2 - a^2) \cdot \ln(9 - x^2 - y^2) = 0, \\ ((x-7)^2 + y^2 - a^2)(x + y + 7 - a) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение

1. Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} \begin{cases} (x-7)^2 + y^2 - a^2 = 0 \\ \ln(9 - x^2 - y^2) = 0 \\ (x-7)^2 + y^2 - a^2 = 0 \\ x + y + 7 - a = 0 \\ x^2 + y^2 < 9 \end{cases} \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} (x-7)^2 + y^2 = a^2 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = -x + a - 7 \end{cases} \\ x^2 + y^2 < 9 \end{cases} \end{cases}$$

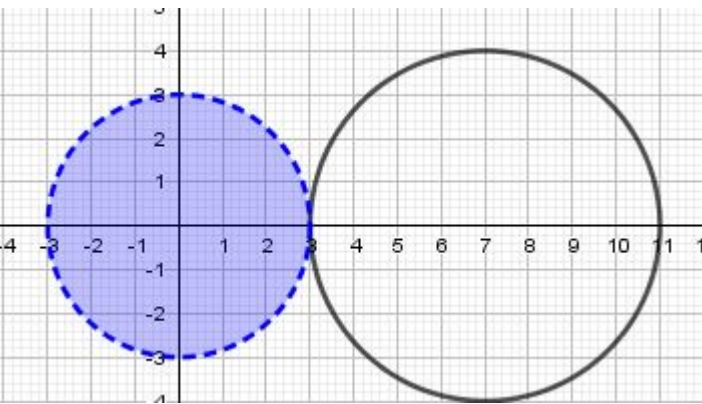
$$\iff \begin{cases} \begin{cases} (x-7)^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 < 9 \\ x^2 + y^2 = 8 \\ y = -x + a - 7 \\ x^2 + y^2 < 9 \end{cases} \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} (x-7)^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 < 9 \\ x^2 + y^2 = 8 \\ y = -x + a - 7. \end{cases} \end{cases}$$

2. Из рисунка видно, что система

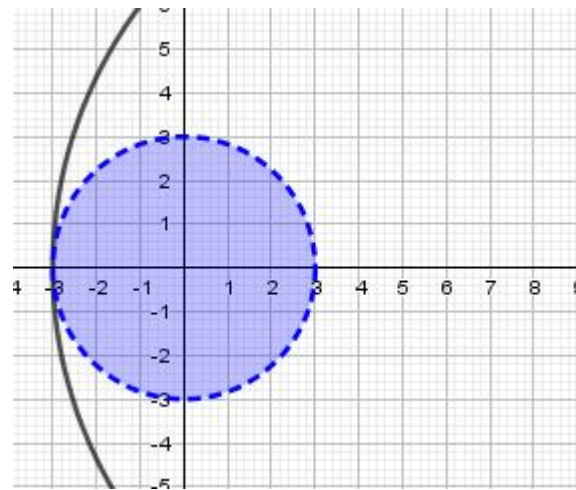
$$\begin{cases} (x - 7)^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 < 9 \end{cases}$$

имеет либо бесконечное множество решений, либо вообще не имеет решений.

