Задачи с параметром на ЕГЭ

Основные виды задач с параметром

1. Линейные уравнения
2. Линейные неравенства
3. Графики уравнений на плоскости *Oxy*
4. Графики неравенств на плоскости *Oxy*
5. Квадратные уравнения
6. Разложение квадратного трехчлена на множители. Формулы Виета
7. Расположение корней квадратного уравнения относительно заданных точек
8. Дробно-рациональные уравнения. Отбор корней
9. Использование свойств функций и алгебраических выражений

0. Задачи с модулем

Алгебраическое решение

Найдите все значения параметра a, при которых только один из корней уравнения $|x + a - 7| = 2a + 3$ принадлежит отрезку [-3;1].

Решение: Если $2a + 3 < 0$, уравнение не имеет корней.

При $2a + 3 \geqslant 0$, то есть $a \geqslant -1,5$, получим совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x + a - 7 = 2a + 3, \\ x + a - 7 = -2a - 3, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = a + 10, \\ x_2 = -3a + 4. \end{array}\right.$$

Условие задачи выполняется, если один из корней уравнения $|x + a - 7| = 2a + 3$ принадлежит отрезку [-3;1], а другой нет.

x_1 принадлежит отрезку [-3;1], если $-3 \leqslant a + 10 \leqslant 1$, $-13 \leqslant a \leqslant -9$.

Но при таких значениях параметра уравнение не имеет корней, значит $x_1 = a + 10$ ни при каких значениях не принадлежит отрезку [-3;1].

Найдём, при каких a корень $x_2 = -3a + 4$ лежит на этом отрезке.

$$-3 \leqslant -3a + 4 \leqslant 1, \;\; -7 \leqslant -3a \leqslant -3, \;\; 1 \leqslant a \leqslant \frac{7}{3}.$$

Ответ: $1 \leqslant a \leqslant \frac{7}{3}$.

Оценка множества значений

При каких значениях параметра a уравнение

$$2^{x^4-18x^2+84} =$$

$$= 8 - x^2 - 2xa(a-2) - a^4 + 4a^3 - 4a^2$$

имеет хотя бы один корень?

Решение.

$$2^{(x^4-18x^2+81)+3} = 8 - (x^2 + 2x(a^2 - 2a) + (a^4 - 4a^3 + 4a^2)),$$

$$2^{(x^2-9)^2+3} = 8 - (x^2 + 2x(a^2 - 2a) + (a^2 - 2a)^2),$$

$$2^{(x^2-9)^2+3} = 8 - (x + a^2 - 2a)^2,$$

$$(x^2-9)^2 \geqslant 0,\ (x^2-9)^2 + 3 \geqslant 3;\ 2^{(x^2-9)^2+3} \geqslant 8.$$

$$-(x + a^2 - 2a)^2 \leqslant 0;\ 8 - (x + a^2 - 2a)^2 \leqslant 8.$$

$$\begin{cases} 2^{(x^2-9)^2+3} = 8, \\ 8 - (x + a^2 - 2a)^2 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 9 = 0, \\ x + a^2 - 2a = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3;\ x_2 = -3, \\ x + a^2 - 2a = 0. \end{cases}$$

$x = 3$, $3 + a^2 - 2a = 0$, корней нет.

$x = -3$, $-3 + a^2 - 2a = 0$; $a_1 = -1$; $a_2 = 3$.

Ответ: $a = -1$; $a = 3$.

Симметрия алгебраических выражений

С5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 - |a-5+x| = |5-a+x| - (a-5)^2$ имеет единственный корень.

Решени

Пусть x_0 — корень уравнения. Тогда
$x_0{}^2 - |a-5+x_0| = |5-a+x_0| - (a-5)^2.$

Но $x = -x_0$ тоже будет корнем этого уравнения, так как
$(-x_0)^2 - |a-5-x_0| - |5-a-x_0| + (a-5)^2 =$
$= x_0{}^2 - |-a+5+x_0| - |-5+a+x_0| + (a-5)^2 =$
$= x_0{}^2 - |5-a+x_0| - |a-5+x_0| + (a-5)^2 = 0.$

Поэтому в уравнении будет единственный корень, если $x = 0$ — это корень и других корней нет. Найдём a, при которых $x = 0$ — корень.

$-|a-5| = |5-a| - (a-5)^2$, $|a-5| + |5-a| = (a-5)^2$, $2|a-5| = |a-5|^2$,
$|a-5| \cdot (|a-5| - 2) = 0$,

$$\left[\begin{array}{l} |a-5| = 0, \\ |a-5| - 2 = 0, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a = 5, \\ a = 3, \\ a = 7. \end{array}\right.$$

Пусть $a = 5$.
$x^2 - |x| = |x|$, $x^2 - 2|x| = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$. При значении $a = 5$ уравнение имеет три корня, что не удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a = 3$.
$x^2 - |x-2| = |x+2| - 4$, $x^2 + 4 = |x+2| + |x-2|$, $x = 0$ — единственный корень (см. рис. 26).

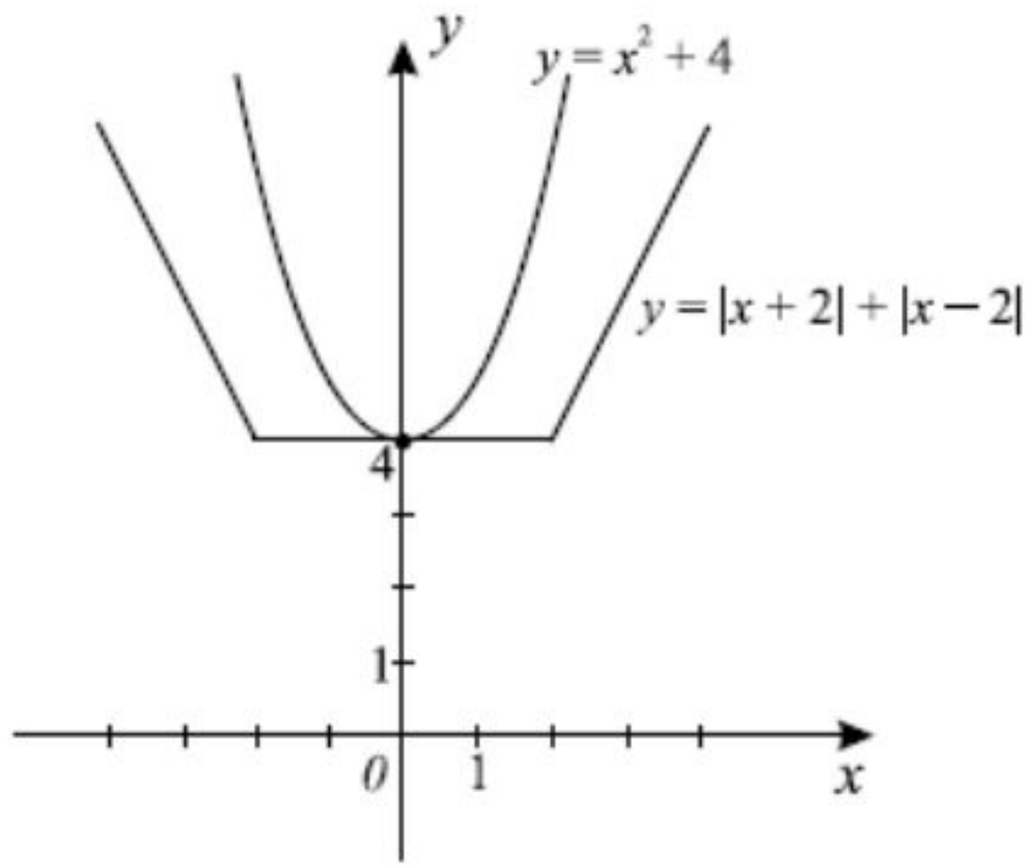


Рис. 26.

Пусть $a = 7$.
$x^2 - |2+x| = |-2+x| - 4$, уравнение получилось такое же, как и при $a = 3$.

Ответ: $\{3; 7\}$.

С5. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant ax - x^2 - 3, \\ x \leqslant ay - y^2 - 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что если при некотором значении параметра a пара чисел (x_0, y_0) является решением данной системы неравенств, то пара (y_0, x_0) — также решение, поскольку при подстановке второй пары неравенства системы остаются теми же, но меняются местами. Следовательно, необходимым условием единственности решения является совпадение этих пар. Если $(x_0, y_0) = (y_0, x_0)$, то $x_0 = y_0$.

При подстановке $x_0 = y_0$ в систему каждое неравенство примет вид

$$x_0 \leqslant ax_0 - x_0^2 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x_0^2 + (1-a)x_0 + 3 \leqslant 0,$$

оно будет иметь единственное решение в случае, если дискриминант D соответствующего квадратного трёхчлена равен 0, т. е. $D = (1-a)^2 - 12 = 0$. Решая уравнение $(a-1)^2 = 12$, получаем два значения параметра $a = 1 - 2\sqrt{3}$ и $a = 1 + 2\sqrt{3}$.

Подставляя $a = 1 - 2\sqrt{3}$ в систему неравенств, получаем:

$$\begin{cases} y \leqslant (1-2\sqrt{3})x - x^2 - 3, \\ x \leqslant (1-2\sqrt{3})y - y^2 - 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (1-2\sqrt{3})x + y + 3 \leqslant 0, \\ y^2 - (1-2\sqrt{3})y + x + 3 \leqslant 0. \end{cases}$$

Сложив левые части и правые части неравенств системы, получим:

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + y^2 + 2\sqrt{3}y + 6 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2\sqrt{3}x + 3) + (y^2 + 2\sqrt{3}y + 3) \leqslant 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{3})^2 + (y + \sqrt{3})^2 \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что система имеет единственное решение $x = -\sqrt{3}$ и $y = -\sqrt{3}$.

