

# ГЛАВА I. МЕХАНИКА

## §7. Момент импульса.

### Закон сохранения момента импульса

**О. И. Лубенченко**  
**НИУ МЭИ**

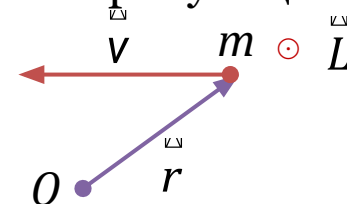
**Кафедра физики им. В. А. Фабриканта**  
**2020**

## I. Момент импульса

**Момент импульса** — векторная (псевдовекторная) ФВ, характеризующая инертность тела в движении.

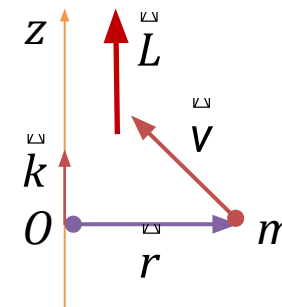
1. Момент импульса МТ относительно точки:

$$L = [rp]$$



2. Момент импульса МТ относительно оси:

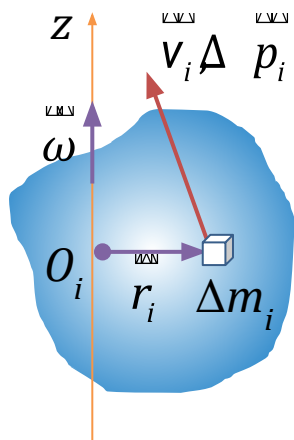
$$L = [rp]_z k$$



3. Момент импульса механической системы (относительно точки или оси):

$$L = \sum L_i$$

## 4. Момент импульса ТТ, вращающегося вокруг неподвижной оси



$$\Delta L_i = [r_i, \Delta p_i]$$

$$\vec{L} = \sum \Delta L_i = \sum [r_i, \Delta p_i] = \sum [r_i, \Delta m_i v_i] = \sum [r_i, \Delta m_i [\omega \times r_i]] =$$

$$= \sum \Delta m_i \{ r_i^2 \omega - \omega r_i^2 \} = \sum \Delta m_i r_i^2 \omega = I \omega$$

## 5. Момент импульса ТТ, совершающего плоское движение:

$$L = [r_C P] + L_C$$

*Доказательство*

$$L = \sum \Delta L_i = \sum [r_i, \Delta p_i] = \sum [r_i, \Delta m_i v_i]$$

$$p_i = r_C + r_i \implies v_i = v_C + u_i$$

$$u_i = \omega \times r_i = \frac{d}{dt} [r_i \times \omega]$$

$$L_C = I_C \omega$$

$M$  — масса тела

$$\begin{aligned}
 \vec{p} &= \sum m \left[ \vec{r}_c + \vec{u}_i \Delta t \right] \left( \vec{v}_c + \vec{m}_i \right) = \sum \Delta m \left\{ \left[ \vec{u}_c \vec{v}_c \right] + \left[ \vec{r}_c \vec{u}_i \right] + \left[ \vec{u}_i \vec{v}_c \right] + \left[ \vec{r}_i \vec{u}_i \right] \right\} = \\
 &= \left[ \vec{p}_c \vec{v}_c \right] \sum \Delta m_i + \left[ \vec{r}_c \sum \Delta m_i \vec{u}_i \right] + \left[ \sum \Delta m_i \vec{r}_i \vec{v}_c \right] + \sum \left[ \vec{r}_i \vec{u}_i \right] = \\
 &= \left[ \vec{r}_c \Delta M \vec{v}_c \right] + \left[ \vec{r}_c \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right] + \sum \Delta m_i \left[ \vec{r}_i \vec{\omega} \rho_i^2 \right] = \\
 &= \left[ \vec{p}_c P \right] + \left[ \vec{r}_c \frac{d}{dt} \left( \sum m_i \vec{r}_i \right) \right] + \omega \sum m_i \rho_i^2 = \left[ \vec{r}_c P \right] + I \omega = \left[ \vec{L}_c \right] + \vec{L}
 \end{aligned}$$

## II. Закон сохранения момента импульса

$$\frac{dL}{dt} = M_e$$

Если система замкнута, то  $\frac{dL}{dt} = 0 \longrightarrow \boxed{L = \text{const}}$

**Закон сохранения момента импульса:** момент импульса замкнутой системы относительно любой неподвижной оси или точки не изменяется с течением времени.

