КОНСУЛЬТАЦИЯ

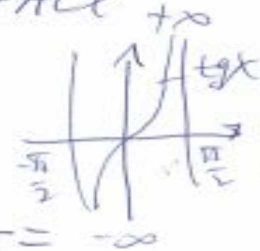
Несобственное интегралы

$$\int_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2}=\lim_{B\to+\infty}\frac12\int_1^B\frac{2x\,dx}{1+x^2}=\lim_{B\to+\infty}\frac12\int_1^B\frac{dx^2}{x^2+1}=$$

$$=\lim_{B\to+\infty}\frac12\ln|1+x^2|\Big|_1^B=$$

$$=\lim_{B\to+\infty}\frac12\ln|\underbrace{1+B^2}_{\infty}|-\frac12\ln 2=\infty$$

РАСХ



$$\int_{-\infty}^0\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{A\to-\infty}\int_A^0\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\lim_{A\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_A^0=\lim_{A\to-\infty}(\operatorname{arctg}0-$$

$$-\operatorname{arctg}A)=0-\operatorname{arctg}(-\infty)=$$

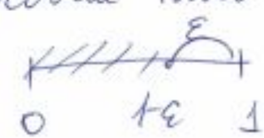
$$=\operatorname{arctg}(+\infty)=\frac{\pi}{2}$$ сходится

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} -\cos x\Big|_A^B =$$

$$= -\lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} (\cos B - \cos A) \ \nexists$$ РАСХ

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

особые точка $x = 1$



$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

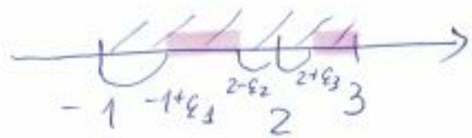
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \underbrace{\arcsin(1-\varepsilon)}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arcsin 0}_{0} =$$

$$= \frac{\pi}{2}$$ сходится

$$\int_{-1}^{3}\frac{dx}{(x+1)(x-2)} = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to0\\ \varepsilon_2\to0\\ \varepsilon_3\to0}} \int_{-1+\varepsilon_1}^{2-\varepsilon_2}\frac{dx}{(x+1)(x-2)} + \int_{2+\varepsilon_3}^{3}\frac{dx}{(x+1)(x-2)} =$$

особые точки $\quad x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$



$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A^{\backslash x-2}}{x+1} + \frac{B^{\backslash x+1}}{x-2} \Rightarrow 1 = A(x-2)+B(x+1)$$

$$\begin{array}{l|l} x=2 & 1=3B \Rightarrow B=\frac{1}{3} \\ x=-1 & 1=-3A \Rightarrow A=-\frac{1}{3} \end{array}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{\substack{\varepsilon_1\to0\\ \varepsilon_2\to0\\ \varepsilon_3\to0}} \int_{-1+\varepsilon_1}^{2-\varepsilon_2}\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}\right)dx + \int_{2+\varepsilon_3}^{3}\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}\right)dx =$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{\substack{\varepsilon_1\to0\\ \varepsilon_2\to0\\ \varepsilon_3\to0}} \ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Bigg|_{-1+\varepsilon_1}^{2-\varepsilon_2} + \ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Bigg|_{2+\varepsilon_3}^{3} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0 \\ \varepsilon_3 \to 0}} \ln\left|\frac{2-\varepsilon_2-2}{2-\varepsilon_2+1}\right| - \ln\left|\frac{-1+\varepsilon_1-2}{-1+\varepsilon_1+1}\right| +$$

$$+ \ln\left|\frac{3-2}{3+1}\right| - \ln\left|\frac{2+\varepsilon_3-2}{2+\varepsilon_3+1}\right| =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0 \\ \varepsilon_3 \to 0}} \ln\left|\frac{\varepsilon_2}{3-\varepsilon_2}\right| - \ln\left|\frac{\varepsilon_1-3}{\varepsilon_1}\right| + \ln\left|\frac{1}{4}\right| -$$

$$- \ln\left|\frac{\varepsilon_3}{3+\varepsilon_3}\right| =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0 \\ \varepsilon_3 \to 0}} \ln\left|\frac{\varepsilon_2}{3-\varepsilon_2} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1-3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3+\varepsilon_3}{\varepsilon_3}\right|$$

$\left[\frac{0}{0}\right]$ неопред.

раскр. нельзя

$\nexists$ расх.