Аналогично действуя, получим, что при $a = 1 + 2\sqrt{3}$ система имеет единственное решение $x = \sqrt{3}$ и $y = \sqrt{3}$.

Ответ: $a = 1 \pm 2\sqrt{3}$

Свойства функций. Производная

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{1-3x} = a - |6x|$ имеет более двух корней.

Решение:

$a = \sqrt{1-3x} + |6x|.$

$g(x) = \sqrt{1-3x} + |6x|.$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-3x} + 6x \text{ при } x \in \left[0;\ \frac{1}{3}\right], \\ \sqrt{1-3x} - 6x \text{ при } x \in (-\infty;\ 0). \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-3x} + 6x \text{ при } x \in \left[0;\ \frac{1}{3}\right], \\ \sqrt{1-3x} - 6x \text{ при } x \in (-\infty;\ 0). \end{cases}$$

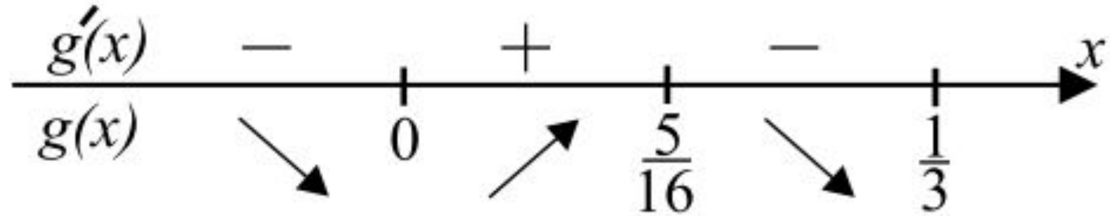
При $x < 0\quad g'(x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{1-3x}} - 6 < 0.$

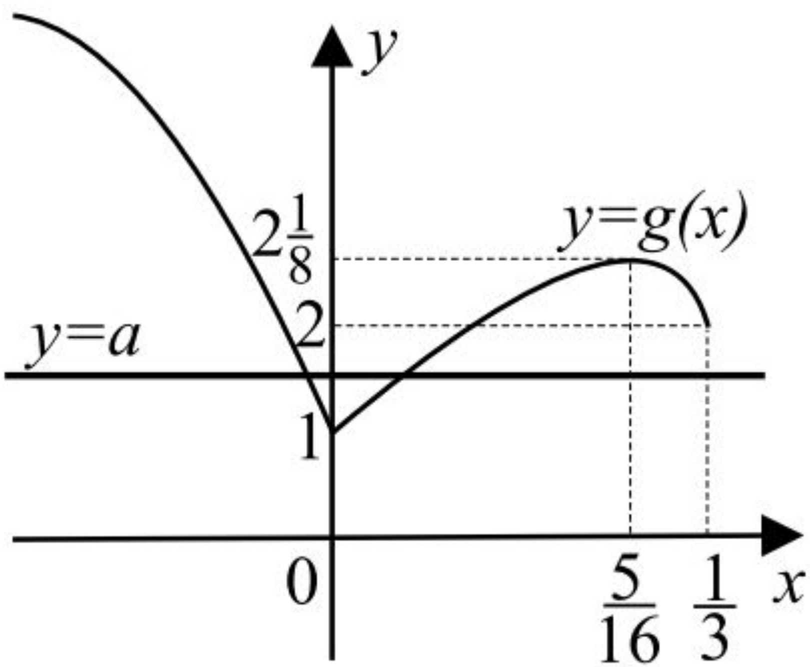
При $x \in \left[0; \frac{1}{3}\right]\quad g'(x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{1-3x}} + 6.$

$g'(x) = 0$, если $\dfrac{-3}{2\sqrt{1-3x}} + 6 = 0$; $\sqrt{1-3x} = \dfrac{1}{4}$; $x = \dfrac{5}{16}$.

$g\left(\dfrac{5}{16}\right) = \dfrac{1}{4} + 6 \cdot \dfrac{5}{16} = 2\dfrac{1}{8}$, $\quad g(0) = 1$;

$g\left(\dfrac{1}{3}\right) = 2$.





Ответ: $\left[2;\ 2\dfrac{1}{8}\right)$.

Координатно-параметрический метод

Пусть на плоскости даны две взаимно перпендикулярные числовые оси с общим началом в точке O. Ось Ox называется *координатной*, а ось Oa – *параметрической.*

Вся плоскость называется *координатно-параметрической (КП-плоскость).*

Метод решения задач с параметрами, использующий КП-плоскость называется *координатно-параметрическим или КП-методом.*

КП-метод основан на нахождении множества всех точек КП-плоскости, значения координаты x и параметра a каждой из которых удовлетворяют условию задачи.

№1. Найдите все значения параметра *a,* при каждом из которых неравенство

$$\frac{x-a}{x-6a}<0$$

выполняется при всех значениях *x,* таких, что

$2 \le x \le 3$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$.

Решение

1. Пусть $a \leqslant 0$. Тогда при $x \in [2;3]$ выполняются неравенства $x-a>0$ и $x-6a>0$. Значит, $\dfrac{x-a}{x-6a}>0$, что противоречит исходному неравенству.

2. Пусть $a>0$. Тогда решением неравенства $\dfrac{x-a}{x-6a}<0$ будет интервал $x \in (a;6a)$ (см. рис. 1). По условию $[2;3] \subset (a;6a)$, то есть $\begin{cases} a<2, \\ 6a>3; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a<2, \\ a>\dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \ a \in \left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

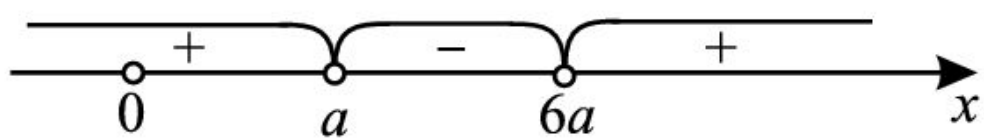
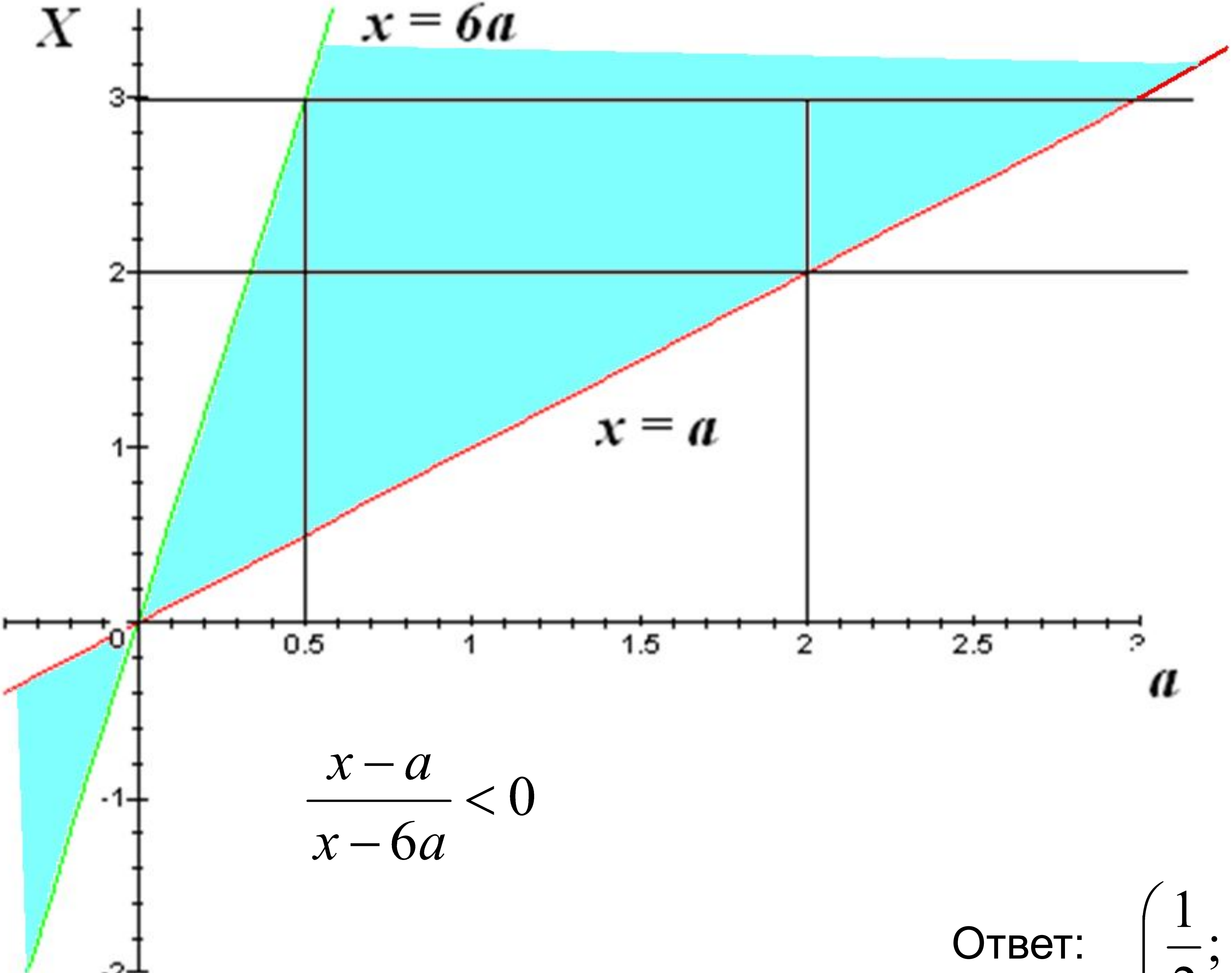


Рис. 1.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Решение



$$\frac{x-a}{x-6a} < 0$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$.

