

КОНСУЛЬТАЦІЯ

Необходимое условие

$$\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_1^B \frac{2x dx}{1+x^2} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_1^B \frac{dx^2}{x^2+1} =$$

$$= \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln|1+x^2| \Big|_1^B =$$

$$= \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln|1+B^2| - \frac{1}{2} \ln 2 = \infty$$




$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \frac{dx}{1+x^2} = -\infty$$

$$= \lim_{A \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_A^0 = \lim_{A \rightarrow -\infty} (\operatorname{arctg} 0 -$$

$$-\operatorname{arctg} A) = 0 - \operatorname{arctg}(-\infty) =$$

$$= \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2} \text{ сходясь}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sinh x dx = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} -\cosh x \Big|_A^B =$$

$$= -\lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} (\cosh B - \cosh A) \quad \text{PACH}$$


$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

оценим толку $x=1$



$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{arcsinh} x \Big|_0^{1-\epsilon} =$$

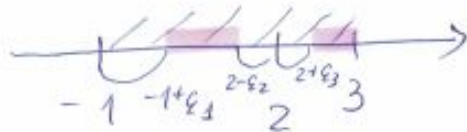
$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{arcsinh}(1-\epsilon) - \operatorname{arcsinh} 0 =$$

$$= \frac{\pi}{2} \text{ с точностью}$$

$$\int_{-1}^3 \frac{dx}{(x+1)(x-2)} = \lim_{\substack{\epsilon_1 \rightarrow 0 \\ \epsilon_2 \rightarrow 0 \\ \epsilon_3 \rightarrow 0}} \int_{-1+\epsilon_1}^{2-\epsilon_2} \frac{dx}{(x+1)(x-2)} + \int_{2+\epsilon_3}^3 \frac{dx}{(x+1)(x-2)} =$$

οσφύρα του x

$$\begin{aligned} x+1=0 &\Rightarrow x=-1 \\ x-2=0 &\Rightarrow x=2 \end{aligned}$$



$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \Rightarrow 1 = A(x-2) + B(x+1)$$

$$\begin{aligned} x=2 & \mid 1 = 3B \Rightarrow B = \frac{1}{3} \\ x=-1 & \mid 1 = -3A \Rightarrow A = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{\substack{\epsilon_1 \rightarrow 0 \\ \epsilon_2 \rightarrow 0 \\ \epsilon_3 \rightarrow 0}} \int_{-1+\epsilon_1}^{2-\epsilon_2} \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} \right) dx + \int_{2+\epsilon_3}^3 \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{\substack{\epsilon_1 \rightarrow 0 \\ \epsilon_2 \rightarrow 0 \\ \epsilon_3 \rightarrow 0}} \left[\ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| \right]_{-1+\epsilon_1}^{2-\epsilon_2} + \left[\ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| \right]_{2+\epsilon_3}^3 =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_3 \rightarrow 0}} \ln \left| \frac{2 - \varepsilon_2 - 2}{2 - \varepsilon_2 + 1} \right| - \ln \left| \frac{-1 + \varepsilon_1 - 2}{-1 + \varepsilon_1 + 1} \right| +$$

$$+ \ln \left| \frac{3 - 2}{3 + 1} \right| - \ln \left| \frac{2 + \varepsilon_3 - 2}{2 + \varepsilon_3 + 1} \right| =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_3 \rightarrow 0}} \ln \left| \frac{\varepsilon_2}{3 - \varepsilon_2} \right| - \ln \left| \frac{\varepsilon_1 - 3}{\varepsilon_1} \right| + \ln \left| \frac{1}{4} \right| -$$

$$- \ln \left| \frac{\varepsilon_3}{3 + \varepsilon_3} \right| =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_3 \rightarrow 0}} \ln \left| \frac{\varepsilon_2}{3 - \varepsilon_2} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 - 3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3 + \varepsilon_3}{\varepsilon_3} \right|$$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ неопредел.
 раскр. нуля
 \nexists расх.

