Экономические задачи

КЛАСТЕР 2017

1. (ЕГЭ, 2016) В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн рублей. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остаётся равным 4,2 млн рублей;
- суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r , если долг выплачен полностью и общие выплаты составили 6,1 млн рублей.

1] Решение

Так в 2017, 2018, 2019 долг остаётся равным 4,2 млн руб, значит платим в эти годы только проценты т.е. $\frac{4,2}{100} \cdot r$.

За 2020 и 2021 равными выплатами долг был погашен, т.е.

$$\left(4,2 \cdot \left(\frac{100+r}{100}\right) - x\right) \cdot \frac{100+r}{100} - x = 0.$$

Общие суммы выплат составили 6,1 млн руб.

$$\frac{4,2}{100} \cdot r \cdot 3 + 2 \cdot x = 6,1.$$

Сложим систему:

$$\begin{cases} \left(4,2 \left(1 + \frac{r}{100}\right) - x\right) \left(1 + \frac{r}{100}\right) - x = 0 \\ \frac{4,2}{100} \cdot r \cdot 3 + 2 \cdot x = 6,1 \end{cases}$$

Ответ: $r = 10\%$.

2. (ЕГЭ, 2016) Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме того, в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

12] Решение

Пусть V - первоначальный вклад.

Составим неравенство согласно условию задачи

$$\left((V \cdot 1,1^2 + 3) \cdot 1,1 + 3 \right) \cdot 1,1 < 25$$

$$V \cdot 1,1^4 < 18,07$$

$$V < 12,34$$

Ответ: 12 млн. руб.

3. (МИОО, 2016) Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 10 млн.

3] Решение.

Пусть V - сумма кредита.

Так за первые три года заёмщик выплачивает только проценты, то суммы выплат за это время составили:

$$\frac{V}{100} \cdot 20 \cdot 3$$

По условию задачи заёмщик за 4 и 5 год равными платежами выплачивает весь долг полностью.

$$(V \cdot (1,2) - x) \cdot 1,2 - x = 0$$

Получим систему:

$$\begin{cases} (V \cdot 1,2 - x) \cdot 1,2 - x = 0 \\ \frac{V}{100} \cdot 20 \cdot 3 + 2x > 10 \end{cases}$$

$$V > 5 \frac{5}{21}$$

Ответ: 6 млн руб.

4. (МИОО, 2016) По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: **целое** число n млн рублей в первый и второй годы, а также **целое** число m млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m , при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

141 Решение.

Пусть n -млн руб вложим в первые два года, m -млн руб - в 3^й и 4^й года.

Составим систему неравенств:

$$\begin{cases} (10 \cdot 1,15 + n) \cdot 1,15 + n \geq 20 \\ (((10 \cdot 1,15 + n) \cdot 1,15 + n) \cdot 1,15 + m) \cdot 1,15 + m \geq 30 \end{cases}$$

$$n \geq 3 \frac{13}{86} \quad (\text{т.к. по условию } n \in \mathbb{Z} \text{ и наименьшее, то, } n = 4)$$

$$m \geq 0,53 \Rightarrow m = 1$$

Ответ: $n = 4$ млн руб. $m = 1$ млн руб.

5. (МИОО, 2016) По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект **целое** число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 10 млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 150 млн рублей, а за четыре года станут больше 250 млн рублей.

157 Решение.

Пусть V - первоначальная вклад.

$$\begin{cases} (V \cdot 1,2 + 20) \cdot 1,2 + 20 > 150 \\ (((V \cdot 1,2 + 20) \cdot 1,2 + 20) \cdot 1,2 + 10) \cdot 1,2 + 10 > 250 \end{cases}$$

Ответ: $V = 80$ млн руб.

6. (МИОО, 2016) По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 5% в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n , при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

16] Пусть V — вклады «А» и «Б».
Составим неравенство согласно условию задачи.

$$V \cdot 1,1^3 < V \cdot 1,05 \cdot \left(\frac{100+n}{100}\right)^2$$

$$n > 12,6$$

Ответ: 13%

7. (МИОО, 2015) По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает на 11% в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

17 Пусть V — вклада «А» и «Б»
Составим неравенство согласно условию задачи.

$$V \cdot 1,1^3 < V \cdot 1,11^2 \cdot \left(\frac{100+n}{100}\right)$$

$$n > 8,03$$

Ответ: 9%

8. (ЕГЭ, 2015) В июле планируется взять кредит на сумму 8052000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?

18 Решение.

Пусть x - платеж. Составим уравнение согласно условию задачи.

$$\left(\left(\left(8052000 \cdot 1,2 - x\right) \cdot 1,2 - x\right) \cdot 1,2 - x\right) \cdot 1,2 - x = 0$$

Ответ: 3110400

9. (ЕГЭ, 2015) В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 2,16 млн рублей.