№2. При каких значениях параметра a все корни уравнения

$$3ax^2+(3a^3-12a^2-1)x-a(a-4)=0$$

удовлетворяют условию $|x|<1$?

Ответ: $\{0\}\cup\left(2+\sqrt{3};\ 2+\sqrt{5}\right).$

Решение

1. Пусть $a = 0$. Тогда исходное уравнение

$$3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a-4) = 0$$

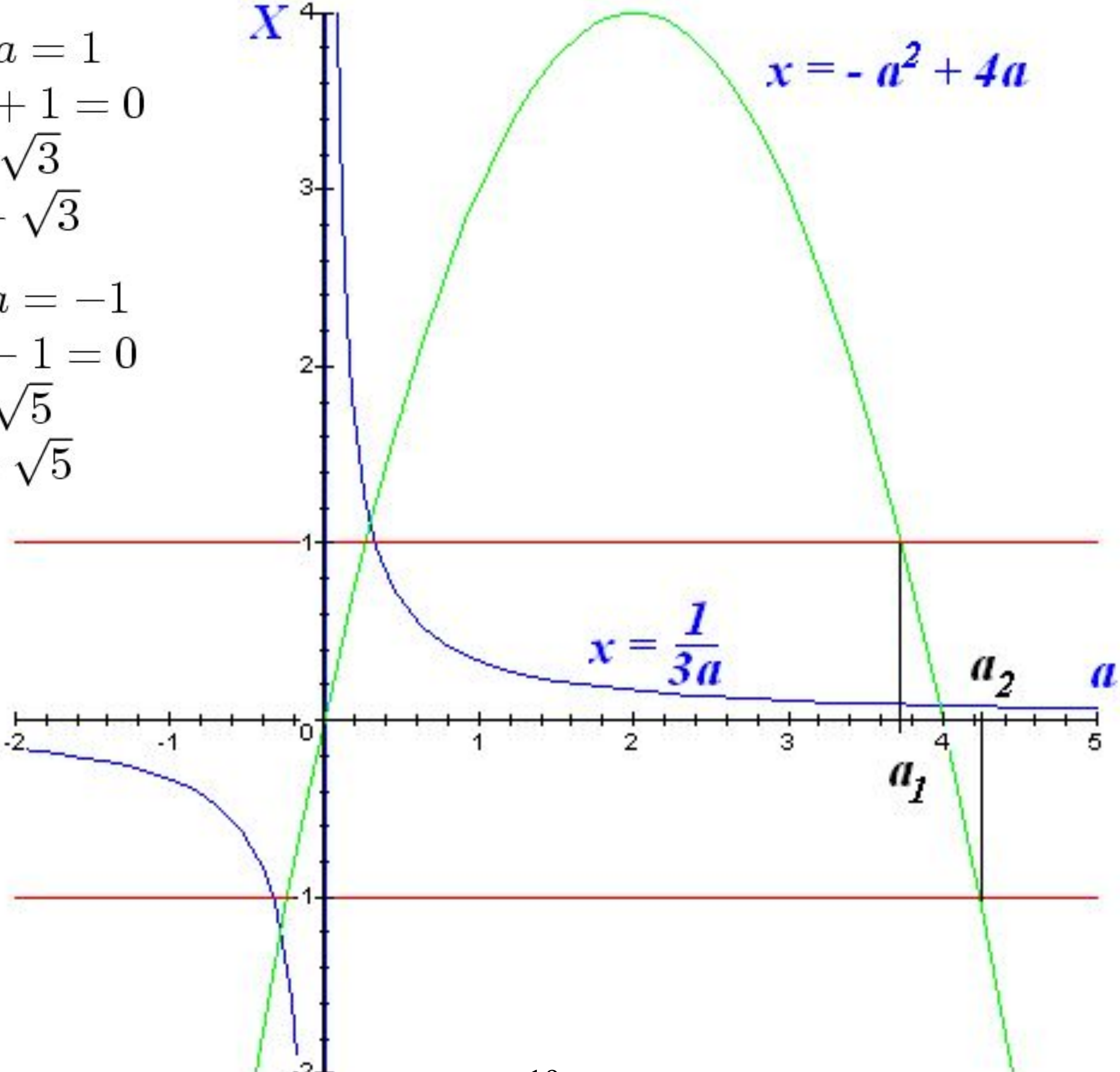
примет вид $-x = 0$. Его единственный корень $x = 0$ удовлетворяет условию $|x| < 1$.

2. Пусть $a \neq 0$. Тогда разделив обе части уравнения на $3a$, получим приведенное уравнение $x^2 + \left(a^2 - 4a - \dfrac{1}{3a}\right)x - \dfrac{a-4}{3} = 0$. Его корни $x_1 = -a^2 + 4a$ и $x_2 = \dfrac{1}{3a}$. Тогда уравнение примет вид:

$$(x + a^2 - 4a)\left(x - \frac{1}{3a}\right) = 0.$$

$$-a^2 + 4a = 1$$
$$a^2 - 4a + 1 = 0$$
$$a = 2 \pm \sqrt{3}$$
$$a_1 = 2 + \sqrt{3}$$

$$-a^2 + 4a = -1$$
$$a^2 - 4a - 1 = 0$$
$$a = 2 \pm \sqrt{5}$$
$$a_2 = 2 + \sqrt{5}$$



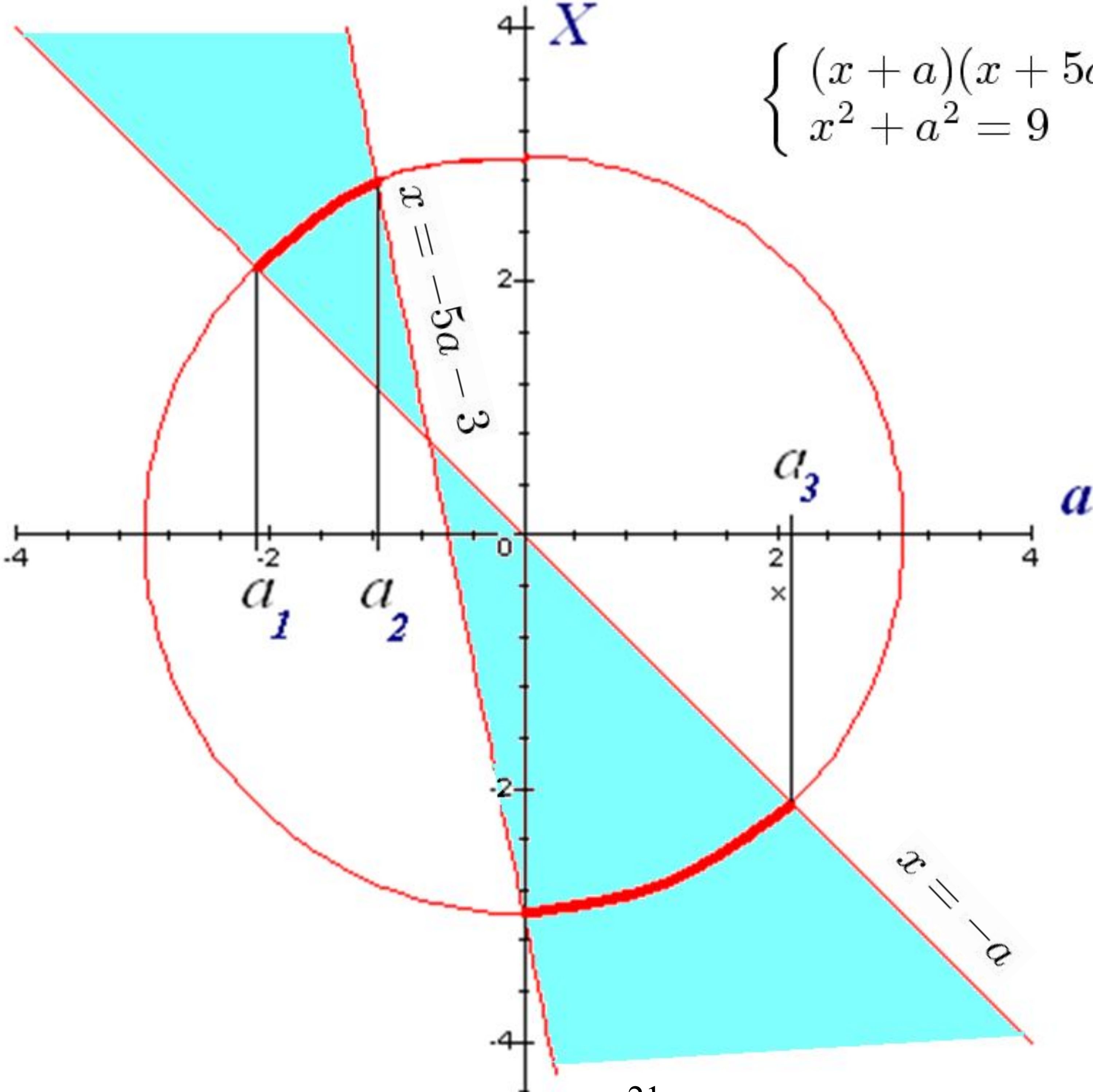
№4. Найдите все значения *a,* при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (6a+3)x + 5a^2 + 3a < 0, \\ x^2 + a^2 = 9 \end{cases}$$

имеет решения.