Определим тип ДУ

$$\underbrace{(2x - 1 - \frac{y}{x^2})}_{P} dx - \underbrace{(2y - \frac{1}{x})}_{Q} dy = 0$$

$$P'_y = -\frac{1}{x^2}$$

$$Q'_x = -\left(-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = -\frac{1}{x^2}$$

ДУ в полных дифференциалах.

$$(4x + 2xy^2)dx - (3y + 3x^2y)dy = 0$$

$$P'_y = 4xy$$

$$Q'_x = 6xy$$

не аб-ли в полном
груп-ах

$$2x(2+y^2)dx - 3y(1+x^2)dy = 0$$

$$P_1(x) \cdot Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$$

с разгруппированными
членами.

$$(2 \ln y - \ln^2 y) dy = y dx - x dy$$

$$0 = -(2 \ln y - \ln^2 y) dy - x dy + y dx$$

$$\underbrace{y dx}_P - \underbrace{(2 \ln y - \ln^2 y + x) dy}_Q = 0$$

$$P'_y = 1$$

$$Q'_x = -(0 - 0 + 1) = -1$$

$P'_y \neq Q'_x$ не в полных
не с разделяющимися.

$$P'_y - Q'_x = 1 - (-1) = 2$$

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{2}{-(2 \ln y - \ln^2 y + x)} \neq \varphi(x)$$

$$\frac{P'_y - Q'_x}{P} = \frac{2}{y} = \varphi(y) \Rightarrow \int \mu(y) = e^{-\int \varphi(y) dy}$$

с интер. множителем

$$\sqrt{4-x^2} y' + xy^2 + x = 0$$

$$\frac{dy}{dx}$$

$$\sqrt{4-x^2} dy + (xy^2 + x) dx = 0$$

$$\sqrt{4-x^2} dy + x(y^2 + 1) dx = 0$$

$$x \cdot (y^2 + 1) dx + \sqrt{4-x^2} dy = 0$$

$$P_1(x) Q_1(y) dx + P_2(x) Q_2(y) dy = 0$$

↓
с разделениями

$$y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}$$

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Методы $\rightarrow 1)$?
 $\rightarrow 2)$?

линейное
неоднородное
1-го порядка

$$3xy' + 5y = (4x-5)y^4 \quad : 3x$$

$$\Rightarrow y' + \frac{5}{3x} y = \frac{4x-5}{3x} y^4$$

Бернулли

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m$$

$$x y' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$$

$$y' = \frac{\sqrt{2x^2 + y^2} + y}{x}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{f(x,y)}$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\sqrt{2(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} + \lambda y}{\lambda x}$$

$$= \frac{\sqrt{2\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} + \lambda y}{\lambda x} = \frac{\lambda \sqrt{2x^2 + y^2} + \lambda y}{\lambda x}$$

$$= \frac{\cancel{\lambda} (\sqrt{2x^2 + y^2} + y)}{\cancel{\lambda} x} = f(x, y) \text{ однородное}$$

замена $\frac{y}{x} = t$

$$y' = \frac{x + 8y - 9}{10x - y - 9}$$

$$y' = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}$$
$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

приводимые к однород.

$$\begin{cases} x = u + m \\ y = v + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + 8n - 9 = 0 \\ 10m - n - 9 = 0 \end{cases} \quad \left(\frac{u}{v} = t \right)$$

$$x y'''' + 2y''' = 0$$

ДУ высшего порядка не содержащее искомого функции

$$y'' = z(x), \quad y''' = z'(x)$$

$$y'' = 18 \sin^3 y \cos y$$

Dу восьмого порядка не
содержащи независимой
переменной x

$$y' = z(y), \quad y'' = z'(y) \cdot \underbrace{y'}_z$$
$$y'' = z \cdot z'$$

$$y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$$

$$k^4 + 2k^3 + k^2 = 0$$

хар. ур-е

$$k^2(k^2 + 2k + 1) = 0$$

$$k^2(k+1)^2 = 0$$
$$k=0 \quad k=-1$$

Линейное
однородное DУ
восьмого порядка
(4-го порядка)
с постр. коэф.м.

$$\left. \begin{array}{l} k=0 \text{ кратность } 2 \\ k=-1 \end{array} \right\} \text{осн. } e^{0x}, x e^{0x} \rightarrow 1, x$$

$$\left| e^{-x}, x e^{-x} \right.$$

$$y^{(8)} + 2y^{(7)} + 5y^{(6)} = x^2$$

$$k^8 + 2k^7 + 5k^6 = 0 \Rightarrow k^6(k^2 + 2k + 5) = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4(1 - 5) = 4(-4) = -16$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i \quad \Phi CP$$

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i \begin{cases} \rightarrow e^{-x} \cos 2x \\ \rightarrow e^{-x} \sin 2x \end{cases}$$

$$k^6 = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ кратность } 6$$

$$\underbrace{e^{0x}, xe^{0x}, x^2e^{0x}, x^3e^{0x}, x^4e^{0x}, x^5e^{0x}}_{6 \text{ шт.}}$$

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} \sin 2x + 1 \cdot C_3 + x \cdot C_4 + x^2 \cdot C_5 + x^3 C_6 + x^4 C_7 + x^5 C_8$$