Сколько млн рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

19 | Решение

Пусть V - кредит. (в млн руб.)

Составим уравнение

$$\left((V \cdot 1,2 - 2,16) \cdot 1,2 - 2,16 \right) \cdot 1,2 - 2,16 = 0$$

Ответ: 4,55 млн руб.

10. (ЕГЭ, 2015) В июле планируется взять кредит в банке на сумму 100000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $a\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Найдите число a , если известно, что кредит был полностью погашен за два года, причём в первый год было переведено 55000 рублей, а во второй — 69000 рублей.

10 Решение.

$$\left(100000 \cdot \left(1 + \frac{a}{100}\right) - 55000\right) \cdot \left(1 + \frac{a}{100}\right) - 69000 = 0$$

$$1 + \frac{a}{100} = t$$

$$(100t - 55)t - 69 = 0$$

$$100t^2 - 55t - 69 = 0$$

$$t = \frac{23}{20}, \quad a = 15.$$

Ответ: 15%

11. (ЕГЭ, 2015) В июле планируется взять кредит на сумму 4026000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом прошлого года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года) по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

11. Решение.

Пусть x руб. — единовременный платеж, если будет 4 платежа, y руб. — единовременный платеж, если будет 2 платежа.

$$\begin{cases} ((4026000 \cdot 1,2 - x) \cdot 1,2 - x) \cdot 1,2 - x = 0 \\ (4026000 \cdot 1,2 - y) \cdot 1,2 - y = 0 \end{cases}$$

$$x = 1555200, \quad y = 2635200$$

$$4x - 2y = 950400$$

Ответ. 950400 руб.

12. (ЕГЭ, 2015) В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на 5 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

12

Решение

$$V = 10 \text{ млн руб} \quad P = 10\% \text{ (ставка банка)}$$

$$n = 5 \text{ лет (срок кредитования)}$$

Для того чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину, то мы выплачиваем „основной платеж“ + % банка

$$1 \quad V \cdot 1,1 - \left(\frac{V}{5} + 0,1V \right) = \frac{4}{5}V$$

$$2 \quad \frac{4}{5}V \cdot 1,1 - \left(\frac{V}{5} + 0,1 \cdot \left(\frac{4}{5}V \right) \right) = \frac{3}{5}V$$

$$3 \quad \frac{3}{5}V \cdot 1,1 - \left(\frac{V}{5} + 0,1 \cdot \left(\frac{3}{5}V \right) \right) = \frac{2}{5}V$$

$$4 \quad \frac{2}{5}V \cdot 1,1 - \left(\frac{V}{5} + 0,1 \cdot \left(\frac{2}{5}V \right) \right) = \frac{1}{5}V$$

$$5 \quad \frac{1}{5}V \cdot 1,1 - \left(\frac{V}{5} + 0,1 \cdot \left(\frac{1}{5}V \right) \right) = 0$$

$$\text{Общая сумма выплат. } \left(\frac{V}{5} + 0,1V \right) + \left(\frac{V}{5} + 0,1 \cdot \left(\frac{4}{5}V \right) \right) + \left(\frac{V}{5} + 0,1 \cdot \left(\frac{3}{5}V \right) \right) +$$

$$+ \left(\frac{V}{5} + 0,1 \cdot \left(\frac{2}{5}V \right) \right) + \left(\frac{V}{5} + 0,1 \cdot \left(\frac{1}{5}V \right) \right) = V + 0,1 \cdot V \left(1 + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \right) =$$

$$= V + 0,3V = 1,3V$$

$$\text{т.к. } V = 10 \text{ млн руб, то } S = 13 \text{ млн руб.}$$

Ответ. 13 млн руб

13. (ЕГЭ, 2015) В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 1,8 млн рублей?

13

Решение

$$V = 6 \text{ млн руб} \quad p = 20\% \quad n = ?$$

Наибольший годовой платёж по кредиту будет в первый год кредитования

$$\frac{V}{n} + 0,2V \leq 1,8, \quad \frac{6}{n} + 0,2 \cdot 6 \leq 1,8$$

$$n \geq 10$$

Ответ: 10 лет.

14. (ЕГЭ, 2015) В июле планируется взять кредит в банке на сумму 20 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 47 млн рублей?

