УГАТУ

Лекция №7

АСИММЕТРИЧНЫЕ АЛГОРИТМЫ

Дисциплина: Криптографические методы защиты информации
Преподаватель: Миронов Константин Валерьевич
Поток: БПС-3, ИКТ-5
Учебный год: 2020/21

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Содержание лекции

- **Базовые операции асимметричной криптографии**
  - **Генерация случайных простых чисел**
  - **Операции по модулю целого числа**
  - **Поля, группы, подгруппы**
  - **Контроль правильности вычислений**
- Алгоритм Диффи-Хеллмана
- Алгоритм RSA
- Алгоритм DSA

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Общие сведения

Асимметричная криптография

Основана на вычислительной сложности задач:

- **Дискретное логарифмирование** целых чисел: если $y = \alpha^x \ mod \ p$, где p – большое простое число, то вычислительно невозможно определить x, зная y, α и p
- **Факторизация больших чисел**: если $n = p * q$, где p и q – большие простые числа, то вычислительно невозможно определить p и q, зная n
- Дискретное логарифмирование в поле **эллиптической кривой**

Особенности:

- Сложность может существенно снизиться при применении квантовых вычислений, т.е. асимметричные алгоритмы потенциально уязвимы к квантовому криптоанализу
- Время выполнения операций в асимметричной криптографии зависит от данных, т.е. асимметричные алгоритмы потенциально уязвимы к тайминг-атакам

УГАТУ
Уфимский государственный авиационный технический университет

Генерация случайных простых чисел

- Частота простых чисел уменьшается с порядком
  - В промежутке между числами n/2 и n вероятность, что случайное число будет простым, составляет примерно 1/ln(n)
  - Пример: вероятность, что случайное число длиной 2000 бит будет простым, составляет ~1/1386
  - В асимметричной криптографии используются простые числа длиной 1024-4096 бит (алгоритм RSA) или 2048-8192 бит (алгоритм Диффи-Хеллмана)
- Генерируются случайные нечетные числа в нужном диапазоне и проверяются на простоту
  - При генерации в старший и младший биты записываются единицы, в остальные биты записываются случайные данные
- Проверка случайного числа на простоту:
  - Проверяется, делится ли оно на числа из **списка малых простых чисел**
  - Если нет, то число проверяется с помощью **теста Рабина-Миллера**

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Генерация случайных простых чисел

Список малых простых чисел

- Содержит все простые числа от 2 до некоторого значения
- С вычислительной точки зрения нецелесообразно составлять список с максимальным значением, большим чем 2^{20}
- Можно взять готовый список, либо быстро составить его при помощи алгоритма **Решето Эратосфена**

шаг 1. в список заносятся все числа от 1 до max

шаг 2. для каждого i в списке

для j от 2 до [max/i]

ЕСЛИ i*j в списке ТО исключить i*j из списка

- В результате все составные числа исключаются, все простые - остаются

Генерация случайных простых чисел

Тест Рабина-Миллера

- Вначале генерируются два числа t и s, удовлетворяющие условиям:
  - s - нечетное
  - $2^t s = p - 1$ где p – предполагаемое простое число
- Алгоритм генерации s и t:

```
s = p – 1;
t = 0;
ПОКА s mod 2 = 0
        s = s / 2;
        t = t + 1;
КОНЕЦ
```

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Генерация случайных простых чисел

Тест Рабина-Миллера

- Выбирается случайное число a (**базис**) от 2 до p и выполняется проверка:

```
i = 0;
v = a^s mod p; // наиболее ресурсозатратная операция
ЕСЛИ v = 1 ТО ПРОВЕРКА ПРОЙДЕНА
ИНАЧЕ ПОКА v != t – 1
        ЕСЛИ i = t – 1 ТО ПРОВЕРКА НЕ ПРОЙДЕНА
        ИНАЧЕ
                v = v^2 mod p;
                i = i + 1;
        КОНЕЦ
КОНЕЦ
ПРОВЕРКА ПРОЙДЕНА
```

Простое p проходит проверку для всех базисов, составное – для 25%

Проверка проводится много раз с разными базисами

Рекомендуется проверка на 64 базисах, тогда вероятность ошибки 2^{-128}

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Операции по модулю целого числа

- Запись 8 mod 7 = 1 равнозначна записи 8 = 1 mod 7
- Если модуль является степенью 2, то при сложении/вычитании/умножении достаточно игнорировать разряды старше чем двоичный логарифм модуля
- Сложение/вычитание – достаточно выполнить операцию в целых числах, а затем (если нужно) один раз отнять или прибавить модуль

Операции по модулю целого числа

Умножение

- Сначала выполняется целочисленное умножение, затем вычисляется остаток от целочисленного деления результата на модуль [целочисленное деление ресурсозатратно]
- Ускоренный алгоритм для простого модуля – **умножение Монтгомери**
  - Функция $C = MontPro(A, B, p) = \left(A * B * 2^{-k}\right) mod\, p$ если выполняются условия:
    - p – нечетное число,
    - $A * B < (p-1)^2$,
    - k –число двоичных разрядов в p
  - Как посчитать результат $C = (A * B) mod\, p$ с использованием функции $MontPro$:

    $K = 2^{2k} mod\, p$ // здесь все же придется считать остаток, но только один раз для каждого модуля

    $A^* = MontPro(A, K, p)$

    $B^* = MontPro(B, K, p)$

    $C^* = MontPro(A^*, B^*, p)$

    $C = MontPro(C^*, 1, p)$

Операции по модулю целого числа

Умножение Монгомери

- Функция MontPro (версия с побитным сдвигом):

  $C = A * B$

  для i от 1 до k

  $C = C + (C \bmod 2) * p$ // т. е. если C нечетное число, к нему прибавляется модуль

  $C = C/2$ //деление в данном случае сводится к стиранию равного нулю правого бита

  если $C > p$ то $C = C - p$

- Версия со сдвигом на w бит (обычно w определяется разрядностью процессора)

...