Определить тип ДУ

$$\boxed{\underbrace{\left(2x-1-\frac{y}{x^2}\right)}_{P}dx-\underbrace{\left(2y-\frac{1}{x}\right)}_{Q}dy=0}$$

$$P'_y=-\frac{1}{x^2} \qquad Q'_x=-\left(-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)=-\frac{1}{x^2}$$

ДУ в полных дифференциалах.

$$\boxed{(4x+2xy^2)dx-(3y+3x^2y)dy=0}$$

$P'_y=4xy$ $\qquad$ $Q'_x=6xy$

не яв-ся в полных диф-ах

$$2x(2+y^2)dx-3y(1+x^2)dy=0$$

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)dx+P_2(x)Q_2(y)dy=0$$

с разделяющимися переменными.

$$\boxed{(2\ln y-\ln^2 y)dy = ydx - xdy}$$

$$0 = -(2\ln y - \ln^2 y)dy - xdy + ydx$$

$$\underbrace{y}_{P}\,dx - \underbrace{(2\ln y - \ln^2 y + x)}_{Q}dy = 0$$

$P'_y = 1$ $\qquad Q'_x = -(0-0+1) = -1$

$P'_y \neq Q'_x$ не в полных
не с разделяющ.

$$P'_y - Q'_x = 1-(-1) = 2$$

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{2}{-(2\ln y - \ln^2 y + x)} \neq \varphi(x)$$

$$\frac{P'_y - Q'_x}{P} = \frac{2}{y} = \varphi(y) \Rightarrow \mu(y) = e^{-\int \varphi(y)dy}$$

с интегр. множителем

$$\boxed{\sqrt{4-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0}$$

$$\frac{dy}{dx}$$

$$\sqrt{4-x^2}\,dy + (xy^2 + x)dx = 0$$

$$\sqrt{4-x^2}\,dy + x(y^2+1)dx = 0$$

$$x\cdot(y^2+1)dx + \sqrt{4-x^2}\,dy = 0$$

$$P_1(x)\,Q_1(y)dx + P_2(x)\,Q_1(y)\,dy = 0$$

$$\Downarrow$$

1 с разделяющими.

$$\boxed{y' + \frac{2x}{1+x^2}\, y = \frac{2x^2}{1+x^2}}$$

$y' + P(x)\, y = Q(x)$ линейное неоднородное 1-го порядк

Методы → 1) ?
→ 2) ?

$$\boxed{3xy' + 5y = (4x-5)y^4} \quad : 3x$$

$\Rightarrow y' + \frac{5}{3x}\, y = \frac{4x-5}{3x} \cdot y^4$ Бернулли

$y' + P(x)\, y = Q(x)\, y^n$

$$\boxed{xy' = \sqrt{2x^2+y^2} + y}$$

$$y' = \underbrace{\frac{\sqrt{2x^2+y^2} + y}{x}}_{f(x,y)}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\sqrt{2(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} + \lambda y}{\lambda x} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} + \lambda y}{\lambda x} = \frac{\lambda\sqrt{2x^2+y^2} + \lambda y}{\lambda x} =$$

$$= \frac{\cancel{\lambda}\left(\sqrt{2x^2+y^2} + y\right)}{\cancel{\lambda}\, x} = f(x,y)$$ однородное

замене $\dfrac{y}{x} = t$

$$\boxed{y' = \frac{x+8y-9}{10x-y-9}} \qquad y' = \frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}$$

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

приводящееся к однородн.

$$\begin{cases} x = u+m \\ y = v+n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+8n-9=0 \\ 10m-n-9=0 \end{cases} \qquad \frac{u}{v} = t$$

$$\boxed{xy'''+2y''=0}$$

ДУ высшего порядка не содержащее искомой функции

$$y'' = z(x), \quad y''' = z'(x)$$

$$\boxed{y'' = 18\sin^3 y \cos y}$$

ДУ высшего порядка не содержащие независимой переменной x

$$y' = z(y), \quad y'' = z'(y)\cdot \underbrace{y'}_{z}$$

$$y'' = z \cdot z'$$

$$\boxed{y^{IV} + 2y''' + y'' = 0}$$

Линейное однородное ДУ высшего порядка (4-го порядка) с пост. коэф-м.

$k^4 + 2k^3 + k^2 = 0$

хар. ур-е

$k^2(k^2+2k+1) = 0$

$k^2(k+1)^2 = 0$

$k=0 \qquad k=-1$

$k=0$ кратность 2

$k=-1$

ФСР $e^{0x}, xe^{0x} \to 1, x$

e^{-x}, xe^{-x}

$$\boxed{y^{(8)} + 2y^{(7)} + 5y^{(6)} = x^2}$$

$k^8 + 2k^7 + 5k^6 = 0 \Rightarrow k^6(k^2 + 2k + 5) = 0$

$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4(1-5) = 4(-4) = -16$

$\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$

ФСР

$k_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i \to e^{-x}\cos 2x,\ e^{-x}\sin 2x$

$k^6 = 0 \Rightarrow k = 0$ кратность 6

$$\underbrace{e^{0x},\ xe^{0x},\ x^2 e^{0x},\ x^3 e^{0x},\ x^4 e^{0x},\ x^5 e^{0x}}_{6\text{ шт.}}$$

$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x}\sin 2x + 1 \cdot C_3 +$
$+ x \cdot C_4 + x^2 \cdot C_5 + x^3 C_6 + x^4 \cdot C_7 +$
$+ x^5 C_8$

$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} \sin 2x + 1 \cdot C_3 +$

$+ x \cdot C_4 + x^2 \cdot C_5 + x^3 C_6 + x^4 \cdot C_7 +$

$+ x^5 C_8$

$\tilde{y}$ – частное?