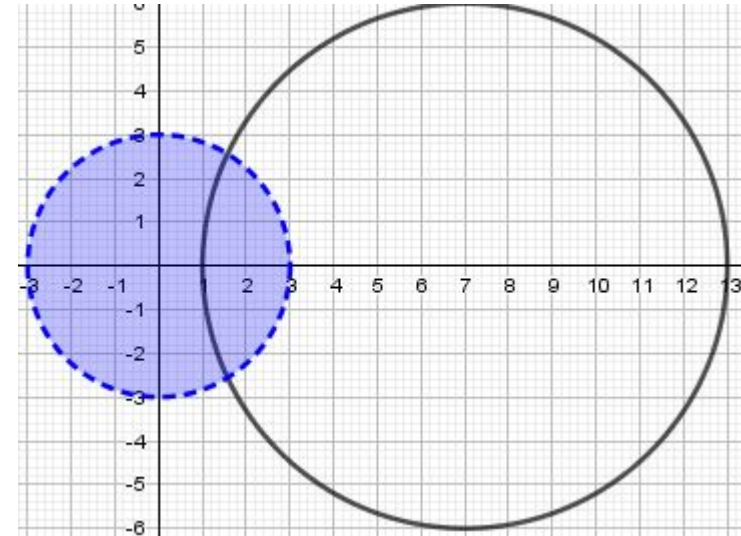
$$|a| = 4$$



$$|a| = 10$$



$$4 < |a| < 10$$



При этом она не имеет решений при

$$\begin{cases} |a| \leq 4 \\ |a| \geq 10 \end{cases} \iff \begin{cases} -4 \leq a \leq 4 \\ a \leq -10 \\ a \geq 10 \end{cases} \iff a \in (-\infty; -10] \cup [-4; 4] \cup [10; +\infty).$$

3. Таким образом, необходимо найти значения a при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = -x + a - 7 \\ a \in (-\infty; -10] \cup [-4; 4] \cup [10; +\infty) \end{cases} \quad \text{будет иметь ровно два решения.}$$

4. Найдём условия при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = -x + a - 7 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

$$x^2 + (-x + a - 7)^2 = 8$$

$$x^2 + x^2 - 2(a - 7)x + (a - 7)^2 - 8 = 0$$

$$2x^2 - 2(a - 7)x + (a - 7)^2 - 8 = 0.$$

Последнее квадратное уравнение имеет два корня, если

$$D = 4(a - 7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot ((a - 7)^2 - 8) > 0$$

$$-4(a - 7)^2 + 64 > 0$$

$$(a - 7)^2 < 16$$

$$-4 < a - 7 < 4$$

$$3 < a < 11.$$

5. Окончательно,

$$\begin{cases} 3 < a < 11 \\ a \in (-\infty; -10] \cup [-4; 4] \cup [10; +\infty) \end{cases} \iff a \in (3; 4] \cup [10; 11).$$

Ответ: $(3; 4] \cup [10; 11)$.

18 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 + 10x) \cdot \ln \left(\frac{4x + 3y + a}{50} \right) = 0 \\ (x^2 + y^2 + 10x)(x^2 + y^2 - 16x) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение

1. Данная система равносильна системе

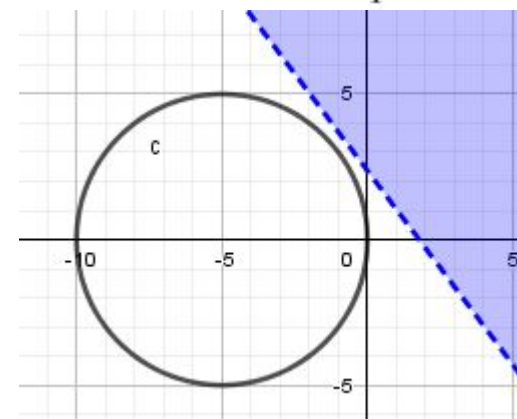
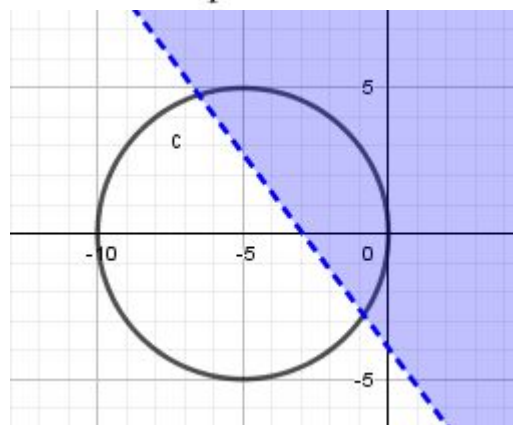
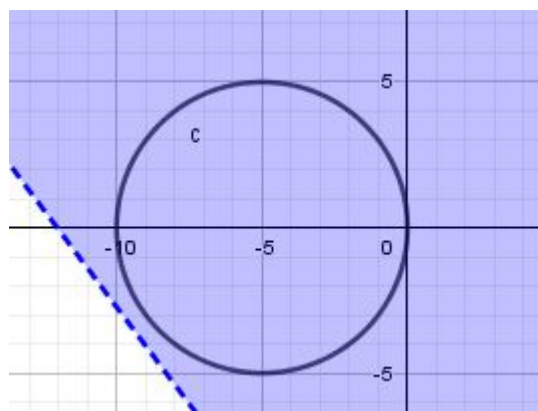
$$\begin{cases} \begin{cases} x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ \ln \left(\frac{4x + 3y + a}{50} \right) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ x^2 + y^2 - 16x = 0 \\ 4x + 3y + a > 0 \end{cases} \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} (x + 5)^2 + y^2 = 5^2 \\ \begin{cases} 4x + 3y + a = 50 \\ (x - 8)^2 + y^2 = 8^2 \end{cases} \\ 4x + 3y + a > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \begin{cases} (x + 5)^2 + y^2 = 5^2 \\ 4x + 3y + a > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x + 3y + a = 50 \\ (x - 8)^2 + y^2 = 8^2 \\ 4x + 3y + a > 0 \end{cases} \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} (x + 5)^2 + y^2 = 5^2 \\ 4x + 3y + a > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x + 3y + a = 50 \\ (x - 8)^2 + y^2 = 8^2. \end{cases} \end{cases}$$