14 Решение $V = 20 \text{ млн руб}$ $p = 30\%$ $n = ?$
 $S = 47 \text{ млн руб}$ (общая сумма выплат)

$$1) \quad V \cdot 1,3 - \left(\frac{V}{n} + 0,3V \right) = \frac{n-1}{n} V$$

$$2) \quad \frac{n-1}{n} V \cdot 1,3 - \left(\frac{V}{n} + 0,3 \cdot \frac{n-1}{n} V \right) = \frac{n-2}{n} V$$

$$n) \quad \frac{1}{n} V \cdot 1,3 - \left(\frac{V}{n} + 0,3 \cdot \frac{1}{n} V \right) = 0$$

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{V}{n} + 0,3V \right) + \left(\frac{V}{n} + 0,3 \cdot \frac{n-1}{n} V \right) + \dots + \left(\frac{V}{n} + 0,3 \cdot \frac{1}{n} V \right) = \\ &= \frac{V}{n} \cdot n + 0,3V \left(1 + \frac{n-1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right) = V + \frac{3V}{10} \cdot \left(\frac{\frac{n+1}{2} \cdot n}{n} \right) = \\ &= V + \frac{3 \cdot (n+1)}{20} V \end{aligned}$$

$$20 + \frac{3 \cdot (n+1)}{20} \cdot 20 = 47, \quad n = 8$$

Ответ: 8 лет

19. (ЕГЭ, 2015) Зависимость объёма Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 15000 - P$, $1000 \leq P \leq 15000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5000000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство.

Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 20%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

19 | Решение

$$Q = 15000 - P, \quad P \in [1000, 15000]$$

$$S = PQ - (3000Q + 5000000)$$

$$S = -P^2 + 15000P - 45000000 + 3000P - 5000000$$

$$S = -P^2 + 18000P - 50000000 \quad \text{— чистая прибыль}$$

$$S(p) = S(0,8p) \quad S(p) = -(p-9000)^2 + 31000000$$

$$-(p-9000)^2 + 31000000 = -(0,8p-5000)^2 + 31000000$$

$$(p-9000)^2 - (0,8p-5000)^2 = 0$$

$$0,2p \cdot (3,8p - 18000) = 0 \quad \begin{array}{l} p = 0 \text{ (не удовл)} \\ p = 1000 \end{array}$$

$$S_{\text{макс}} = 31000000 \text{ при } p = 11250$$

Значит цену $p=1000$ надо увеличить на 12,5%

Ответ: 12,5%

20. (ЕГЭ, 2015) Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

1201 Решение.

$$S = px - (\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6) \rightarrow \text{наибол. прибыль}$$

$$S = -\frac{1}{2}x^2 - (2-p)x - 6, \quad x_0 = p-2$$

$$S_{\text{наибол}} = -\frac{(p-2)^2}{2} + (p-2)^2 - 6 = \frac{1}{2}(p-2)^2 - 6 > 0$$

$$\frac{78}{\frac{1}{2}(p-2)^2 - 6} \leq 3, \quad \frac{1}{2}(p-2)^2 - 6 \geq 26, \quad (p-2)^2 \geq 64$$

$$p_{\min} = 10$$

Ответ. 10

21. (ЕГЭ, 2015) Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

21) Решение

	часы	товаро
I завод	x^2	$2x$
II завод	y^2	$5y$

$$\begin{cases} 2x + 5y = 580 \\ S = 500(x^2 + y^2) \rightarrow \min \end{cases}$$

$$x = 290 - \frac{5}{2}y$$

$$S = 500 \left(\left(290 - \frac{5}{2}y \right)^2 + y^2 \right)$$

$$S = 500 \left(\frac{25}{4}y^2 - 1450y + 290^2 \right)$$

$$y_0 = \frac{1450}{2 \cdot \frac{25}{4}} = 100$$

$$x_0 = 40$$

$$S = 500(100^2 + 40^2) = 5800000$$

Ответ: 58000000 руб

24. (МИОО, 2015) Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

24 Решение

Для того, чтобы Алексей получил наибольшую прибыль ему надо продать ценную бумагу когда проценты по счёту будут больше 2 тыс руб. Пусть n -кол-во лет Алексей держит ценную бумагу

$$(7000 + 2000 \cdot (n - 1)) \cdot 0,1 \geq 2000$$

$$n \geq 7,5$$

В течение восьмого года Алексей должен продать ценную бумагу

Ответ. В течение 8 года

25. (МИОО, 2015) Оля хочет взять в кредит 100 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24000 рублей?

25 Решение.

Оля вынуждена брать кредит быстрее, если будет выплачивать наибольшую сумму т.е. 24000 руб

$$1) 100000 \cdot 1,1 - 24000 = 86000$$

$$2) 86000 \cdot 1,1 - 24000 = 70600$$

$$3) 70600 \cdot 1,1 - 24000 = 53660$$

$$4) 53660 \cdot 1,1 - 24000 = 35026$$

$$5) 35026 \cdot 1,1 - 24000 = 14528,6 < 24000$$

Ответ: 6 лет

Спасиб
о.