Теоретическая механика

Часть 1

Кинематика

Глава 3. Движение твердой среды

§ 7. Теорема Эйлера о скоростях точек твердой среды

Рассмотрим две декартовы системы отсчета: «неподвижную» $S = (O, E_1, E_2, E_3)$ и «подвижную» $S' = (O', E_1', E_2', E_3')$, жестко связанную со средой Σ (то есть твердая среда Σ неподвижна относительно ДСО S').

И пусть D – матрица перехода от S к S'.

Рассмотрим две точки $A, B \in \Sigma$. Арифметический вектор $r_{AB} = r_{OB} - r_{OA}$ – это координатное представление геометрического вектора $\overrightarrow{AB}$ в системе S, векторы $v_A = \dot{r}_{OA}$ и $v_B = \dot{r}_{OB}$ – скорости точек A и B в системе S, вектор $v_{AB} = \dot{r}_{AB} = \dot{r}_{OB} - \dot{r}_{OA} = v_B - v_A$ – скорость направленного отрезка $\overline{AB}$ в S. Заметим также, что $D^T r_{AB} = r'_{AB} = const$ (r'_{AB} – координатное представление вектора $\overrightarrow{AB}$ в системе S').

Теорема (Эйлера). В каждый момент времени t существует и единственен такой вектор $\Omega = \Omega(t) \in \mathbb{R}^3$, что для любых точек $A, B \in \Sigma$ имеет место равенство

$$v_B = v_A + \Omega \times r_{AB}.$$

При этом $(\forall t)(\forall q \in \mathbb{R}^3)\,[\dot{D}D^T q = \Omega \times q]$.

Замечание. Равенство $v_B = v_A + \Omega \times r_{AB}$ равносильно равенству $v_{AB} = \Omega \times r_{AB}$.

Доказательство. Докажем сначала, что

$(\forall t)(\exists$ единственный $\Omega = \Omega(t) \in \mathbb{R}^3)(\forall q \in \mathbb{R}^3)[\dot{D}D^T q = \Omega \times q]$.

В силу леммы 6.1, при $\forall t$ матрица $M = \dot{D}D^T$ является кососимметрической. Тогда, в силу леммы 6.2, при $\forall t$ для матрицы $M = \dot{D}D^T$ $(\exists$ единственный $\Omega = \Omega(t) \in \mathbb{R}^3)$ $(\forall q \in \mathbb{R}^3)[\dot{D}D^T q = Mq = \Omega \times q]$.

Второе предложение доказано. Докажем первое предложение.

Фиксируем произвольный момент времени t и возьмем две произвольные точки $A, B \in \Sigma$. Пусть $q = r_{AB}$. Тогда из доказанного выше, учитывая, что $DD^T = I$ и $D^T r_{AB} = r'_{AB} = const$, получаем:

$$v_{AB} = \dot{r}_{AB} = \frac{d}{dt}(DD^T r_{AB}) = \dot{D}(D^T r_{AB}) = (\dot{D}D^T)r_{AB} = \Omega \times r_{AB},$$

или, что равносильно, $v_B = v_A + \Omega \times r_{AB}$. При этом вектор $\Omega(t)$ не зависит от точек $A, B \in \Sigma$.

Осталось заметить, что, в силу леммы 6.2, вектор $\Omega(t)$ однозначно определяется матрицей $M = \dot{D}D^T$.

Теорема доказана.

Вектор $\Omega = \Omega(t)$, существование и единственность которого утверждается в данной теореме, называется ***вектором мгновенной угловой скорости твердой среды*** Σ ***по отношению к системе отсчета*** S.

§ 8. Следствие теоремы Эйлера о кориолисовом ускорении

Рассмотрим две декартовы системы отсчета: «неподвижную» $S = (O, E_1, E_2, E_3)$ и «подвижную» $S' = (O', E_1', E_2', E_3')$, жестко связанную со средой Σ (то есть твердая среда Σ неподвижна относительно ДСО S') ; D – матрица перехода от S к S'; вектор $\Omega = \Omega(t)$ – вектор мгновенной угловой скорости твердой среды Σ по отношению к системе отсчета S.