# §7. Закон сохранения момента импульса

## Условия сохранения момента импульса механической системы

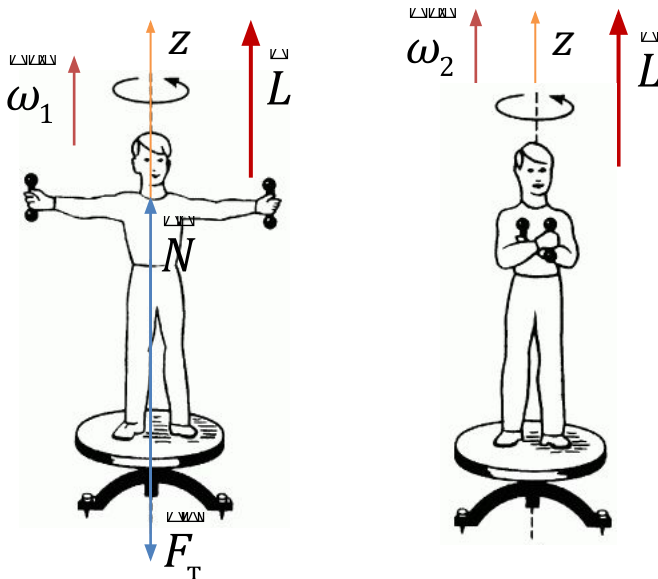
1. Моменты внешних сил скомпенсированы:  $\sum M^e = 0$
2. Движение системы рассматривается в течение короткого промежутка времени  $\Delta t$ , при этом  $M^i \gg M^e$ .

### ПРИМЕР

#### Скамья Жуковского

*Скамья Жуковского* — диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси — оси симметрии — почти без трения. На скамье может стоять (или сидеть) человек и выполнять различные действия.

#### Опыт 1



$$\vec{L} = \text{const} \quad \leftarrow \sum M^e = 0$$

$$L_1 = I_1 \omega_1 \quad L_2 = I_2 \omega_2$$

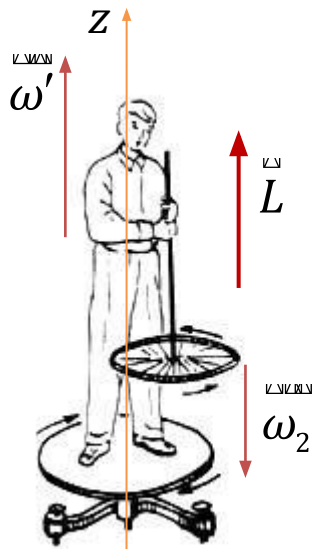
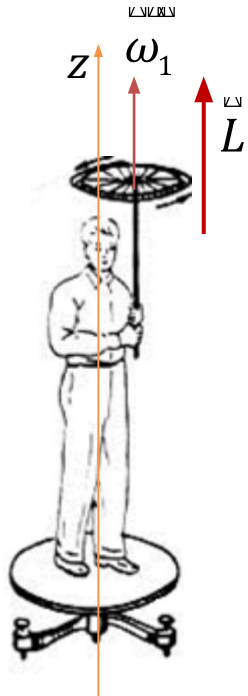
$$\omega_1 \neq \omega_2$$

$$\omega: I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{I_1 \omega_1}{I_2}$$

# §7. Закон сохранения момента импульса

## Опыт 2



$$L = \text{const} \leftarrow \sum M^e = 0$$

$$L_1 = I_1 \omega_1 \quad L_2 = I_2 \omega_2 + I_2 \omega_2'$$

$$L_1 \neq L_2 + L_2'$$

$$\text{т.е. } I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 + I_2 \omega_2'$$

$$\omega_2' = \frac{2L_1}{I_2}$$