

# **Задачи в обучении математике**

**ТМОМ**  
**Методические основы**  
**обучения математике**

# План

1. Понятие задачи. Основные компоненты задачи
2. Роль задач в обучении математике
3. Типология задач
4. Этапы решения задачи
5. Методические основы обучения учащихся решению задач
6. Организационные формы обучения решению задач

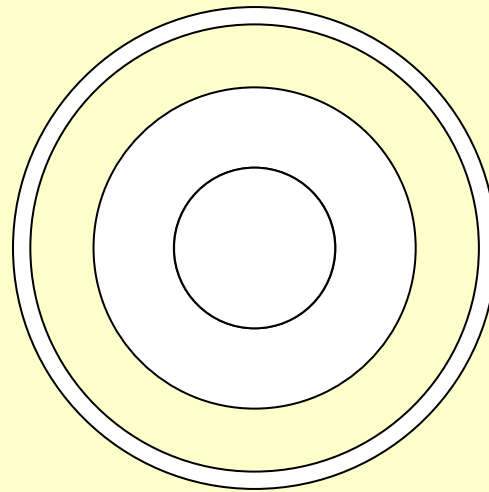
# Трактовки понятия «задача»

(по исследованиям Г.А. Балла)

Термин «задача» употребляется по отношению к объектам, относящимся к трем категориям:

- цель действия субъекта, требования поставленные перед субъектом (А.Н. Леонтьев);
- ситуация, включающая не только цель, но и условия, в которых цель должна быть достигнута (Ю.М. Колягин, П.М. Эрдниев);
- словесная формулировка,

# Структура объема понятия «задача»



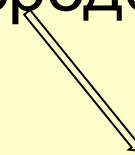
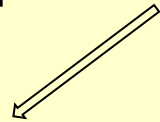
Цель  
деятельности  
Ситуация  
Словесная  
формулировка

# Основные компоненты задачи

- **условие** - начальное состояние;
- **базис решения** – теоретическое обоснование решения;
- **решение** – преобразование условия для нахождения требуемого заключением искомого;
- **заключение** – конечное состояние.

# Математические задачи

(переход от начального к конечному состоянию осуществляется математическими средствами)



## Чисто

### математические

(условие, базис решения, решение и заключение являются математическими объектами)

## Прикладные

(математическими объектами являются только базис решения и решение)

# Этапы истории использования задач в обучении математике

- I.* Изучение математики с целью обучения решению задач.
- II.* Обучение математике, сопровождаемое решением задач.
- III.* Обучение математике через решение задач.

**Двуединная роль задач** в обучении математике:  
задачи выступают и как цель, и как средство  
обучения математике

**Место и функции задач** в обучении  
математике определяются в зависимости от  
целей обучения и могут иметь  
образовательное, воспитательное и  
практическое значение



# Учебные цели решения задач

- **формирование** мотивации и интереса учащихся к математической деятельности;
- **иллюстрация и конкретизация** изученного учебного материала;
- **выработка** специальных умений и навыков;
- **контроль и оценка** знаний, умений учащихся и результатов их деятельности.

# Функции решения математических задач

**Функция задачи** - проектируемое учителем изменение в деятельности и психике учащихся

В педагогической практике выделяют:

- дидактические функции;
- познавательные функции;
- развивающие функции

# Функции задач как цели обучения

Усвоение:

- понятия задачи, ее структуры и компонентов;
- сущности процесса решения;
- приемов работы с текстом задачи;
- способов решения отдельных видов задач;
- общих методов поиска решения.

# Функции задач как средства обучения

- обучение математической деятельности;
- формирование знаний, умений, навыков;
- обучение моделированию явлений действительности;
- развитие учащихся (качеств мышления);
- воспитание через организацию деятельности, общение.

## Следует иметь в виду следующие обстоятельства:

- Большинство математических задач **полифункционально**, т.е. одна и та же задача может выполнять одновременно различные функции, т.к. в результате решения может происходить не одно, а несколько изменений.
- Среди всех функций всегда можно выделить главную, ради которой решается задача.
- Любая типология или классификация является условной.
- Любая математическая задача обладает признаками различных классификационных схем

# Классификации задач

## По функциональному назначению:

- с дидактическими функциями;
- с познавательными функциями;
- с развивающими функциями.

