§3. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 1. Пусть функция $f:[a;b]\to R$ непрерывна и $\Phi:[a;b]\to R$ — её первообразная. Тогда

$$\int_a^b f(t)dt=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Доказательство: Рассмотрим функцию

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,\ x\in[a;b].$$

По теореме 2 §2 эта функция так же является первообразной для функции f на $[a;b]$. Следовательно,

$$F(x)-\Phi(x)=\gamma=const \text{ на } [a;b].$$

Поэтому

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)=F(b)-F(a)=(\Phi(b)+\gamma)-(\Phi(a)+\gamma)=\Phi(b)-\Phi(a)$$

□

Теорему 1 можно усилить следующим образом:

Теорема 2. Пусть функция $f:[a,b]\to R$ интегрируема в смысле Римана, $\Phi:[a;b]\to R$ — непрерывна и $\Phi'(x)=f(x)$ для всех $x\in[a,b]$ кроме, может быть, конечного числа точек.

Тогда $\int\limits_a^b f(t)dt=\Phi(b)-\Phi(a)$.

§4. Интеграл по ориентированному промежутку

Определение. Пусть $-\infty\le a<b\le+\infty$. Тогда по определению

$$\int\limits_a^b f(t)dt:=\int\limits_{(a;b)} f\,d\mu$$

$$\int\limits_b^a f(t)dt:=-\int\limits_a^b f(t)\,dt$$

$$\int\limits_{\{a\}} f(t)dt=\int\limits_a^a f(t)dt=\int\limits_{\{a\}} f\,d\mu.$$

Перечислим основные свойства интеграла по ориентированному промежутку. Все они легко следуют из определения интеграла Лебега по мере Лебега. (Доказать самим подробно!)

Теорема 1. (О линейности)

Пусть $\alpha, \beta \in R$, $-\infty \le a \le b \le +\infty$ или $-\infty \le b \le a \le +\infty$.

Пусть существуют и конечны интегралы $\int_a^b f(t)\,dt$, $\int_a^b g(t)\,dt$ (то есть функции f и g суммируемы на промежутке с концами a, b). Тогда $\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)\,dt$ конечен и справедливо равенство: $\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$.

Теорема 2. (Об оценке интеграла)

Если функция f суммируема на промежутке с концами a, b, то

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \left|\int_a^b |f(t)|\,dt\right|.$$

Теорема 3. (Аддитивность интеграла)

Пусть $I \subset R$ и функция f суммируема на нем.

Пусть $a, b, c \in \overline{I}$. Тогда

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Теорема 4.
О непрерывности по верхнему (нижнему) пределу

Теорема 5 (о дифференцируемости интеграла по верхнему (нижнему) пределу
Сформулировать и доказать самим!

§5. Вычисление интеграла Лебега

Теорема 1 (о замене переменного)

Пусть $A, B \subset R$ – промежутки. $\varphi : A \to B$ – непрерывно дифференцируемая функция, $f : B \to R$ – непрерывна.

$a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta), \quad \alpha, \beta \in A$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Доказательство.

Заметим, что оба интеграла существуют в смысле Римана, т.к. под интегралами непрерывные функции. Если $\Phi : B \to R$ – первообразная для f, то $\Phi \circ \varphi : A \to R$ – первообразная для $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, поскольку

$$\left(\Phi\left(\varphi(t)\right)\right)' = \Phi'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

По формуле Ньютона-Лейбница получаем

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \int\limits_\alpha^\beta g(t)dt. \ \square$$

(Примеры приведем на лекции, оставьте место ☺)

Теорема 2 (интегрирование по частям в определенном интеграле)

Пусть $u, v : [a;b] \to R$ – непрерывно дифференцируемы.

Тогда
$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

кратко $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$

Доказательство. $\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$, причем оба слагаемых в правой части равенства непрерывны на $[a;b]$.

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b v'(x)u(x)dx = \left|\text{по формуле } H - Л\right| = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

□

(Примеры приведем на лекции).

§5. Теоремы о среднем

Теорема 1. (Первая теорема о среднем для пространства с мерой)

Пусть (S,Σ,μ) пространство с неотрицательной мерой, $A\in\Sigma$, $f,g\in L(\mu,A)$. Пусть еще функция f на множестве А ограничена, а функция g неотрицательна.

Тогда существует $\gamma\in[m,M]$, где $m=\inf\limits_{t\in A} f(t), M=\sup\limits_{t\in A} f(t)$ такое, что

$$\int\limits_A f(t)g(t)d\mu(t)=\gamma\int\limits_A g(t)d\mu(t). \qquad (1)$$

Доказательство. Поскольку $g(t)\geq 0$, то $\forall t\in A$:

$$mg(t)\leq f(t)g(t)\leq Mg(t). \qquad (2)$$

Функция $f\cdot g$ измерима (как произведение измеримых функций). Из (2) имеем

$$m\int_A g(t)d\mu(t) \le \int_A fgd\mu \le M\int_A gd\mu \tag{3}$$

(см. теорему о монотонности интеграла).

Отсюда и из условия $g \in L(\mu, A)$ следует, что $fg \in L(\mu, A)$.

Если $\int_A gd\mu = 0$, то по (3) будет $\int_A fgd\mu = 0$ и искомое равенство (1) верно для всех t.

Если же $\int_A gd\mu > 0$, то для $\gamma = \dfrac{\int_A fgd\mu}{\int_A gd\mu} = 0$ из (3) получим $m \le \gamma \le M$ и теперь из определения γ имеем (1). □

Теорема 2. (Первая теорема о среднем для сегмента)

Пусть функция $f:[a;b]\to R$ — непрерывна, функция $g:[a;b]\to\begin{cases}[0;+\infty]\\[-\infty;0]\end{cases}$ суммируема по Лебегу.

Тогда существует $\xi\in\left(a;b\right)$ такое, что

$$\int_a^b f(t)\cdot g\left(t\right)dt=f\left(\xi\right)\int_a^b g(t)dt\,.$$

Доказательство. Для определенности будем считать, что $g:[a;b]\to[0;+\infty]$. Из непрерывности функции f (см. замечание §1) очевидным образом вытекает, что функция f суммируема. Функция $f\cdot g$, очевидно, измерима. Покажем, что функция $f\cdot g$ суммируема на $[a;b]$. Действительно, для $m=\min\limits_{[a;b]}f(t),M=\max\limits_{[a;b]}f(t)$ мы получим $m\cdot g\le f\cdot g\le M\cdot g$.

Отсюда и из теоремы о монотонности интеграла получим

$$m\int_a^b g dt \le \int_a^b fg dt \le M\int_a^b g dt.$$

Значит, $\int_a^b fg dt \in R$, то есть $fg \in L[\mu,[a;b]]$.

По теореме 1 существует γ, $m \le \gamma \le M$, такое, что

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = \gamma\int_a^b g(t)dt.$$

По теореме о промежуточных значениях непрерывной функции существует $\xi \in [a;b]$ такое, что $f(\xi) = \gamma$, и, таким образом,

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(\xi)\int_a^b g(t)dt. \square \qquad (*)$$