Ответ: $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2};-\dfrac{15}{13}\right)\cup\left(0;\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right).$

$$\begin{cases} (x+a)(x+5a+3)<0 \\ x^2+a^2=9 \end{cases}$$



$\boxed{\mathbf{18}}$ Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geqslant 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leqslant 2a + 11 \end{cases}$$

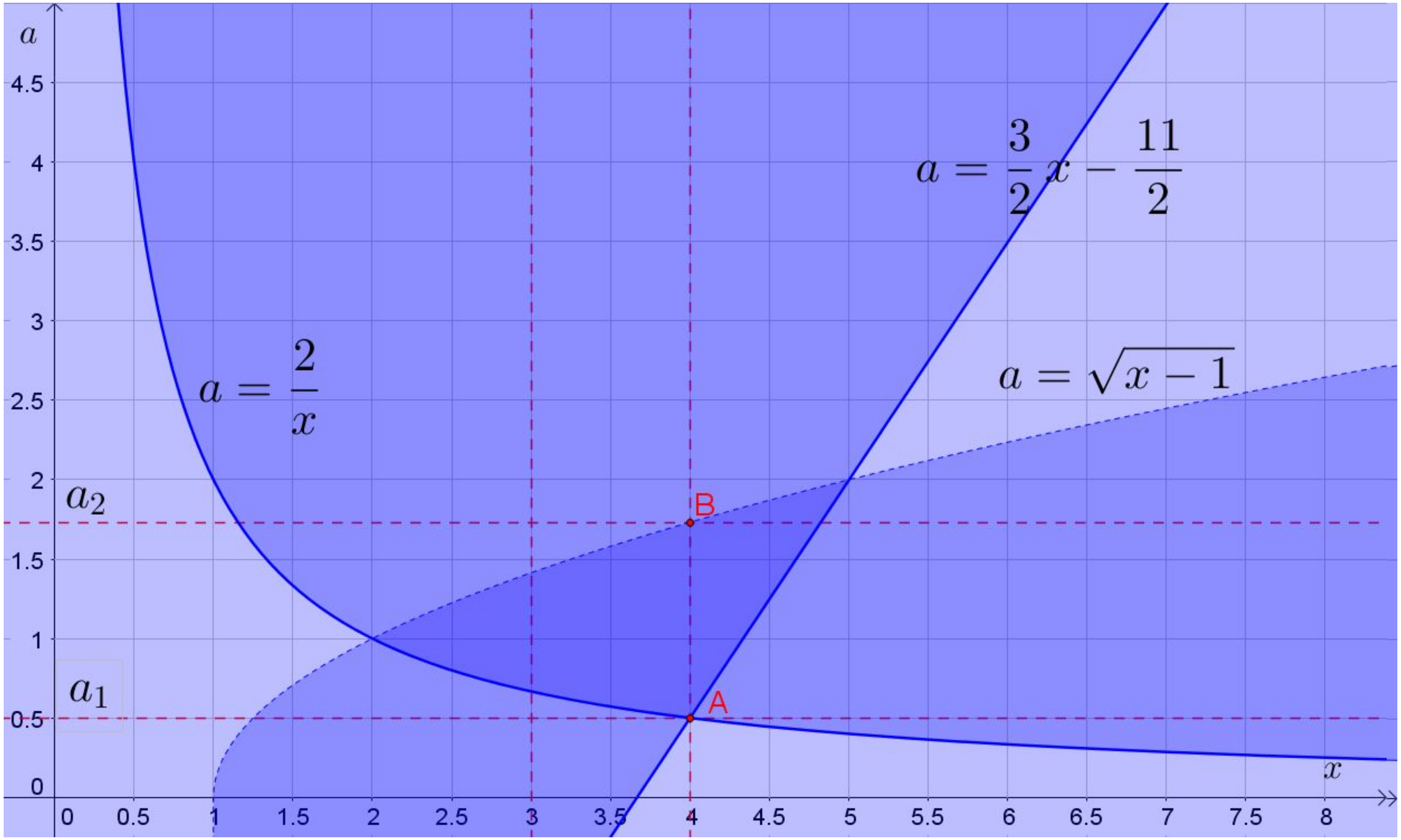
имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$.

Решение №1

ОДЗ: $x \geqslant 1$.

Перепишем систему в виде $\begin{cases} a \geqslant \dfrac{2}{x}, \\ a < \sqrt{x-1}, \\ a \geqslant \dfrac{3}{2}x - \dfrac{11}{2}. \end{cases}$

Изобразим решение системы неравенств в системе координат Oax.



$$\begin{cases} a \geqslant \dfrac{2}{x}, \\ a < \sqrt{x-1}, \\ a \geqslant \dfrac{3}{2}x - \dfrac{11}{2}. \end{cases}$$

Из рисунка видно, что искомые значения a удовлетворяют условию $a_1 \leqslant a < a_2$.

Ординату точки A можно найти подставив $x = 4$, например, в выражение $a = \dfrac{2}{x}$: $a_1 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Ординату точки B можно найти подставив $x = 4$ в выражение $a = \sqrt{x-1}$: $a_2 = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

Ответ: $\left[\dfrac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$.

$\boxed{\mathbf{18}}$ Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

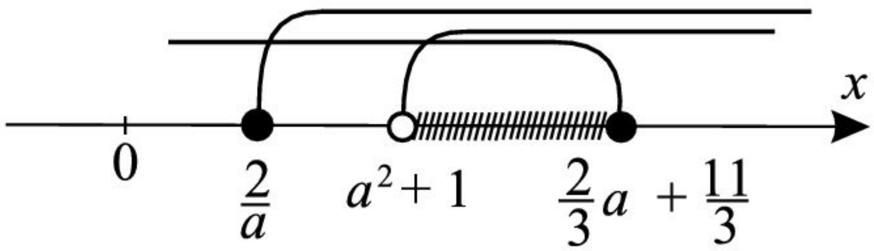
$$\begin{cases} ax \geqslant 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leqslant 2a + 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$.

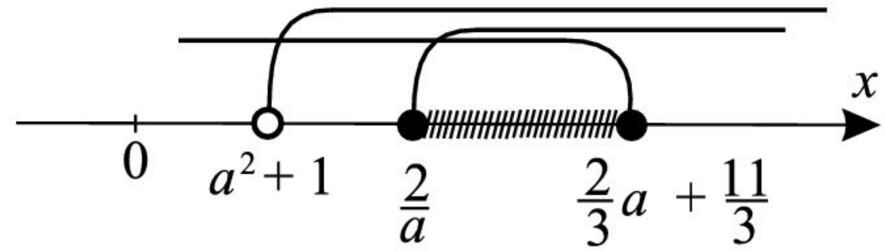
Решение №2

I. Найдём значения a при которых система неравенств имеет решения.
ОДЗ: $x \geqslant 1$. Так как $ax \geqslant 2$ и $x \geqslant 1$, то $a > 0$.

$$\begin{cases} ax \geqslant 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leqslant 2a + 11; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geqslant \dfrac{2}{a}, \\ x > a^2 + 1, \\ x \leqslant \dfrac{2}{3}a + \dfrac{11}{3}. \end{cases}$$



или



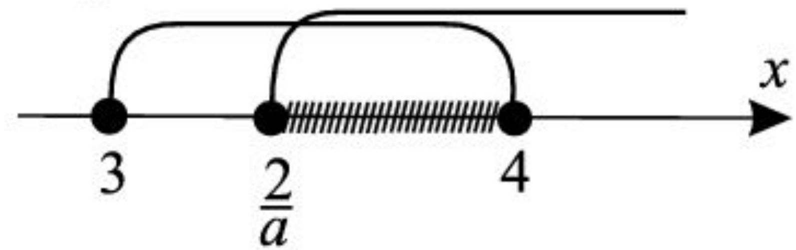
Из рисунков видно, что система имеет решения при выполнении условий

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a+\frac{11}{3} > a^2+1, \\ \frac{2}{3}a+\frac{11}{3} \geqslant \frac{2}{a}, \\ a>0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3a^2-2a-8<0, \\ 2a^2+11a-6 \geqslant 0, \\ a>0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \in \left(-\frac{4}{3}; 2\right), \\ a \in (-\infty; -6] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right), \\ a \in (0; +\infty\big); \end{cases} \quad a \in \left[\frac{1}{2}; 2\right).$$

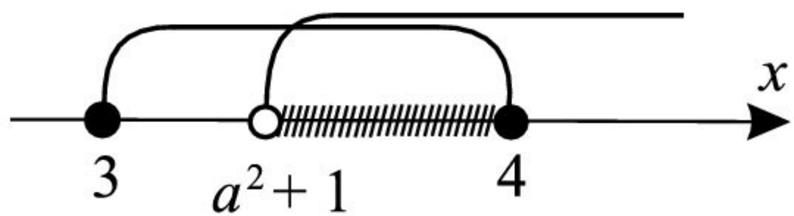
II. Найдём значения $a \in \left[\frac{1}{2}; 2\right)$ при которых система неравенств имеет решения на отрезке $[3; 4]$.