## По компонентам учебной деятельности:

- организационно-действенные;
- стимулирующие;
- контрольно-оценочные.

## По связи между компонентами:

- алгоритмические;
- полуалгоритмические;
- эвристические.

# Классификации задач

## По величине проблемности:

- стандартные (все компоненты известны);
- обучающие (один из компонентов неизвестен);
- поисковые (два компонента неизвестны);
- проблемные (три компонента неизвестны).

## По отношению между условиями и требованием:

- определенные;
- недоопределенные;
- переопределенные.

# Классификации задач

## По числу объектов в условии задачи:

- простые;
- составные.

## По характеру требований:

- на доказательство;
- на вычисления;
- на построение;
- на исследование и др.

## По специфике языка:

- текстовые;
- сюжетные;
- абстрактные (предметные).



# Классификации задач

По принадлежности к определенному разделу математики:

- арифметические;
- алгебраические;
- геометрические;
- тригонометрические;
- комбинаторные и др.

# Примеры задач различных типов

- **Алгоритмическая задача** – задача, решаемая с помощью непосредственного применения определения, правила или теоремы

Например:

– найти гипотенузу треугольника, если известны его катеты.

- **Полуалгоритмическая задача** – задача, решаемая с помощью правил, имеющих обобщенный характер и не сводящихся к выполнению определенной последовательности элементарных актов, но при этом связи между элементами задачи легко обнаруживаются и каждая из подзадач является алгоритмической

Например:

– Найти периметр равнобедренного треугольника по боковой стороне и высоте, проведенной к основанию.

# Примеры задач различных типов

- **Эвристическая задача** – задача со скрытыми связями между элементами или способом решения, не являющимся конкретизацией обобщенного правила.

Например:

- Найти расстояние от середины высоты треугольника, проведенной к меньшей из его сторон, до большей стороны, если длины всех сторон треугольника известны.

- **Стандартная задача** – четко определено условие, известен способ ее решения, его обоснование, а также известен способ воспроизведения известного.

Например:

- Зная два угла треугольника, вычислить третий;
- Решить квадратное уравнение общего вида:  $x^2 - 5x + 6 = 0$

# Примеры задач различных типов

- **Обучающая задача** – задача, в которой не известен или плохо определен один из компонентов

Например:

- Придумайте квадратное уравнение, корнями которого являются числа 2 и -2, если известно, что для решения уравнения использовалась формула разности квадратов.

- **Поисковая задача** – задача, в которой неизвестны или плохо определяются два компонента

Например:

- Решите уравнение:  $(x^2 + 5x + 6)^2 + 5(x + 1) + x^2 + 1 = 0$

- **Проблемная задача** – задача, в которой неизвестны три компонента.

Например (до изучения квадратных уравнений):

- Составьте текст сюжетной задачи, для решения которой можно составить уравнение

# Примеры задач различных типов

**Определенные задачи** – задачи, в которых задано необходимое и достаточное число элементарных условий для удовлетворения требованиям.

**Недоопределенные задачи** – задачи, в которых недостаточно условий для ее решения

Например:

- С двух цветков, расстояние между которыми  $200\text{ м}$ , в разных направлениях вылетели две стрекозы с одинаковой скоростью  $25\text{ м в минуту}$ . Какое расстояние между ними будет через  $2\text{ минуты}$ ?

**Переопределенные задачи** – задачи, имеющие для решения лишние условия, которые могут быть либо следствием других, либо противоречить другим

Например:

- Найдите радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника со сторонами  $5\text{ см}$ ,  $12\text{ см}$  и  $13\text{ см}$ .
- Длины сторон прямоугольного треугольника равны  $3\text{ см}$ ,  $4\text{ см}$  и  $6\text{ см}$ . Определите величину угла, лежащего против меньшего из катетов.