Пусть A – произвольная отмеченная точка, которая движется как относительно S, так и относительно S'. Кориолисово ускорение точки A определяется равенством $w_{кор} = 2\dot{D}\dot{r}'_{O'A}$, где $\dot{r}'_{O'A}$ – арифметический радиус-вектор точки A в S'.

В силу теоремы Эйлера, $(\forall t)\,(\forall q \in \mathbb{R}^3)\,[\,\dot{D}D^T q = \Omega \times q\,]$.

Тогда $w_{кор} = 2\dot{D}\dot{r}'_{O'A} = 2\dot{D}(D^T D)\dot{r}'_{O'A} = 2(\dot{D}D^T)D\dot{r}'_{O'A} =$ $= 2(\dot{D}D^T)v_{отн} = 2\cdot\Omega\times v_{отн}$, где $v_{отн} = D\dot{r}'_{O'A}$ – относительная скорость точки A (скорость точки A в системе S', записанная в координатах системы S).

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Следствие (теоремы Эйлера). Для любой отмеченной точки A ее кориолисово ускорение определяется равенством

$$w_{кор} = 2 \cdot \Omega \times v_{отн},$$

где Ω – вектор мгновенной угловой скорости подвижной твердой среды Σ, $v_{отн}$ – относительная скорость точки A (то есть скорость точки A относительно среды Σ).

§ 9. Свойства вектора мгновенной угловой скорости твердой среды

Пусть $\Omega = \Omega(t)$ – вектор мгновенной угловой скорости твердой среды Σ по отношению к неподвижной системе отсчета S.

Свойство 1. Скорости всех точек Σ в данный момент времени t одинаковы $\Leftrightarrow \Omega(t)=0$.

Доказательство. *Необходимость.* Имеем : для любых точек $A, B \in \Sigma$ в данный момент времени $v_B = v_A$. Тогда, в силу теоремы Эйлера,

$$\Omega \times r_{AB} = v_{AB} = v_B - v_A = 0 \Rightarrow \vec{\Omega} \times \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\Omega} \parallel \overrightarrow{AB}.$$

Следовательно, $\vec{\Omega} = \vec{0}$.

Достаточность очевидна.

Свойство 2. Для точек $A, B \in \Sigma$ в данный момент времени

$$v_B = v_A \Leftrightarrow \vec{\Omega} \parallel \overrightarrow{AB}.$$

Доказать самостоятельно.

Свойство 3. Для любых точек $A, B \in \Sigma$ в каждый момент времени $\vec{v}_{AB} \perp \vec{\Omega}$ и $\vec{v}_{AB} \perp \overrightarrow{AB}$.

Доказательство вытекает из равенства $\vec{v}_{AB} = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{AB}$ и из определения векторного произведения.

§ 10. Плоскопараллельное движение твердой среды. Определение и примеры

Пусть твердая среда Σ движется относительно неподвижной декартовой системы отсчета $S=(O,E_1,E_2,E_3)$, $v_A=\dot{r}_{OA}$ – скорость точки $A\in\Sigma$ в S.

Определение. Движение среды Σ относительно системы S называется ***плоскопараллельным***, если существует такое двумерное подпространство L_0 в $\mathbb{R}^3$, что $(\forall\, A\in\Sigma)(\forall t\in(\alpha,\,\beta))[v_A(t)\in L_0]$.

Подпространство L_0 называется ***пространством скоростей*** среды Σ.