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{2}{a}, \\ x > a^2+1, \\ x \leqslant \frac{2}{3}a+\frac{11}{3}. \end{cases}$$

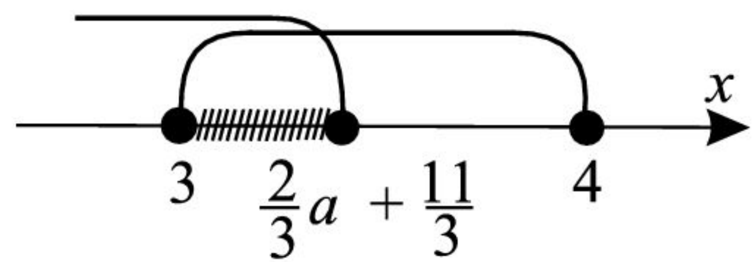
1) Из рисунка видно, что неравенство $x \geqslant \frac{2}{a}$ имеет решения на отрезке $[3; 4]$ при $\frac{2}{a} \leqslant 4$. Так как $a > 0$, то $a \geqslant \frac{1}{2}$.



2) Из рисунка видно, что неравенство $x > a^2 + 1$ имеет решения на отрезке $[3; 4]$ при $a^2 + 1 < 4$; $a^2 < 3$. Учитывая, что $\frac{1}{2} \leqslant a < 2$, получим $\frac{1}{2} \leqslant a < \sqrt{3}$.



3) Из рисунка видно, что неравенство $x \leqslant \frac{2}{3}a + \frac{11}{3}$ имеет решения на отрезке $[3; 4]$ при $\frac{2}{3}a + \frac{11}{3} \geqslant 3$; $a \geqslant -1$.



Таким образом, условию задачи удовлетворяют $\frac{1}{2} \leqslant a < \sqrt{3}$.

Ответ: $\left[\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geqslant 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leqslant 2a + 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$.

Решение №3

Пусть $x_0 \in [3; 4]$ и x_0 — удовлетворяет исходной системе, то есть

$$\begin{cases} ax_0 \geqslant 2, \\ \sqrt{x_0-1} > a, \\ 3x_0 \leqslant 2a + 11. \end{cases}$$

1) Так как $ax_0 \geqslant 2$, то $a > 0$.

2) Так как $4 \geqslant x_0$ и $a > 0$, то $4a \geqslant ax_0$. Учитывая, что $ax_0 \geqslant 2$, получим $4a \geqslant 2;\ a \geqslant \dfrac{1}{2}$.

3) При $a \geqslant \dfrac{1}{2}$ для $x_1 = 4$ выполняются условия

$$\begin{cases} ax_1 \geqslant ax_0 \geqslant 2, \\ \sqrt{x_1 - 1} \geqslant \sqrt{x_0 - 1} > a, \\ 3x_1 = 3 \cdot 4 = 12 = 2 \cdot \dfrac{1}{2} + 11 \leqslant 2a + 11. \end{cases}$$

Это означает, что $x_1 = 4$ также удовлетворяет исходной системе.

Таким образом, мы доказали, что исходная система имеет решения на отрезке $[3; 4]$ тогда и только тогда, когда $x = 4$ удовлетворяет этой системе.

4) Найдём все значения a при которых исходной системе неравенств удовлетворяет значение $x = 4$:

$$\begin{cases} 4a \geqslant 2, \\ \sqrt{4 - 1} > a, \\ 3 \cdot 4 \leqslant 2a + 11; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ a < \sqrt{3}, \\ a \geqslant \dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad a \in \left[\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right).$$

Ответ: $\left[\dfrac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-2a}\cos x = \sqrt{x-2a}\sin x$ имеет единственный корень на промежутке $[0;\pi]$.

Решение

Первый способ.

Преобразуем уравнение

$\sqrt{x-2a}(\cos x - \sin x) = 0$. На промежутке $[0;\pi]$ оно равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-2a=0, \\ \cos x - \sin x = 0, \end{array}\right. \\ x-2a \geqslant 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2a, \\ \operatorname{tg} x = 1, \end{array}\right. \\ x-2a \geqslant 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2a, (1) \\ x=\frac{\pi}{4}, (2) \end{array}\right. \\ x-2a \geqslant 0, (3) \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi. (4) \end{cases}$$

Рассмотрим графический способ решения, построим графики входящих в систему уравнений и неравенств на плоскости Oxa.

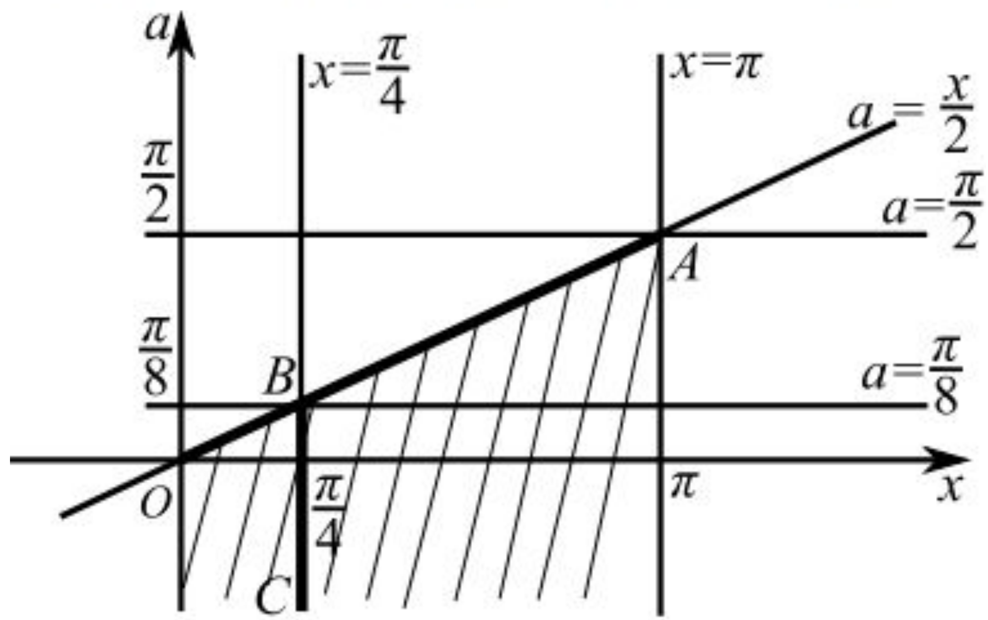
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2a, (1) \\ x = \dfrac{\pi}{4}, (2) \end{array}\right. \\ x - 2a \geqslant 0, (3) \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi. (4) \end{cases}$$

(1) $a = \dfrac{x}{2}$ — прямая, $a(0) = 0$, $a(\pi) = \dfrac{\pi}{2}$.

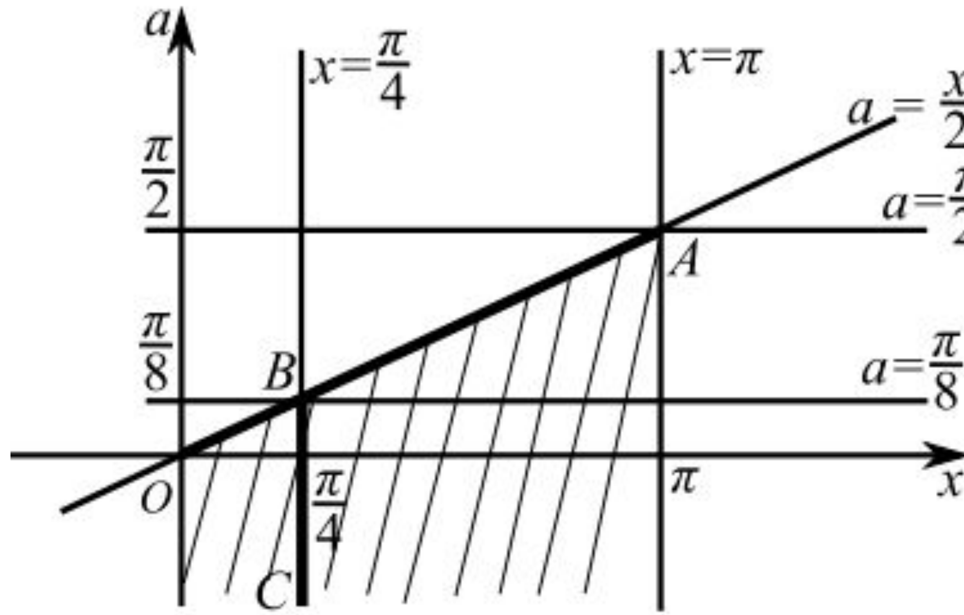
(2) $x = \dfrac{\pi}{4}$ — вертикальная прямая.

(3) $a \leqslant \dfrac{x}{2}$ — полуплоскость с границей $a = \dfrac{x}{2}$.

(4) $0 \leqslant x \leqslant \pi$ — вертикальная полоса с границами $x = 0$ и $x = \pi$.



Система неравенств $\begin{cases} x - 2a \geqslant 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$ задаёт множество точек — отрезок OA и часть полосы под ним (на рисунке заштриховано).



Решения всей системы задаются частями прямых $a = \frac{x}{2}$ и $x = \frac{\pi}{4}$, попадающими в это множество точек, на рисунке это отрезок OA и луч BC.

B — точка пересечения прямых $a = \frac{x}{2}$ и $x = \frac{\pi}{4}$, её координаты $x = \frac{\pi}{4}$, $a = \frac{\pi}{4} : 2 = \frac{\pi}{8}$.

Будем проводить горизонтальные прямые $a = a_k$. Количество корней заданного уравнения при $a = a_k$ равно количеству точек пересечения таких прямых с отрезком OA и лучом BC.