2. Из рисунка видно, что система

$$\begin{cases} (x + 5)^2 + y^2 = 5^2 \\ 4x + 3y + a > 0 \end{cases}$$

имеет либо бесконечное множество решений, либо вообще не имеет решений.



Найдём значения a при которых она не имеет решений. Для этого определим сначала при каких a уравнение $(x + 5)^2 + \left(-\frac{4}{3}x - \frac{a}{3}\right)^2 = 5^2$ имеет одно решение.

$$\frac{25}{9}x^2 + \left(10 + \frac{8}{9}a\right)x + \frac{a^2}{9} = 0$$

$$25x^2 + (90 + 8a)x + a^2 = 0$$

$$D = (90 + 8a)^2 - 4 \cdot 25a^2 = 8100 + 1440a - 36a^2 = 0$$

$$a_1 = -5, a_2 = 45.$$

Легко видеть, что при $a \leq -5$ система $\begin{cases} (x + 5)^2 + y^2 = 5^2 \\ 4x + 3y + a > 0 \end{cases}$ не имеет решений.

3. Таким образом, необходимо найти значения a при которых система

$$\begin{cases} 4x + 3y + a = 50 \\ (x - 8)^2 + y^2 = 8^2 \\ a \leq -5 \end{cases}$$

будет иметь ровно два решения.

4. Найдём условия при которых система $\begin{cases} 4x + 3y + a = 50 \\ (x - 8)^2 + y^2 = 8^2 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Из первого уравнения $y = -\frac{4}{3}x + b$, где $b = -\frac{a}{3} + \frac{50}{3}$.

Тогда $(x - 8)^2 + \left(-\frac{4}{3}x + b\right)^2 - 64 = 0$

$$\frac{25}{9}x^2 - \left(\frac{8}{3}b + 16\right)x + b^2 = 0.$$

Последнее квадратное уравнение имеет два корня, если

$$D = \left(\frac{8}{3}b + 16\right)^2 - 4 \cdot \frac{25}{9}b^2 > 0$$

$$-4b^2 + \frac{256}{3}b + 256 > 0$$

$$b^2 - \frac{64}{3}b - 64 < 0$$

$$-\frac{8}{3} < b < 24$$

$$-\frac{8}{3} < -\frac{a}{3} + \frac{50}{3} < 24$$

$$-22 < a < 58.$$

5. Окончательно, $\begin{cases} -22 < a < 58 \\ a \leq -5 \end{cases} \iff a \in (-22; -5].$

