

ГЛАВА I. МЕХАНИКА

§7. Момент импульса.

Закон сохранения момента импульса

О. И. Лубенченко
НИУ МЭИ

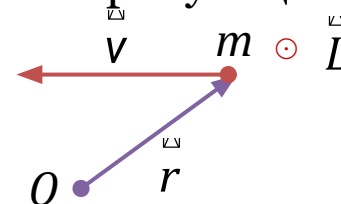
Кафедра физики им. В. А. Фабриканта
2020

I. Момент импульса

Момент импульса — векторная (псевдовекторная) ФВ, характеризующая инертность тела в движении.

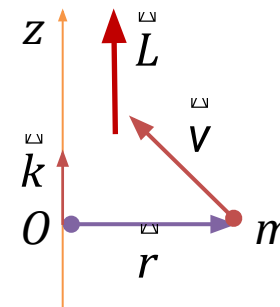
1. Момент импульса МТ относительно точки:

$$\vec{L} = [\vec{r} \vec{p}]$$



2. Момент импульса МТ относительно оси:

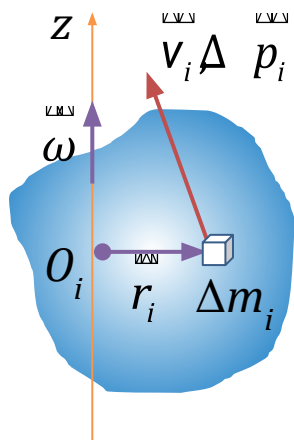
$$\vec{L} = [\vec{r} \vec{p}]_z \vec{k}$$



3. Момент импульса механической системы (относительно точки или оси):

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i$$

4. Момент импульса ТТ, вращающегося вокруг неподвижной оси



$$\Delta L_i = [r_i, \Delta p_i]$$

$$\vec{L} = \sum \Delta L_i = \sum [r_i, \Delta p_i] = \sum [r_i, \Delta m_i v_i] = \sum [r_i, \Delta m_i [\omega \times r_i]] =$$

$$= \sum \Delta m_i \{ r_i^2 \omega - \omega r_i^2 \} = \sum \Delta m_i r_i^2 \omega = I \omega$$

5. Момент импульса ТТ, совершающего плоское движение:

$$L = [r_C P] + L_C$$

Доказательство

$$\vec{L} = \sum \Delta L_i = \sum [r_i, \Delta p_i] = \sum [r_i, \Delta m_i v_i]$$

$$L_C = I_C \omega$$

$$p_i = r_C + r_i \implies v_i = v_C + u_i \quad \omega \rho = \frac{d}{dt} \rho = \dots$$

M — масса тела

$$\begin{aligned}
 \vec{p} &= \sum m \left[\vec{r}_c + \vec{u}_i \Delta t \quad \left(\vec{v}_c + \vec{m}_i \right) \right] \vec{r} = \sum \Delta m \left\{ \left[\vec{u}_c \vec{v}_c \right] \rho + \left[\vec{r}_c \vec{v}_c \right] \rho + \left[\vec{u}_i \vec{v}_c \right] + \left[\vec{r}_i \vec{v}_i \right] \right\} = \\
 &= \left[\vec{p}_c \vec{v}_c \right] \sum \Delta m_i \rho + \left[\vec{r}_c \sum \Delta m_i \vec{u}_i \right] + \left[\sum \Delta m_i \vec{r}_i \vec{v}_c \right] + \sum \left[\vec{r}_i \vec{v}_i \right] = \\
 &= \left[\vec{r}_c \Delta M \vec{v}_c \right] + \left[\vec{r}_c \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right] + \sum \Delta m_i \left[\vec{r}_i \vec{v}_i \right] = \\
 &= \left[\vec{p}_c P \right] + \left[\vec{r}_c \frac{d}{dt} \left(\sum m_i \vec{r}_i \right) \right] + \omega \sum m_i \rho_i^2 = \left[\vec{r}_c P \right] + I \omega = \left[\vec{r}_c \right] + c
 \end{aligned}$$

II. Закон сохранения момента импульса

$$\frac{dL}{dt} = M^e$$

Если система замкнута, то $\frac{dL}{dt} = 0 \longrightarrow \boxed{L = \text{const}}$

Закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы относительно любой неподвижной оси или точки не изменяется с течением времени.

