

§3. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 1. Пусть функция $f : [a; b] \rightarrow R$ непрерывна и $\Phi : [a; b] \rightarrow R$ — её первообразная. Тогда

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказательство: Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a; b].$$

По теореме 2 §2 эта функция так же является первообразной для функции f на $[a; b]$. Следовательно,

$$F(x) - \Phi(x) = \gamma = const \text{ на } [a; b].$$

Поэтому

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) = F(b) - F(a) = (\Phi(b) + \gamma) - (\Phi(a) + \gamma) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

□

Теорему 1 можно усилить следующим образом:

Теорема 2. Пусть функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема в смысле Римана, $\Phi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывна и $\Phi'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$ кроме, может быть, конечного числа точек.

$$\text{Тогда } \int_a^b f(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a).$$

§4. Интеграл по ориентированному промежутку

Определение. Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Тогда по определению

$$\int_a^b f(t) dt := \int_{(a;b)} f d\mu$$

$$\int_b^a f(t) dt := - \int_a^b f(t) dt$$

$$\int_{\{a\}} f(t) dt = \int_a^a f(t) dt = \int_{\{a\}} f d\mu.$$

Перечислим основные свойства интеграла по ориентированному промежутку. Все они легко следуют из определения интеграла Лебега по мере Лебега. (Доказать самим подробно!)

Теорема 1. (О линейности)

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ или $-\infty \leq b \leq a \leq +\infty$.

Пусть существуют и конечны интегралы $\int_a^b f(t) dt$, $\int_a^b g(t) dt$

(то есть функции f и g суммируемы на промежутке с концами

a , b). Тогда $\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t) dt$ конечен и справедливо равен-

СТВО:
$$\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt.$$

Теорема 2. (Об оценке интеграла)

Если функция f суммируема на промежутке с концами a, b , то

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left| \int_a^b |f(t)| dt \right|.$$

Теорема 3. (Аддитивность интеграла)

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ и функция f суммируема на нем.

Пусть $a, b, c \in \bar{I}$. Тогда

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Теорема 4.

О непрерывности по верхнему (нижнему) пределу

Теорема 5 (о дифференцируемости интеграла по верхнему (нижнему) пределу)

Сформулировать и доказать самим!

§5. Вычисление интеграла Лебега

Теорема 1 (о замене переменного)

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$ – промежутки. $\varphi: A \rightarrow B$ – непрерывно дифференцируемая функция, $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывна.

$a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $\alpha, \beta \in A$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Доказательство.

Заметим, что оба интеграла существуют в смысле Римана, т.к. под интегралами непрерывные функции. Если $\Phi: B \rightarrow \mathbb{R}$ – первообразная для f , то $\Phi \circ \varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$ – первообразная для $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, поскольку

$$(\Phi(\varphi(t)))' = \Phi'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

По формуле Ньютона-Лейбница получаем

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)dx = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta g(t)dt. \quad \square$$

(Примеры приведем на лекции, оставьте место 😊)

Теорема 2 (интегрирование по частям в определенном интеграле)

Пусть $u, v: [a; b] \rightarrow R$ – непрерывно дифференцируемы.

Тогда

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

кратко $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$

Доказательство. $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$, причем оба слагаемых в правой части равенства непрерывны на $[a; b]$.

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b v'(x)u(x)dx = \left| \text{по формуле Н - Л} \right| = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

□

(Примеры приведем на лекции).

§5. Теоремы о среднем

Теорема 1. (Первая теорема о среднем для пространства с мерой)

Пусть (S, Σ, μ) пространство с неотрицательной мерой, $A \in \Sigma$, $f, g \in L(\mu, A)$. Пусть еще функция f на множестве A ограничена, а функция g неотрицательна.

Тогда существует $\gamma \in [m, M]$, где $m = \inf_{t \in A} f(t)$, $M = \sup_{t \in A} f(t)$

такое, что

$$\int_A f(t)g(t)d\mu(t) = \gamma \int_A g(t)d\mu(t). \quad (1)$$

Доказательство. Поскольку $g(t) \geq 0$, то $\forall t \in A$:

$$mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t). \quad (2)$$

Функция $f \cdot g$ измерима (как произведение измеримых функций). Из (2) имеем

$$m \int_A g(t) d\mu(t) \leq \int_A fg d\mu \leq M \int_A g d\mu \quad (3)$$

(см. теорему о монотонности интеграла).

Отсюда и из условия $g \in L(\mu, A)$ следует, что $fg \in L(\mu, A)$.

Если $\int_A g d\mu = 0$, то по (3) будет $\int_A fg d\mu = 0$ и искомое равенство (1) верно для всех t .

Если же $\int_A g d\mu > 0$, то для $\gamma = \frac{\int_A fg d\mu}{\int_A g d\mu} = 0$ из (3) получим

$m \leq \gamma \leq M$ и теперь из определения γ имеем (1). \square

Теорема 2. (Первая теорема о среднем для сегмента)

Пусть функция $f : [a; b] \rightarrow R$ — непрерывна, функция

$$g : [a; b] \rightarrow \begin{cases} [0; +\infty] \\ [-\infty; 0] \end{cases} \text{ суммируема по Лебегу.}$$

Тогда существует $\xi \in (a; b)$ такое, что

$$\int_a^b f(t) \cdot g(t) dt = f(\xi) \int_a^b g(t) dt .$$

Доказательство. Для определенности будем считать, что $g : [a; b] \rightarrow [0; +\infty]$. Из непрерывности функции f (см. замечание §1) очевидным образом вытекает, что функция f суммируема. Функция $f \cdot g$, очевидно, измерима. Покажем, что функция $f \cdot g$ суммируема на $[a; b]$. Действительно, для $m = \min_{[a; b]} f(t)$, $M = \max_{[a; b]} f(t)$ мы получим $m \cdot g \leq f \cdot g \leq M \cdot g$.

Отсюда и из теоремы о монотонности интеграла получим

$$m \int_a^b g dt \leq \int_a^b fg dt \leq M \int_a^b g dt.$$

Значит, $\int_a^b fg dt \in R$, то есть $fg \in L[\mu, [a; b]]$.

По теореме 1 существует γ , $m \leq \gamma \leq M$, такое, что

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = \gamma \int_a^b g(t)dt.$$

По теореме о промежуточных значениях непрерывной функции существует $\xi \in [a; b]$ такое, что $f(\xi) = \gamma$, и, таким образом,

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(\xi) \int_a^b g(t)dt. \quad \square \quad (*)$$