Ответ: $(-22; -5].$

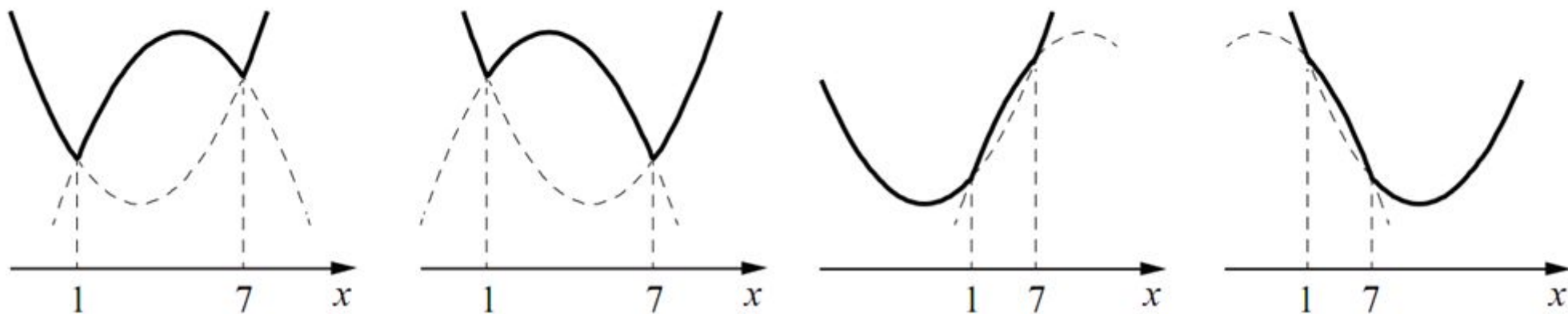
C5

Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.

Решение. При $x^2 - 8x + 7 \geq 0$: $f(x) = x^2 + 2(a-4)x + 7$, а её график состоит из двух частей параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 4 - a$.

При $x^2 - 8x + 7 < 0$: $f(x) = -x^2 + 2(a+4)x - 7$, а её график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все четыре возможных вида графика функции $f(x)$ показаны на рисунках.



Наименьшее значение функция $f(x)$ может принять только в точках $x=1$, $x=7$ или $x=4-a$. Поэтому наименьшее значение функции $f(x)$ больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1) > 1, \\ f(7) > 1, \\ f(4-a) > 1; \end{cases} \begin{cases} 2a > 1, \\ 14a > 1, \\ 2a(4-a) + |a^2 - 9| > 1; \end{cases} \begin{cases} a > \frac{1}{2}, \\ 2a^2 - 8a + 1 - |a^2 - 9| < 0. \end{cases}$$

Если $\frac{1}{2} < a < 3$, то $3a^2 - 8a - 8 < 0$, откуда $\frac{4 - \sqrt{40}}{3} < a < \frac{4 + \sqrt{40}}{3}$. Этот

промежуток содержит интервал $\frac{1}{2} < a < 3$.

Если $a \geq 3$, то $a^2 - 8a + 10 < 0$, откуда $4 - \sqrt{6} < a < 4 + \sqrt{6}$. Значит, $3 \leq a < 4 + \sqrt{6}$.

Объединяя найденные промежутки, получаем: $\frac{1}{2} < a < 4 + \sqrt{6}$.

Ответ: $\frac{1}{2} < a < 4 + \sqrt{6}$.

Другое решение

Найти все значения a , при каждом из которых $f(x) > 1$ для любого x .