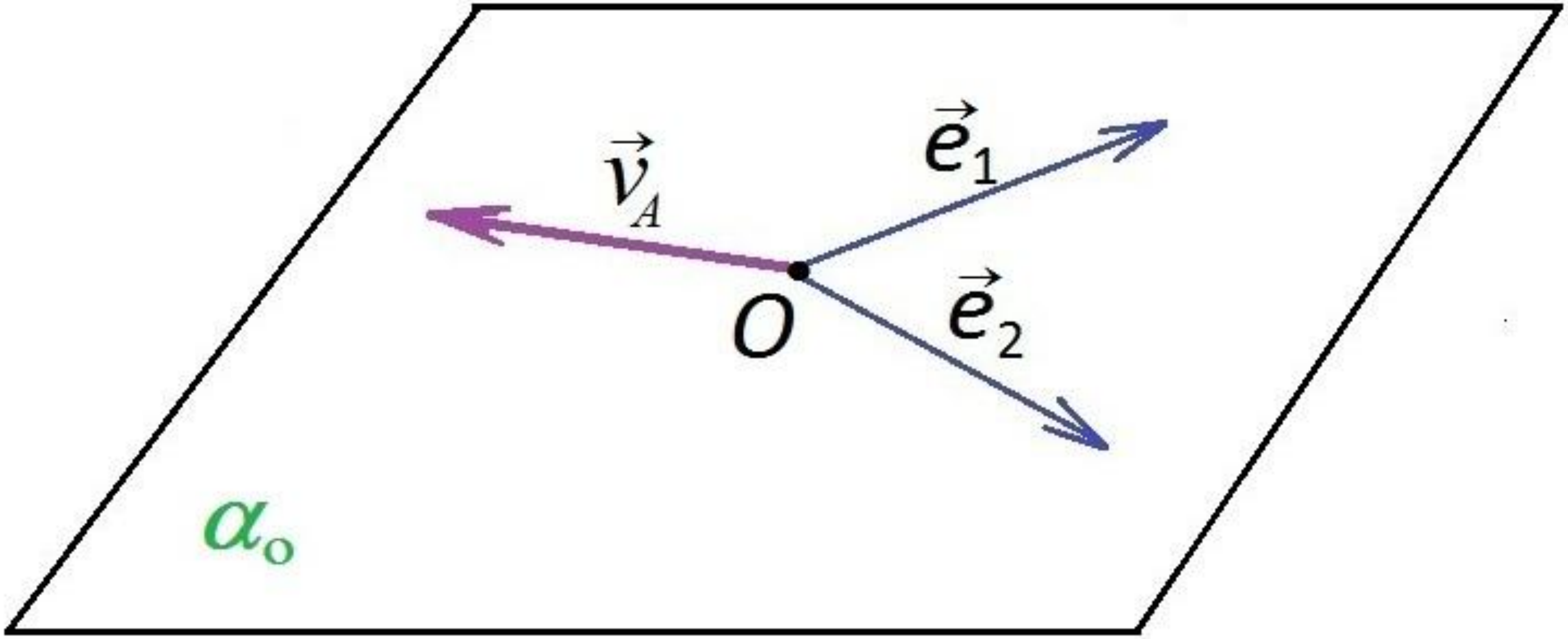
Двумерность подпространства L_0 означает, что в L_0 существуют линейно независимые векторы e_1 и e_2, такие, что $L_0 = \mathcal{L}in(e_1, e_2)$ – линейная оболочка векторов e_1 и e_2 (то есть векторы e_1 и e_2 образуют базис в L_0). Тогда для всякой точки $A \in \Sigma$ в каждый момент времени t найдутся такие числа $\lambda(t)$ и $\mu(t)$, что скорость $v_A(t) = \lambda(t)e_1 + \mu(t)e_2$.

Соответствующие геометрические векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ также линейно независимы, а следовательно, неколлинеарны.

Рассмотрим плоскость α_0 в абсолютном пространстве, проходящую через точку O и параллельную векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Тогда геометрический вектор скорости точки $A \in \Sigma$