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} \sin 2x + 1 \cdot C_3 + x \cdot C_4 + x^2 \cdot C_5 + x^3 C_6 + x^4 \cdot C_7 + x^5 C_8$$

\tilde{y} - частное?

$$f(x) = x^2 = e^{0x} (1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0)$$

$e^{\alpha x} P(x)$
 $\alpha = 0$ ст. 2

$\alpha = 0$ сов-ли корнями хар. ур. кр. 6

$$\tilde{y} = x^6 e^{0x} (Ax^2 + Bx + C) = x^6 (Ax^2 + Bx + C)$$

Дано корни характеристического уравнения

$$k_1 = -5 \text{ кратность } 3$$

$$k_2 = 2 \text{ кратность } 1$$

$$k = 5 \pm 3i \text{ кратность } 1$$

$$k = 0 \pm i \text{ кратность } 2$$

Требуется найти:

$$f(x) = e^{-5x} \cdot x + e^{3x} \cdot 8 + e^{5x} (x \cos 3x + 9 \sin 3x) + e^{4x} \cos 7x$$

Найти y_0 - ? \tilde{y} - ?

$$\text{ФФР: } \underbrace{e^{-5x}, x e^{-5x}, x^2 e^{-5x}}_{(3)}, \underbrace{e^{2x}}_1$$

$$\underbrace{e^{5x} \cos 3x, e^{5x} \sin 3x}_{\text{две пары}}, \underbrace{x e^{0x} \cos x, x e^{2x} \sin x}_{2 \text{ пары}}$$

$$\text{OCP: } \underbrace{e^{-5x}, xe^{-5x}, x^2e^{-5x}}_{(3)}, \underbrace{e^{2x}}_1$$

$$\underbrace{e^{5x} \cos 3x, e^{5x} \sin 3x}_{\text{9na nepa}}, \underbrace{e^{0x} \cos x, e^{0x} \sin x, xe^{0x} \cos x, xe^{2x} \sin x}_{2 \text{ nepa}}$$

$$\begin{aligned}
 y_0 = & C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x} + C_3 x^2 e^{-5x} + C_4 e^{2x} \\
 & + C_5 e^{5x} \cos 3x + C_6 e^{5x} \sin 3x + C_7 \cos x + \\
 & + C_8 \sin x + C_9 \cos x + C_{10} \sin x + C_{11} x \cos x + \\
 & + C_{12} x \sin x \quad / \text{ y.p. e 12 nep } (
 \end{aligned}$$

частное решение.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^{-5x} \cdot x \\ e^{\lambda x} P(x) \end{aligned} \quad \parallel \quad \begin{aligned} \text{ст. } P(x) &= 1 \\ \lambda &= -5 \text{ явл. к.х.у.} \\ \text{кр. } &3 \end{aligned}$$

$$\tilde{y}_1 = x^3 e^{-5x} (Ax + B)$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= e^{3x} \cdot 8 \\ e^{\lambda x} P(x) \end{aligned} \quad \parallel \quad \begin{aligned} \text{ст. } P(x) &= 0 \\ \lambda &= 3 \text{ не явл.} \\ &\text{корнем хар. ур.} \end{aligned}$$

$$\tilde{y}_2 = e^{3x} \cdot A_1$$

$$f_3(x) = e^{5x} (x \cos 3x + 9 \sin 3x)$$

P_1 P P_2 P

$$\lambda = 5 \quad \beta = 3 \quad \lambda \pm i\beta = 5 \pm 3i \text{ явл.}$$

к.х.у. кр. 1

$$f_3(x) = e^{5x} (x \cos 3x + 9 \sin 3x)$$

P_1 P P_2 P

$$d = 5 \quad \beta = 3 \quad d \pm i\beta = 5 \pm 3i \quad \text{гла.}$$

к.х.у. кр. 1

ст. $P_1 = 1$ } max ст. 1 \Rightarrow $Ax + B$
 ст. $P_2 = 0$ }

$$\tilde{y}_3 = x^1 e^{5x} \left(\left(\frac{A}{2}x + \frac{B}{2} \right) \cos 3x + (Cx + D) \sin 3x \right)$$

$$f_4(x) = e^{4x} \cos 7x =$$

$$= e^{4x} (1 \cdot \cos 7x + 0 \cdot \sin 7x)$$

P_1 P P_2 P
ст. 0 ст. 0

$\lambda \pm i\beta = 4 \pm 7i$ не сов-а с корнями χ_4

$$\tilde{y}_4 = e^{4x} (A_3 \cos 7x + B_3 \sin 7x)$$

ст. 0 ст. 0

$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 + \tilde{y}_4$ - точное решение