$$y = 1 - 2a_2x$$

$$|x^2 - 8x + 7| > 1 - 2ax$$

$$k = -2a$$

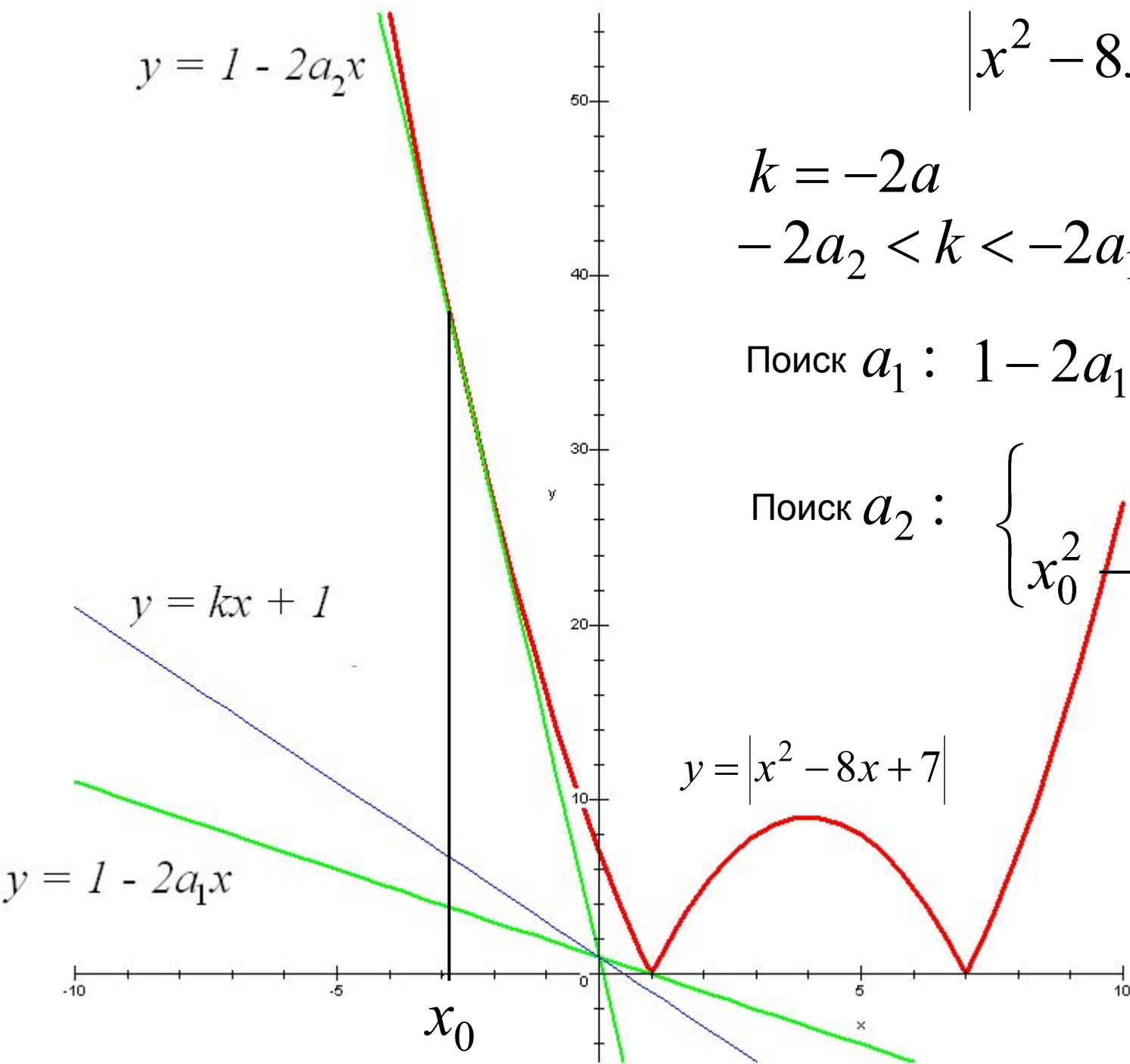
$$-2a_2 < k < -2a_1 \quad a_1 < a < a_2$$

$$\text{Поиск } a_1 : 1 - 2a_1 \cdot 1 = 0; \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Поиск } a_2 : \begin{cases} 2x_0 - 8 = -2a_2 \\ x_0^2 - 8x_0 + 7 = 1 - 2a_2x_0 \end{cases}$$

$$x_0 = -\sqrt{6}$$

$$a_2 = 4 + \sqrt{6}$$



Ответ: $\frac{1}{2} < a < 4 + \sqrt{6}$.