$f(x) = x^2 = e^{0x}(1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0)$

$e^{\alpha x} \quad P(x)$

$\alpha = 0 \quad$ ст. 2

$\alpha = 0$ яв-ся корнем хар. ур кр. 6

$\tilde{y} = x^6 e^{0x}(Ax^2 + Bx + c) = x^6(Ax^2 + Bx + C)$

Даны корни характеристического уравнения

$k_1 = -5$ кратность 3

$k_2 = 2$ кратность 1

$k = 5 \pm 3i$ кратность 1

$k = 0 \pm i$ кратность 2

Правая часть:

$$f(x) = e^{-5x} \cdot x + e^{3x} \cdot 8 + e^{5x}(x\cos 3x + 9\sin 3x) +$$
$$+ \; e^{4x}\cos 7x$$

Найти вид y_0 - ? $\tilde{y}$ - ?

$$\text{ФСР}: \underbrace{e^{-5x}, \; xe^{-5x}, \; x^2e^{-5x}}_{3}, \; \underbrace{e^{2x}}_{1}$$

$$\underbrace{e^{5x}\cos 3x, \; e^{5x}\sin 3x}_{\text{одна пара}}, \; \underbrace{e^{0x}\cos x, \; e^{0x}\sin x, \; xe^{0x}\cos x, \; xe^{2x}\sin x}_{\text{2 пары}}$$

ФСР: $\underbrace{e^{-5x},\ xe^{-5x},\ x^2e^{-5x}}_{3},\ \underbrace{e^{2x}}_{1}$

$\underbrace{e^{5x}\cos 3x,\ e^{5x}\sin 3x}_{\text{одна пара}},\ \underbrace{e^{0x}\cos x,\ e^{0x}\sin x,\ xe^{0x}\cos x,\ xe^{2x}\sin x}_{\text{2 пары}}$

$$y_o = C_1e^{-5x} + C_2xe^{-5x} + C_3x^2e^{-5x} + C_4e^{2x} +$$

$$+ C_5e^{5x}\cos 3x + C_6e^{5x}\sin 3x + C_7\cos x +$$

$$+ C_8\sin x + C_9\cos x + C_{10}\sin x + C_{11}x\cos x +$$

$$+ C_{12}x\sin x$$ / ур-е 12 пор

Частное решение.

$f_1(x) = e^{-5x} \cdot x$ || ст. $P(x)=1$

$e^{\alpha x} P(x)$ || $\alpha=-5$ явл. к.х.у. кр. 3

$\tilde{y_1} = x^3 e^{-5x}(Ax+B)$

$f_2(x) = e^{3x} \cdot 8$ || ст. $P(x)=0$

$e^{\alpha x} P(x)$ || $\alpha=3$ не яв-ся корнем хар. ур.

$\tilde{y_2} = e^{3x} \cdot A_1$

α

$f_3(x) = e^{5x}(x\cos 3x + 9\sin 3x)$

P_1 β P_2 β

$\alpha=5$ $\beta=3$ $\alpha \pm i\beta = 5 \pm 3i$ явл. к.х.у. кр. 1

$$f_3(x) = e^{5x}(x\cos 3x + 9\sin 3x)$$

P_1 β P_2 β

$\alpha = 5 \quad \beta = 3 \qquad \alpha \pm i\beta = 5 \pm 3i$ ~~яв.~~ к.х.у. кр. 1

$$\left.\begin{array}{l} \text{ст. } P_1 = 1 \\ \text{ст. } P_2 = 0 \end{array}\right\} \max \text{ ст. } 1 \Rightarrow \text{многочлен } Ax+B$$

$$\tilde{y}_3 = x^1 \, e^{5x}((A_2x+B_2)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x)$$

$f_4(x) = e^{4x}\cos 7x =$

$$= e^{\overset{\alpha}{4}x}\Big(\underset{\substack{P_1\\ \text{ст.}0}}{1}\cdot\cos \underset{\beta}{7}x + \underset{\substack{P_2\\ \text{ст.}0}}{0}\cdot\sin \underset{\beta}{7}x\Big)$$

$\alpha \pm i\beta = 4 \pm 7i$ не яв-ся корнем х.у.

$$\tilde{y}_4 = e^{4x}\Big(\underset{\text{ст.}0}{A_3}\cos 7x + \underset{\text{ст.}0}{B_3}\sin 7x\Big)$$

$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 + \tilde{y}_4$ – частное решение