Видим, что единственная точка пересечения с горизонтальной прямой будет, если $a < 0$, $\frac{\pi}{8} \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}$, то есть $a \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup \left[\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение

Второй способ.

Решим уравнение $\sqrt{x-2a}(\cos x - \sin x) = 0$ при $x \in [0; \pi]$. ОДЗ $x \geqslant 2a$.

1. $\sqrt{x-2a} = 0$, $x = 2a$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ только в том случае, если $0 \leqslant 2a \leqslant \pi$; $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

То есть при $a \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ уравнение имеет корень $x = 2a$.

2. $\cos x - \sin x = 0$; $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. С учётом того, что $x \in [0; \pi]$, получим единственное значение $x = \dfrac{\pi}{4}$. Оно попадает в ОДЗ при $\dfrac{\pi}{4} \geqslant 2a$, то есть $a \leqslant \dfrac{\pi}{8}$. Значит, при $a \leqslant \dfrac{\pi}{8}$ уравнение имеет корень $x = \dfrac{\pi}{4}$. Таким образом, при $a \in (-\infty; 0)$ уравнение имеет на отрезке $[0; \pi]$ единственный корень $x = \dfrac{\pi}{4}$, при $a \in \left[0; \dfrac{\pi}{8}\right]$ уравнение имеет корни $x = \dfrac{\pi}{4}$ и $x = 2a$, которые могут совпадать или не совпадать, при $a \in \left(\dfrac{\pi}{8}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ уравнение имеет единственный на отрезке корень $x = 2a$, при $a > \dfrac{\pi}{2}$ — корней на отрезке $[0; \pi]$ нет.
Найдём при каких значениях параметра a числа $2a$ и $\dfrac{\pi}{4}$ совпадают: $2a = \dfrac{\pi}{4}$; $a = \dfrac{\pi}{8}$. Значит, при $a = \dfrac{\pi}{8}$ уравнение тоже имеет единственный корень на отрезке $[0; \pi]$.

Таким образом, единственный корень на отрезке $[0; \pi]$ будет при $a \in (-\infty; 0) \cup \left[\dfrac{\pi}{8}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup \left[\dfrac{\pi}{8}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Построение графиков функций

$\boxed{\mathbf{18}}$ Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

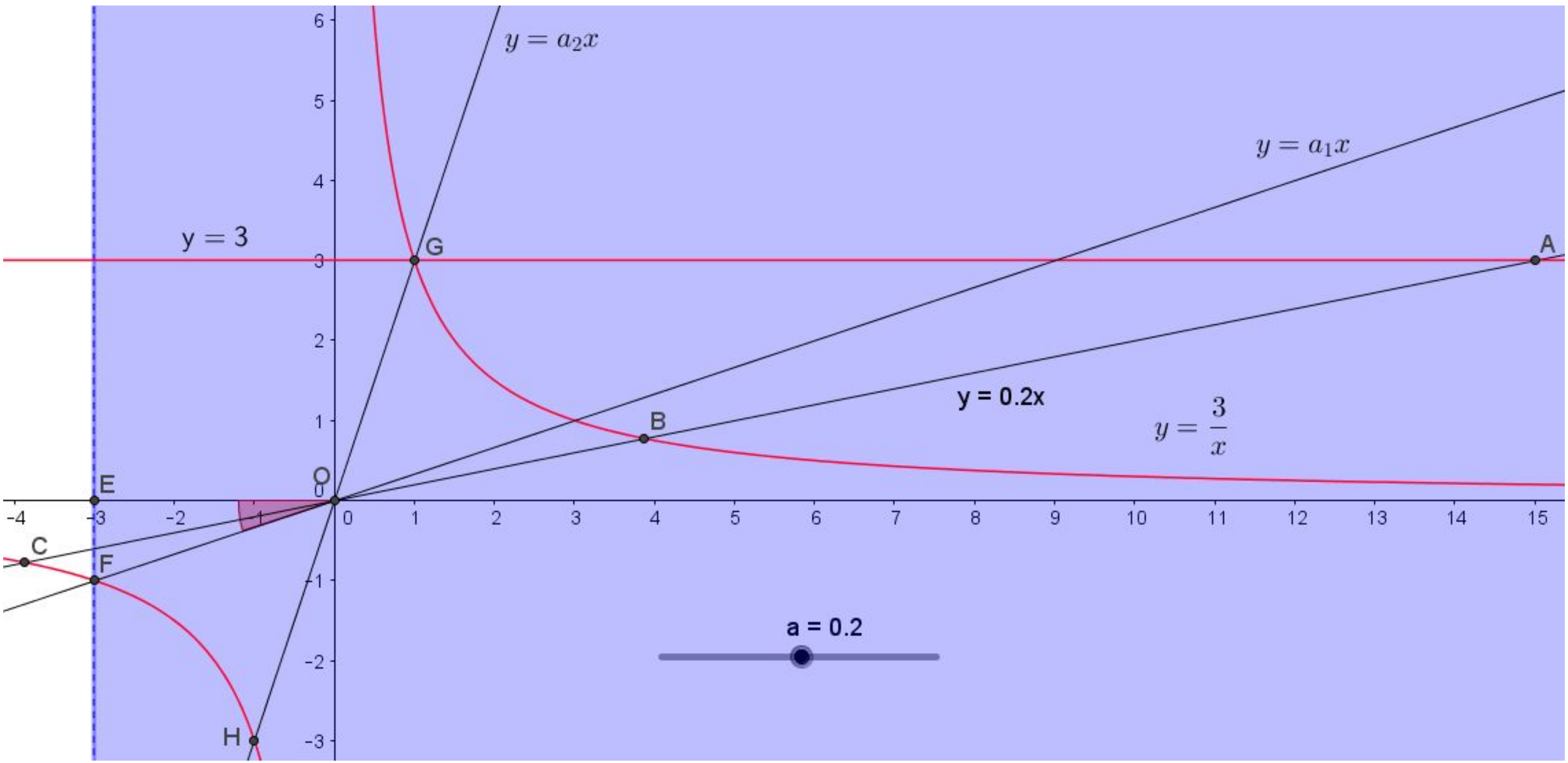
Решение

Первый способ.

Так как $xy^2 - 3xy - 3y + 9 = xy(y-3) - 3(y-3) = (y-3)(xy-3)$, то первое уравнение системы можно записать в виде:

$$\frac{(y-3)(xy-3)}{\sqrt{x+3}} = 0.$$

Рассмотрим рисунок.



Из рисунка следует, что $a \in (0; a_1] \cup \{a_2\}$.

Значение a_1 найдём из условия того, что прямая $y = a_1 x$ пересекается с прямой $x = -3$ и гиперболой $y = \dfrac{3}{x}$. При $x = -3$, $y = \dfrac{3}{x} = \dfrac{3}{-3} = -1$. Тогда $-1 = a_1 \cdot (-3)$, $a_1 = \dfrac{1}{3}$.

Значение a_2 найдём из условия того, что прямая $y = a_2 x$ пересекается с прямой $y = 3$ и гиперболой $y = \dfrac{3}{x}$. При $y = 3$, $y = \dfrac{3}{x}$, $3 = \dfrac{3}{x}$, $x = 1$. Тогда $3 = a_2 \cdot 1$, $a_2 = 3$.

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{3}\right] \cup \{3\}$.

Второй способ.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{(y-3)(xy-3)}{\sqrt{x+3}} = 0 \\ y = ax. \end{cases}$$

Эта система имеет столько же корней, сколько их имеет уравнение

$$\frac{(ax-3)(ax^2-3)}{\sqrt{x+3}} = 0. \qquad (*)$$

1) При $a = 0$ уравнение $(*)$, очевидно, не имеет корней.

2) При $a < 0$ уравнение $ax - 3 = 0$ имеет один корень $x = \dfrac{3}{a}$, а уравнение $ax^2 - 3 = 0$ не имеет корней. Следовательно, уравнение $(*)$ имеет не более одного корня (с учётом ОДЗ $x > -3$).

3) При $a > 0$ уравнение $(ax-3)(ax^2-3) = 0$ имеет корни $x = \dfrac{3}{a}$ и $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{a}}$.

а) Если $-\sqrt{\dfrac{3}{a}} \leqslant -3$; $a \leqslant \dfrac{1}{3}$, то корень $x = -\sqrt{\dfrac{3}{a}}$ не удовлетворяет ОДЗ $x > -3$. Тогда уравнение $(*)$ имеет ровно 2 различных положительных корня $x = \sqrt{\dfrac{3}{a}}$ и $x = \dfrac{3}{a}$. В этом случае $0 < a \leqslant \dfrac{1}{3}$.

б) Если $-\sqrt{\dfrac{3}{a}} > -3$ (отрицательный корень входит в ОДЗ), то уравнение $(*)$ может иметь ровно 2 корня только если его два положительных корня совпадут. В этом случае $\dfrac{3}{a} = \sqrt{\dfrac{3}{a}}$; $a = 3$. При $a = 3$ неравенство $-\sqrt{\dfrac{3}{a}} > -3$ верно.