§7. Закон сохранения момента импульса

Условия сохранения момента импульса механической системы

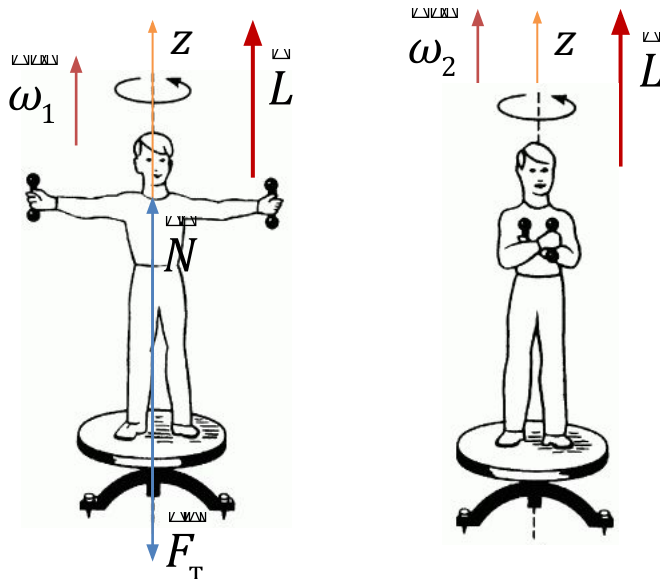
1. Моменты внешних сил скомпенсированы: $\sum \vec{M}^e = 0$
2. Движение системы рассматривается в течение короткого промежутка времени Δt , при этом $M^i \gg M^e$.

ПРИМЕР

Скамья Жуковского

Скамья Жуковского — диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси — оси симметрии — почти без трения. На скамье может стоять (или сидеть) человек и выполнять различные действия.

Опыт 1



$$\vec{L} = \text{const} \quad \leftarrow \sum \vec{M}^e = 0$$

$$\vec{L}_1 = I_1 \vec{\omega}_1 \quad \vec{L}_2 = I_2 \vec{\omega}_2$$

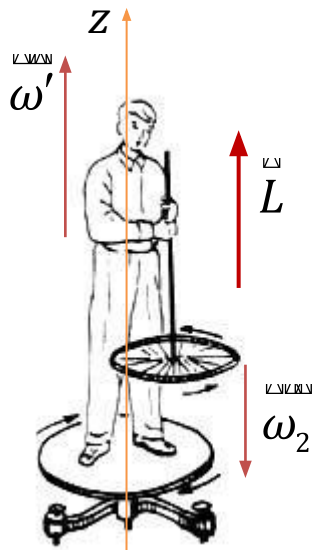
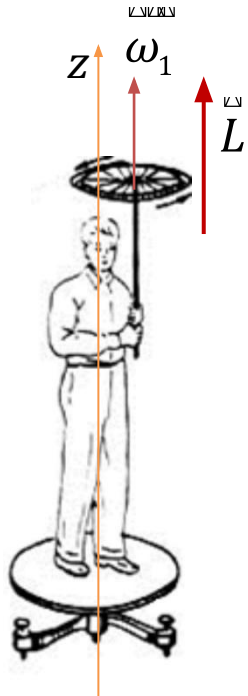
$$\vec{\omega}_1 \neq \vec{\omega}_2$$

$$\omega: I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1$$

§7. Закон сохранения момента импульса

Опыт 2



$$L = \text{const} \leftarrow \sum M^e = 0$$

$$L_1 = I_1 \omega_1 \quad L_2 = I_1 \omega_2 + I_2 \omega_2'$$

$$L_1 \neq L_2 \neq L_2'$$

$$\text{т.е. } I_1 \omega_1 = I_1 \omega_2 + I_2 \omega_2'$$

$$\omega_2' = \frac{2L_1}{I_2}$$