Метод неопределенных коэффициентов. Теорема о рациональном корне многочлена с целыми коэффициентами.

§ 33. МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ. ТЕОРЕМА О РАЦИОНАЛЬНОМ КОРНЕ МНОГОЧЛЕНА С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Вы ознакомитесь с методом неопределенных коэффициентов;
научитесь применять его при разложении многочлена на множители; применять теорему о рациональном корне многочлена с одной переменной с целыми коэффициентами для нахождения его корней.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Метод неопределенных коэффициентов

Для разложения многочленов третьей и четвертой степени можно использовать метод неопределенных коэффициентов.

В основе метода используют утверждения:

1. Два многочлена равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень и равны их соответствующие коэффициенты.

ВЫ ЗНАЕТЕ: Два многочлена равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень и соответствующие коэффициенты равны, если:

$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$, где $a_n \neq 0$;

$Q(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + ... + b_1x + b_0$, где $b_m \neq 0$, то $P(x) = Q(x)$ при условии:

1) ст. $P(x)$ = ст. $Q(x)$, т. е. $m = n$,

2) $a_n = b_m$, $a_{n-1} = b_{m-1}$, $a_{n-2} = b_{m-2}$, ..., $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$.

2. Любой многочлен третьей степени можно разложить на множители: один из них является многочленом первой степени, другой — многочленом второй степени:

$$a_nx^3 + a_{n-1}x^2 + a_{n-2}x + a_{n-3} = (x - d) \cdot (ax^2 + bx + c).$$

3. Любой многочлен четвертой степени можно разложить на два множителя, каждый из которых является многочленом второй степени:

$$a_nx^4 + a_{n-1}x^3 + a_{n-2}x^2 + a_{n-3}x + a_{n-4} = (ax^2 + bx + c)(mx^2 + px + k).$$

ПРИМЕР

1. Разложим на множители многочлен $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Решение. Используя метод неопределенных коэффициентов, получим: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - d)(ax^2 + bx + c)$.

В правой части равенства раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. Получим равенство $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = ax^3 + (b - ad)x^2 + (c - bd)x - dc$.

Используя условия равенства двух многочленов одинаковой степени — равенство соответствующих коэффициентов, получим систему:

$$\begin{cases} a = 1, \\ b - ad = -2, \\ c - bd = -5, \\ dc = -6. \end{cases}$$

Поскольку $dc = -6$, то возможны случаи:

1) $d = -3$, $c = 2$, 2) $d = -2$, $c = 3$, 3) $d = 3$, $c = -2$, 4) $d = 2$, $c = -3$, 5) $d = -1$, $c = 6$, 6) $d = 1$, $c = -6$, 7) $d = 6$, $c = -1$, 8) $d = -6$, $c = 1$.

Рассматривая последовательно эти случаи, находим, что системе удовлетворяют числа: $a = b = 1$, $d = 3$, $c = -2$ и $a = 1$, $b = -1$, $c = -6$, $d = 1$.

Тогда $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x^2 + x - 2)$ и $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6)$.

Решив уравнение $x^2 + x - 2 = 0$, найдем корни: -2 и 1, поэтому $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x + 2)(x - 1)$.

Решив уравнение $x^2 - x - 6 = 0$, найдем корни: 3 и -2, поэтому $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$.

Теорема 1. *Если целое число k является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то свободный член делится на k.*

По условию многочлен $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$, имеет корень k. Надо доказать, что $a_0 \vdots k$.

Доказательство. Поскольку k — корень, то $P(k) = 0$, т. е.

$$a_nk^n + a_{n-1}k^{n-1} + a_{n-2}k^{n-2} + \dots + a_1k + a_0 = 0.$$

$$a_0 = k\,\underbrace{(-a_nk^{n-1} - a_{n-1}k^{n-2} - a_{n-2}k^{n-3} - \dots - a_1)}_{\text{целое число}}.$$

Это означает, что $a_0 \vdots k$.

На теореме основан алгоритм поиска целых корней многочлена с целыми коэффициентами.

АЛГОРИТМ

1) Выписать все делители свободного члена многочлена;

2) вычислить значения многочлена всех делителей свободного члена многочлена;

3) выписать делители свободного члена, при которых значения многочлена равны нулю — корни многочлена.

Теорема 1. *Если целое число k является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то свободный член делится на k.*

По условию многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$, имеет корень k. Надо доказать, что $a_0 \vdots k$.

Доказательство. Поскольку k — корень, то $P(k) = 0$, т. е.

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + a_{n-2} k^{n-2} + ... + a_1 k + a_0 = 0.$$

$$a_0 = \underbrace{k\left(-a_n k^{n-1} - a_{n-1} k^{n-2} - a_{n-2} k^{n-3} - ... - a_1\right)}_{\text{целое число}}.$$

Это означает, что $a_0 \vdots k$.

На теореме основан алгоритм поиска целых корней многочлена с целыми коэффициентами.

АЛГОРИТМ

1) Выписать все делители свободного члена многочлена;

2) вычислить значения многочлена всех делителей свободного члена многочлена;

3) выписать делители свободного члена, при которых значения многочлена равны нулю — корни многочлена.

ПРИМЕР

2. Найдем целые корни многочлена $P(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$.

Решение. Пусть целое число k — корень $P(x)$, тогда по теореме $3 \vdots k$.

$k = \pm 1$; $k = \pm 3$.

$P(1) = 1 + 1 - 6 - 14 - 11 - 3 \neq 0$. Значит, число 1 не является корнем $P(x)$.

$P(-1) = 1 - 1 + 6 - 14 + 11 - 3 = 0$. Значит, число -1 является корнем $P(x)$.

$P(3) = 3^5 + 3^4 - 6 \cdot 3^3 - 14 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 - 3 = 3 \cdot (81 + 27 - 54 -$
$- 42 - 11 - 1) = 0$. Значит, число 3 является корнем $P(x)$.

$P(-3) = -3^5 + 3^4 + 6 \cdot 3^3 - 14 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 - 3 = 3 \cdot (-81 + 27 + 54 -$
$- 42 + 11 - 1) = -32$. Значит, число -3 не является корнем $P(x)$.

Ответ: -1; 3.

1. В чем заключается суть метода неопределенных коэффициентов?
2. Имеет ли приведенный многочлен рациональные корни, если он не имеет целых корней?
3. Что означают предложения: “Корень многочлена равен нулю”, “Значение многочлена равно нулю”?

Упражнения

А

33.1. Какие числа могут быть целыми корнями многочлена:
1) $x^3 - 2x^2 - 4x + 3$; 2) $x^3 - 5x^2 - 6x + 4$;
3) $2x^3 - 3x^2 - 8x - 5$; 4) $3x^3 - 2x^2 - 7x - 6$?

33.2. Какие числа могут быть целыми корнями многочлена:
1) $2x^3 - 2x^2 - 5x + 6$; 2) $2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$;
3) $2x^3 + 3x^2 - 7x - 10$; 4) $x^3 - 3x^2 + 7x - 6$?

33.3. Разложите на линейные множители многочлен:
1) $x^3 - 2x^2 - x + 2$; 2) $x^4 - 13x^2 + 36$; 3) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.