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{3}\right] \cup \{3\}$.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \left((x-7)^2+y^2-a^2\right)\cdot\ln(9-x^2-y^2)=0, \\ \left((x-7)^2+y^2-a^2\right)\left(x+y+7-a\right)=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение

1. Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} (x-7)^2+y^2-a^2=0 \\ \ln(9-x^2-y^2)=0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} (x-7)^2+y^2-a^2=0 \\ x+y+7-a=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ x^2+y^2<9 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} (x-7)^2+y^2=a^2 \\ \begin{cases} x^2+y^2=8 \\ y=-x+a-7 \end{cases} \end{array}\right. \\ x^2+y^2<9 \end{cases}$$

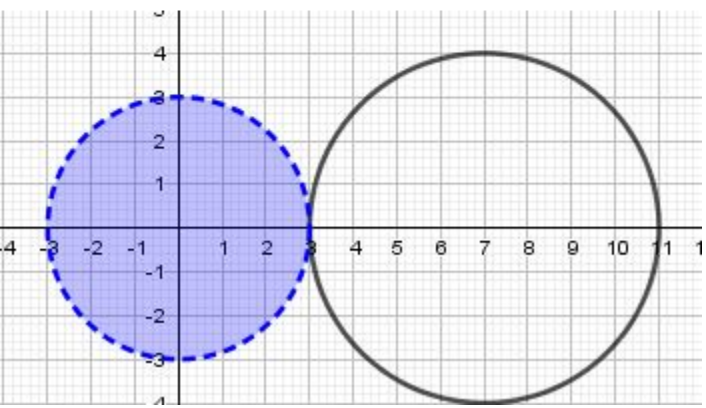
$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-7)^2+y^2=a^2 \\ x^2+y^2<9 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=8 \\ y=-x+a-7 \\ x^2+y^2<9 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-7)^2+y^2=a^2 \\ x^2+y^2<9 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=8 \\ y=-x+a-7. \end{cases} \end{array}\right.$$

2. Из рисунка видно, что система

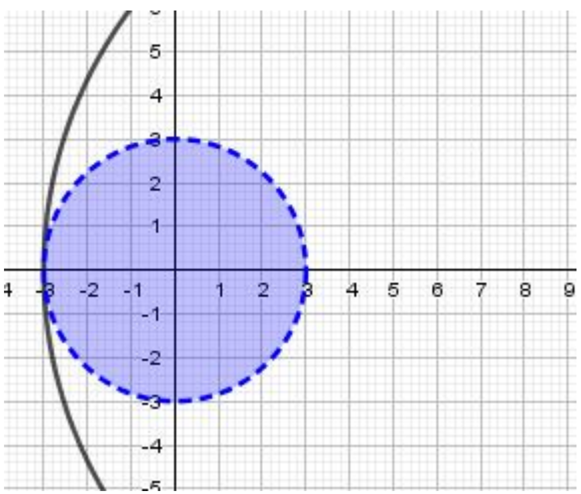
$$\begin{cases} (x-7)^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 < 9 \end{cases}$$

имеет либо бесконечное множество решений, либо вообще не имеет решений.

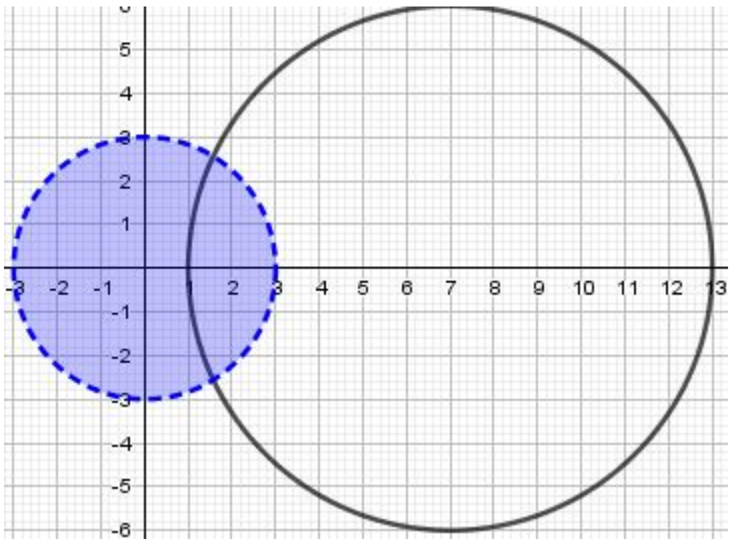
$|a| = 4$



$|a| = 10$



$4 < |a| < 10$



При этом она не имеет решений при

$$\left[\begin{array}{l} |a| \leqslant 4 \\ |a| \geqslant 10 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} -4 \leqslant a \leqslant 4 \\ a \leqslant -10 \\ a \geqslant 10 \end{array}\right. \iff a \in (-\infty; -10] \cup [-4; 4] \cup [10; +\infty).$$

3. Таким образом, необходимо найти значения a при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = -x + a - 7 \\ a \in (-\infty; -10] \cup [-4; 4] \cup [10; +\infty) \end{cases}$$ будет иметь ровно два решения.

4. Найдём условия при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = -x + a - 7 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

$$x^2 + (-x + a - 7)^2 = 8$$
$$x^2 + x^2 - 2(a-7)x + (a-7)^2 - 8 = 0$$
$$2x^2 - 2(a-7)x + (a-7)^2 - 8 = 0.$$

Последнее квадратное уравнение имеет два корня, если

$$D = 4(a-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \big((a-7)^2 - 8\big) > 0$$
$$-4(a-7)^2 + 64 > 0$$
$$(a-7)^2 < 16$$
$$-4 < a - 7 < 4$$
$$3 < a < 11.$$

5. Окончательно,

$$\begin{cases} 3 < a < 11 \\ a \in (-\infty; -10] \cup [-4; 4] \cup [10; +\infty) \end{cases} \iff a \in (3; 4] \cup [10; 11).$$

Ответ: $(3; 4] \cup [10; 11)$.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2+y^2+10x)\cdot\ln\left(\dfrac{4x+3y+a}{50}\right)=0 \\ (x^2+y^2+10x)(x^2+y^2-16x)=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение

1. Данная система равносильна системе

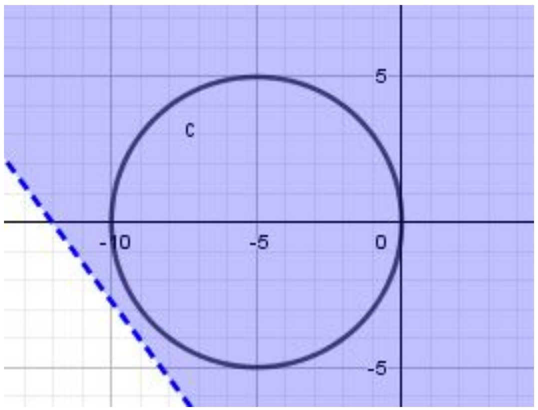
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2+y^2+10x=0 \\ \ln\left(\dfrac{4x+3y+a}{50}\right)=0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2+10x=0 \\ x^2+y^2-16x=0 \end{array}\right. \\ 4x+3y+a>0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} (x+5)^2+y^2=5^2 \\ \begin{cases} 4x+3y+a=50 \\ (x-8)^2+y^2=8^2 \end{cases} \end{array}\right. \\ 4x+3y+a>0 \end{cases}$$

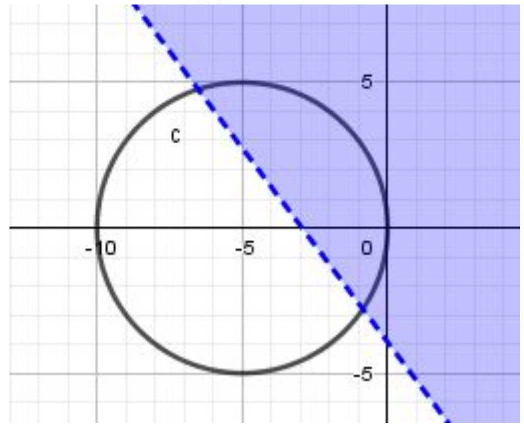
$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+5)^2+y^2=5^2 \\ 4x+3y+a>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x+3y+a=50 \\ (x-8)^2+y^2=8^2 \\ 4x+3y+a>0 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+5)^2+y^2=5^2 \\ 4x+3y+a>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x+3y+a=50 \\ (x-8)^2+y^2=8^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

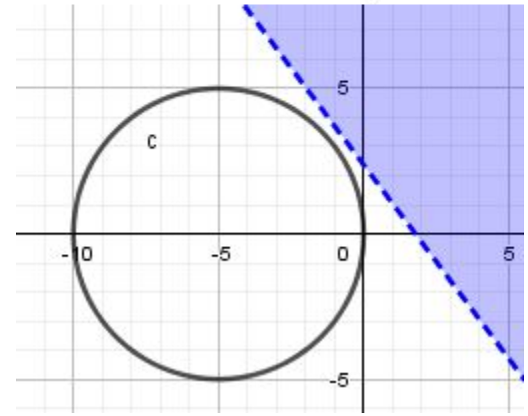
2. Из рисунка видно, что система

$$\begin{cases} (x+5)^2 + y^2 = 5^2 \\ 4x + 3y + a > 0 \end{cases}$$

имеет либо бесконечное множество решений, либо вообще не имеет решений.







Найдём значения a при которых она не имеет решений. Для этого определим сначала при каких a уравнение $(x+5)^2 + \left(-\frac{4}{3}x - \frac{a}{3}\right)^2 = 5^2$ имеет одно решение.

$$\frac{25}{9}x^2 + \left(10 + \frac{8}{9}a\right)x + \frac{a^2}{9} = 0$$

$$25x^2 + (90 + 8a)x + a^2 = 0$$

$$D = (90 + 8a)^2 - 4 \cdot 25a^2 = 8100 + 1440a - 36a^2 = 0$$

$$a_1 = -5, a_2 = 45.$$

Легко видеть, что при $a \leqslant -5$ система $\begin{cases} (x+5)^2 + y^2 = 5^2 \\ 4x + 3y + a > 0 \end{cases}$ не имеет решений.