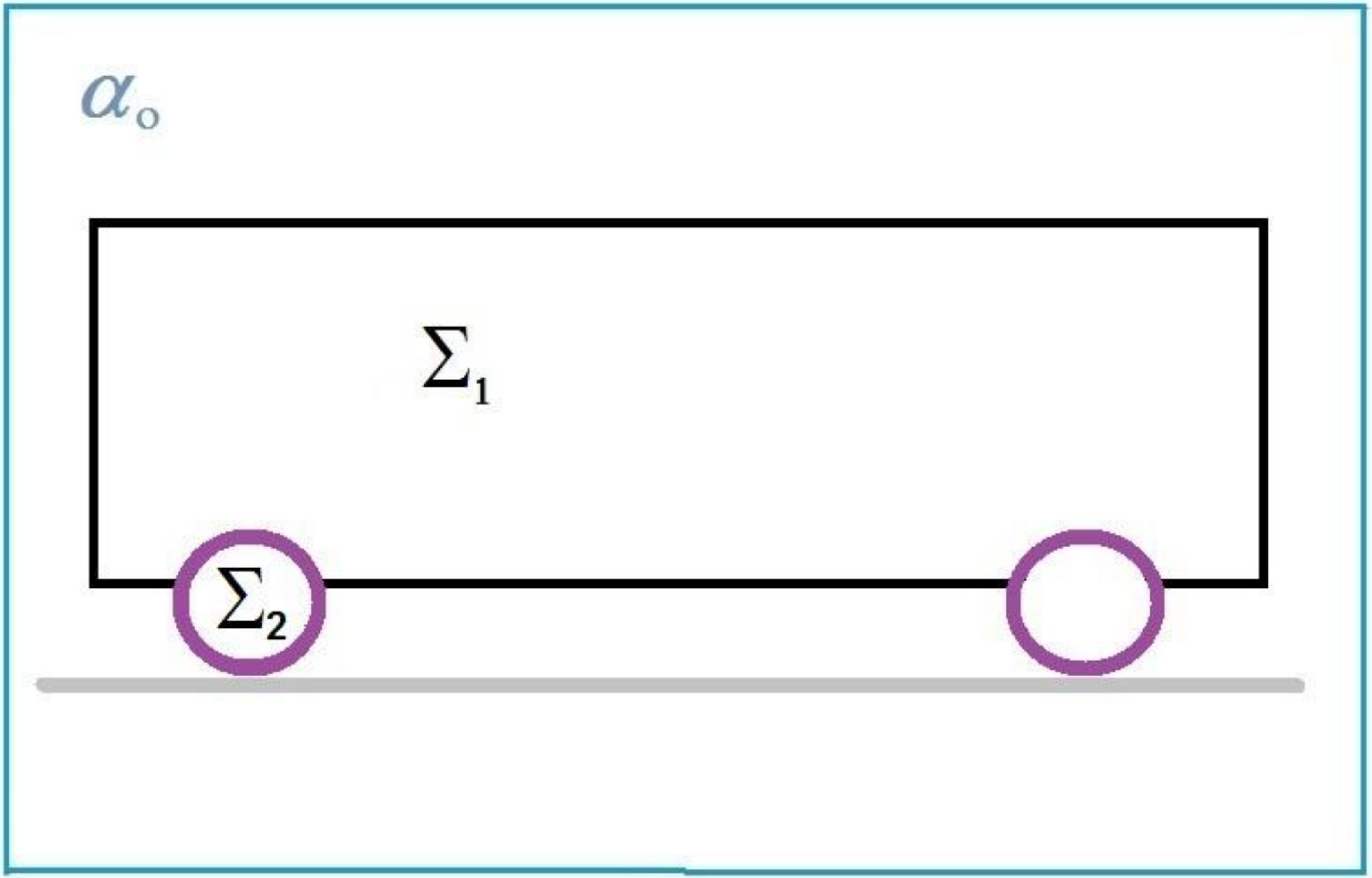
$$\vec{v}_A(t) = \lambda(t)\vec{e}_1 + \mu(t)\vec{e}_2,$$

то есть вектор $\vec{v}_A(t)$ также параллелен плоскости α_0 (см. рисунок).