# Сложность и трудность задачи

- **Сложность** – объективная характеристика задачи, зависящая от числа объектов задачи, от количества и характера связей между объектами, конструкции текста, языка, на котором приведена формулировка и т.п.
- **Трудность** – субъективная характеристика задачи, зависящая от знаний, умений и опыта решающего задачу субъекта, от уровня его интеллектуальных умений, связанных с типологическими свойствами личности, от жизненного опыта и т.п.

# Трактовки термина «решение задачи»

- **Решение задачи** – план (способ, метод) осуществления требования задачи;
- **Решение задачи** – процесс выполнения плана, приводящего к осуществлению требования задачи;
- **Решение задачи** – результат выполнения плана осуществления требования задачи.

# Структура процесса решения задачи (по Л.М. Фридману)

1. **Содержательный и логический анализ.**
2. Схематическая запись условия (построение высказывательной модели задачи с использованием схем, чертежей, графиков, математической символики и т.п.).
3. **Поиск способа (плана) решения, нахождение его теоретической базы.**
4. **Осуществление способа (плана) решения.**
5. Проверка найденного решения.
6. Исследование задачи и найденного решения.
7. **Формулировка ответа.**
8. Учебно-познавательный анализ задачи и ее решения.



**«Если хотите научиться решать задачи, то решайте их!»**  
(Д. Пойа)

- На решение задач по математике затрачивается около половины всего учебного времени.
- Количество задач, решенных учащимися за *10* лет обучения, исчисляется несколькими десятками тысяч.
- Чем старше учащиеся, тем чаще при решении малознакомой задачи они произносят печально-известные слова «...»

# Итоги PISA российских школьников

## По математической грамотности

- 2000 год  
среди 32 стран участниц 21-25 места,
- 2003 год  
среди 40 стран участниц 29-31 места.
- 2006 год  
?

# Причины несформированности умения решать задачи

- 1. Психологическая причина:** основным мотивом решения задач являются внешние мотивы благополучия в виде отметки, престижа, поощрения и т.п., в то время как для успешного обучения решению задач основным мотивом должно быть желание «научиться решать задачи».
- 2. Методическая причина:** для овладения такой сложной деятельностью, как решение задач, должна быть сформирована ориентировочная основа этой деятельности. А именно ее и нет при обучении математики в традиционной методике

# Структура ориентировочной основы умения решать задачи

- ясное представление о сущности и основных объектах задачи;
- владение элементарными действиями и операциями, из которых состоит деятельность решения математических задач;
- знание основных методов решения задач и умение ими пользоваться.

**I блок** ориентировочной основы решения задач -  
минимум знаний о сущности задач и их решений

- **Представление об источниках возникновения (генезисе) задач:**
  - проблемная ситуация – основной источник возникновения задачи;
  - задача – знаковая модель проблемной ситуации;
  - в отличие от реальных ситуаций в задачах можно абстрагироваться от некоторых свойств субъектов или объектов, поэтому задачи можно придумывать и переделывать.

# I блок ориентировочной основы решения задач - минимум знаний о сущности задач и их решений

- **Знание о структуре задачи:**

- в каждой задаче рассматривается один или несколько объектов;
- относительно каждого объекта указываются количественные или качественные характеристики в виде высказываний, принимаемых за истинные;
- высказывания или высказывательные формы о свойствах объекта составляют условие задачи;
- задача обязательно имеет вопрос или требование.

# I блок ориентировочной основы решения задач - минимум знаний о сущности задач и их решений

- **Умение разворачивать условие и заключение в систему взаимосвязанных высказываний:**
  - текст задачи дается, как правило, в свернутом виде;
  - для разворачивания условия или заключения удобно вводит обозначения, схемы, таблицы, чертежи, и т.п.;
  - очень часто следует рассматривать неявно заданные, но предполагаемые условия.

# I блок ориентировочной основы решения задач - минимум знаний о сущности задач и их решений

- **Понимание сущности процесса решения задачи:**

- решить математическую задачу – это значит найти такую последовательность общих положений теории, применение которой к условию задачи или промежуточным результатам (т.е. к следствиям условий) дает то, что требуется в задаче;
- последовательность положений теории образует базу (обоснование) решения;
- решение задачи состоит из определенных этапов, каждый из которых имеет важное значение для овладения умением решать задачи.