3. Таким образом, необходимо найти значения a при которых система

$$\begin{cases} 4x + 3y + a = 50 \\ (x-8)^2 + y^2 = 8^2 \\ a \leqslant -5 \end{cases}$$

будет иметь ровно два решения.

4. Найдём условия при которых система $\begin{cases} 4x + 3y + a = 50 \\ (x-8)^2 + y^2 = 8^2 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Из первого уравнения $y = -\dfrac{4}{3}x + b$, где $b = -\dfrac{a}{3} + \dfrac{50}{3}$.

Тогда $(x-8)^2 + \left(-\dfrac{4}{3}x + b\right)^2 - 64 = 0$

$$\frac{25}{9}x^2 - \left(\frac{8}{3}b + 16\right)x + b^2 = 0.$$

Последнее квадратное уравнение имеет два корня, если

$$D = \left(\frac{8}{3}b + 16\right)^2 - 4 \cdot \frac{25}{9}b^2 > 0$$

$$-4b^2 + \frac{256}{3}b + 256 > 0$$

$$b^2 - \frac{64}{3}b - 64 < 0$$

$$-\frac{8}{3} < b < 24$$

$$-\frac{8}{3} < -\frac{a}{3} + \frac{50}{3} < 24$$

$$-22 < a < 58.$$

5. Окончательно, $\begin{cases} -22 < a < 58 \\ a \leqslant -5 \end{cases} \iff a \in (-22; -5].$

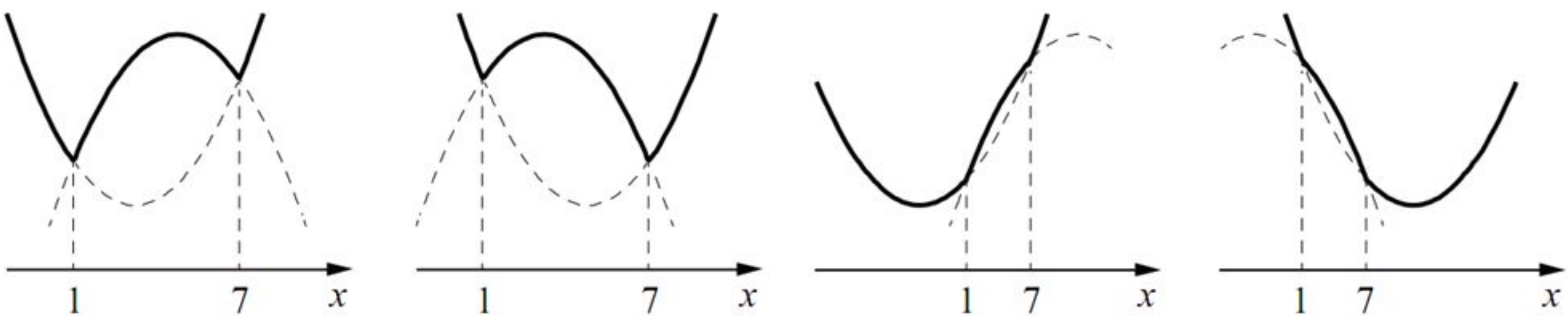
Ответ: $(-22; -5]$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + \left|x^2 - 8x + 7\right|$ больше 1.

Решение. При $x^2 - 8x + 7 \geq 0$: $f(x) = x^2 + 2(a-4)x + 7$, а её график состоит из двух частей параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 4 - a$.

При $x^2 - 8x + 7 < 0$: $f(x) = -x^2 + 2(a+4)x - 7$, а её график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все четыре возможных вида графика функции $f(x)$ показаны на рисунках.



Наименьшее значение функция $f(x)$ может принять только в точках $x=1$, $x=7$ или $x=4-a$. Поэтому наименьшее значение функции $f(x)$ больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1)>1, \\ f(7)>1, \\ f(4-a)>1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a>1, \\ 14a>1, \\ 2a(4-a)+\left|a^2-9\right|>1; \end{cases} \quad \begin{cases} a>\dfrac{1}{2}, \\ 2a^2-8a+1-\left|a^2-9\right|<0. \end{cases}$$

Если $\dfrac{1}{2}<a<3$, то $3a^2-8a-8<0$, откуда $\dfrac{4-\sqrt{40}}{3}<a<\dfrac{4+\sqrt{40}}{3}$. Этот промежуток содержит интервал $\dfrac{1}{2}<a<3$.

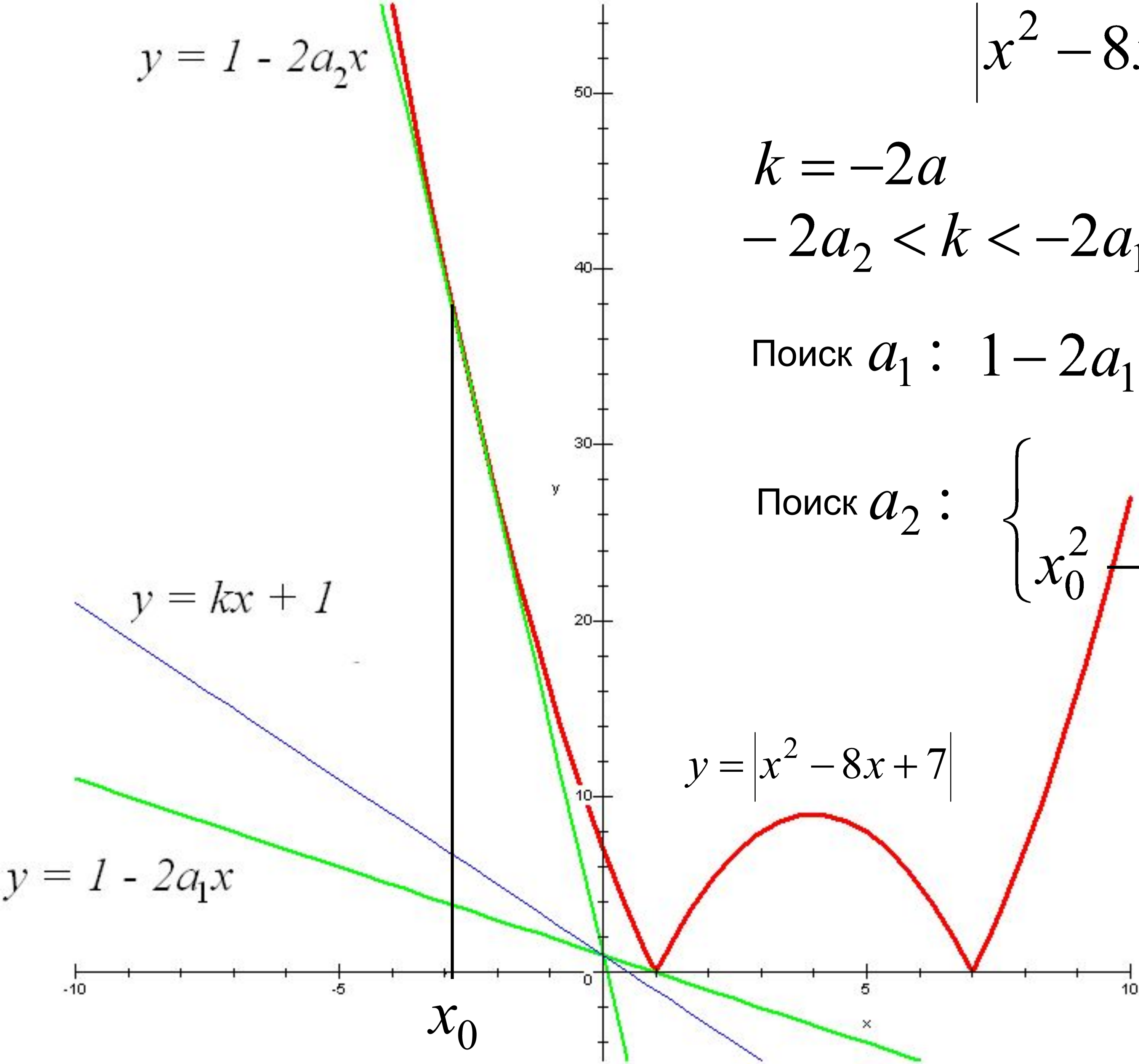
Если $a\ge 3$, то $a^2-8a+10<0$, откуда $4-\sqrt{6}<a<4+\sqrt{6}$. Значит, $3\le a<4+\sqrt{6}$.

Объединяя найденные промежутки, получаем: $\dfrac{1}{2}<a<4+\sqrt{6}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}<a<4+\sqrt{6}$.

Другое решение

Найти все значения a, при каждом из которых $f(x) > 1$ для любого x.



$$|x^2 - 8x + 7| > 1 - 2ax$$

$$k = -2a$$

$$-2a_2 < k < -2a_1 \qquad a_1 < a < a_2$$

Поиск a_1: $1 - 2a_1 \cdot 1 = 0;\ a_1 = \frac{1}{2}$

Поиск a_2: $\begin{cases} 2x_0 - 8 = -2a_2 \\ x_0^2 - 8x_0 + 7 = 1 - 2a_2x_0 \end{cases}$

$$x_0 = -\sqrt{6}$$

$$a_2 = 4 + \sqrt{6}$$

Ответ: $\frac{1}{2} < a < 4 + \sqrt{6}.$