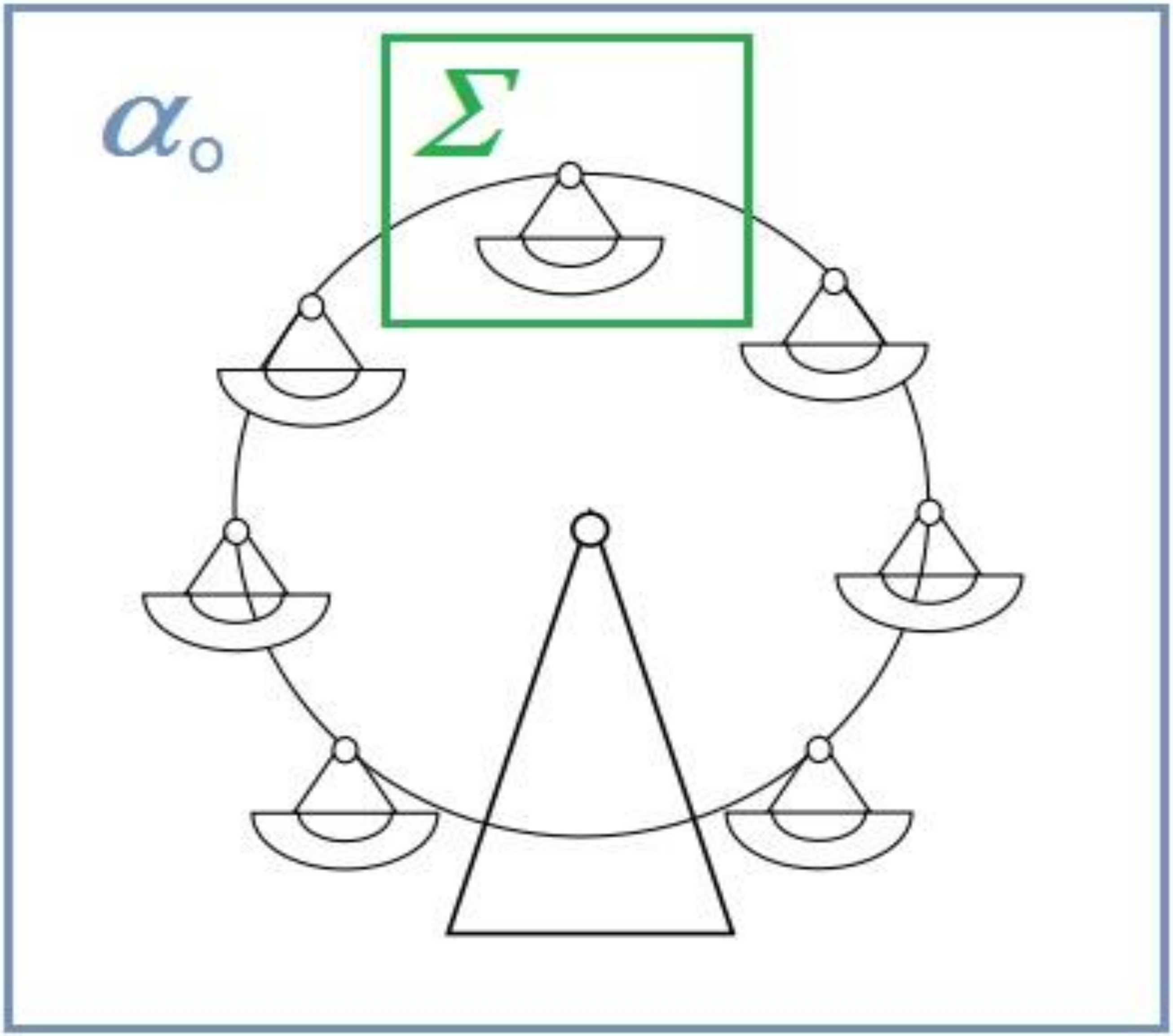
Плоскость α_0 называют ***плоскостью скоростей*** среды Σ.

Примеры. **1. Железнодорожный вагон движется по прямолинейному участку пути.** В данном случае мы имеем плоскопараллельное движение разных твердых сред (см. рисунок), связанных, соответственно, с корпусом вагона (среда Σ_1) и с его колесами (среда Σ_2), так как скорости всех точек корпуса вагона и его колес «лежат» в вертикальной плоскости α_0, параллельной рельсам и перпендикулярной поверхности земли (на данном плоском участке). При этом корпус вагона совершает движение еще более частного вида – ***прямолинейное***, при котором скорости всех его точек коллинеарны фиксированной прямой (рельсам).


α₀
Σ1
Σ2

2. Движение твердой среды Σ, связанной с кабинкой «колеса обозрения», является плоскопараллельным.

Плоскость скоростей α_0 – это плоскость окружности колеса (см. рисунок).


α∘
Σ