## II блок ориентировочной основы решения задач - основные действия и операции, входящие в состав умения решать задачи

- **Владение умениями**

- расчленять текста задачи на элементарные условия и требования;
- устанавливать объекты задачи и их характеристики;
- определять характер объектов и связи между ними как явные, так и неявные;
- составлять репрезентативные модели задачи (схемы, чертежи, таблицы и т.п.);
- составлять решающие модели задачи (вычислительные формулы, уравнения или их системы);
- анализировать полученные решения;
- формулировать ответ.

### III блок ориентировочной основы решения задач - общие методы решения задач

**Общая идея**, лежащая в основе всех методов и способов решения задач: чтобы решить новую задачу, нужно свести ее к одной или нескольким ранее решенным задачам

**Способ решения** – совокупность действий для решения конкретной задачи

**Метод решения** – общая схема, на которой строятся способы решения

### III блок ориентировочной основы решения задач - общие методы решения задач

**Метод разбиения задачи на подзадачи** – суть заключается в том, что сложную задачу разбивают на несколько простых, по возможности стандартных задач, при последовательном решении которых решается данная задача

Разбиение  
на подзадачи

Разбиение  
условия

Разбиение  
требования

Разбиение  
объекта

## III блок ориентировочной основы решения задач - общие методы решения задач

Следует иметь в виду, что

- Для решения многих задач применяется не один, а сразу несколько общих методов.
- Для решения многих задач имеется не один, а несколько способов.
- Способ решения зависит от применяемых общих методов и последовательности их применения.
- Существуют и некоторые менее общие методы или приемы (например, метод оценок или метод исчерпывающих проб).

### III блок ориентировочной основы решения задач - общие методы решения задач

**Метод преобразования задачи** – суть заключается в том, что с помощью какого-либо приема задача преобразуется в более простую, понятную или известную, но в **эквивалентную задачу**

Замена  
эквивалентной задачей

Замена  
с сохранением языка

Замена  
с изменением языка

### III блок ориентировочной основы решения задач - общие методы решения задач

**Метод введения (построения) вспомогательных элементов** – суть метода в расширении числа объектов задачи. Этот метод применяется, если имеются неопределенные элементы или если связь между элементами явно не видна.

Введение  
дополнительного  
элемента

Для придания  
задаче определенности

Для сближения  
данных и искомого

## **Вывод:**

**Умение решать задачи,  
с позиций современных  
требований  
к процессу обучения,  
должно рассматриваться как  
результат синтеза  
знаний и умений**

# Основные направления совершенствования методики обучения учащихся решению задач

- Преодоление стихийности формирования ориентировочной основы решения задач, создание прочной ориентировочной основы для решения задач
- Смещение акцента с дидактической на познавательную функцию обучения решению задач
- Формирование у учащихся не только частных умений решения типовых задач, но и формирование и развитие у них **общих умений** решения любых математических (в том числе и прикладных) задач
- Дифференциация процесса обучения решению



# Формы организации обучения решению задач

## Фронтальное решение:

- фронтальное устное решение задач по готовым записям или чертежам;
- фронтальное решение задачи с записью хода решения на доске учителем или отдельными учениками;
- самостоятельное решение с последующей фронтальной проверкой

## Индивидуальное решение:

- самостоятельное выполнение общих заданий с оказанием дифференцированной помощи;
- самостоятельное решение дифференцированных заданий с последующим обсуждением способов решения;
- домашнее решение задач;

# Особенности решения учебной математической задачи

**Учебно-познавательный анализ** –  
важнейший этап решения учебной задачи,  
включающий:

- обсуждение действий поиска решения (как возникла идея решения? Что помогло найти решение?);
- выявление связей с ранее решенными задачами;
- поиск и осуществление других способов решения, их сравнение и выбор оптимального с точки зрения затрат решения;
- фиксация поучительных выводов из проделанной работы (в каких случаях можно использовать найденный способ или прием

Благодарю за  
внимание!