правые w бит C

$C = C + \boxed{(C \bmod 2^w)} * z * p$ //в результате правые w бит обнуляются

$C = C/2^w$ //деление сводится к стиранию обнуленных правых w бит

...

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Операции по модулю целого числа

Деление по модулю

- При делении используется **расширенный алгоритм Евклида** для поиска **наибольшего общего делителя** двух чисел
- Для входных чисел a и b алгоритм возвращает 3 параметра: d (НОД a и b), u и v, удовлетворяющие условию d = ua + vb
- Результат деления вычисляется по формуле: **a/b mod p = a*u mod p**
- Расширенный алгоритм Евклида:

Выполнимо не всегда, но для простых модулей работает

```
a1 = a; b1 = b; u_a = 1; v_a = 0; u_b = 0; v_b = 1;
ПОКА a1 != 0
    q = b1 / a1;
    [ a1; b1 ] = [ b1-q*a1; a1 ];
    [ u_a; v_a; u_b; v_b ] = [ u_b-q*u_a; v_b-q*v_a; u_a; v_a ]
d = b1; u = u_b; v = v_b;
```

Операции по модулю целого числа

Возведение в натуральную степень по модулю простого числа

Функция Диффи-Хеллмана:

$$y = f_{DH}(x, \alpha, p) = \alpha^x \bmod p$$

Свойство 1. Функция одностороння относительно x: нельзя вычислить x даже зная y, α и p. Задача такого вычисления называется **дискретным логарифмированием**

Свойство 2. Функция коммутативна относительно x:

$$\alpha^{x*z} \bmod p = (\alpha^x \bmod p)^z \bmod p = (\alpha^z \bmod p)^x \bmod p$$

Операции по модулю целого числа

Возведение в натуральную степень по модулю простого числа

Рекурсивный алгоритм вычисления $y = f_{DH}(x, \alpha, p) = \alpha^x \ mod \ p$

ЕСЛИ $x = 0$ ТО $y = 1$

ИНАЧЕ-ЕСЛИ $x = 1$ ТО $y = a$

ИНАЧЕ-ЕСЛИ $x = 2$ ТО $y = \alpha^2 \ mod \ p$

ИНАЧЕ-ЕСЛИ x mod 2 = 0 ТО

$$y_0 = \alpha^{\frac{x}{2}} \ mod \ p;$$

$$y = y_0^2 \ mod \ p;$$

ИНАЧЕ

$$y_0 = \alpha^{\frac{x-1}{2}} \ mod \ p;$$

$$y = (\alpha * y_0^2) \ mod \ p;$$

Операции по модулю целого числа

Возведение в натуральную степень по модулю простого числа

Особенности:

- Последовательность $1, \alpha, \alpha^2 \ mod \ p, \dots, \alpha^k \ mod \ p, \dots$ зацикливается после достижения значения $\alpha^q \ mod \ p = 1$. Здесь α называется **образующим элементом**, а q – **порядком**
- **Примитивный элемент** – такое значение α, что порядок равен p-1, а последовательность включает все числа от 1 до p-1
- Для любого α порядок является делителем числа p-1
- Любая такая последовательность является подгруппой мультипликативной группы {1,2,…,p-1} по модулю p

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Поля, группы, подгруппы

- **Конечное поле по модулю p** – множество чисел {0,1,2,…,p-1}
- **Группа** – множество чисел, для которых определена некоторая операция, такая, что результатом ее выполнения над двумя некоторыми элементами, является некоторый третий элемент
  - **Аддитивная группа по модулю p** - {0,1,2,…,p-1} и сложение по mod p
  - **Мультипликативная группа по модулю p** - {1,2,…,p-1} и умножение по mod p
- **Подгруппа** – группа, все члены которой также являются членами большей группы с той же операцией
  - Пример: {2,4,6} – подгруппа мультипликативной группы по mod 8
  - Последовательность $1, \alpha, \alpha^2 \ mod \ p, \ldots, \alpha^{q-1} \ mod \ p$ является подгруппой мультипликативной группы по mod p, где p – простое число и $\alpha^q \ mod \ p = 1$
    - Порядок последовательности равен количеству элементов в наименьшей подгруппе такого типа, к которой относится образующий элемент

УГАТУ
Уфимский государственный авиационный технический университет

Контроль правильности вычислений

- Специализированные библиотеки позволяют относительно быстро производить арифметические операции над большими числами
- Как правило содержат низкоуровневый код, оптимизирующий вычисления на конкретной аппаратной платформе
- Ошибки в вычислениях могут привести к уязвимостям
- Проблема тестирования: работа кода зависит от самих данных, а разнообразие вариантов больше, чем можно протестировать

Подход: **вупинг**

- Вычисления дублируются по модулю случайного секретного простого числа *t* обычно длиной 32, 64 или128 бит
- После каждой операции проверяется, что ее результат, взятый по mod t равен результату дублированных вычислений
- Вероятность, что при вупинге не будет обнаружена случайная ошибка, примерно равна 1/t

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Содержание лекции

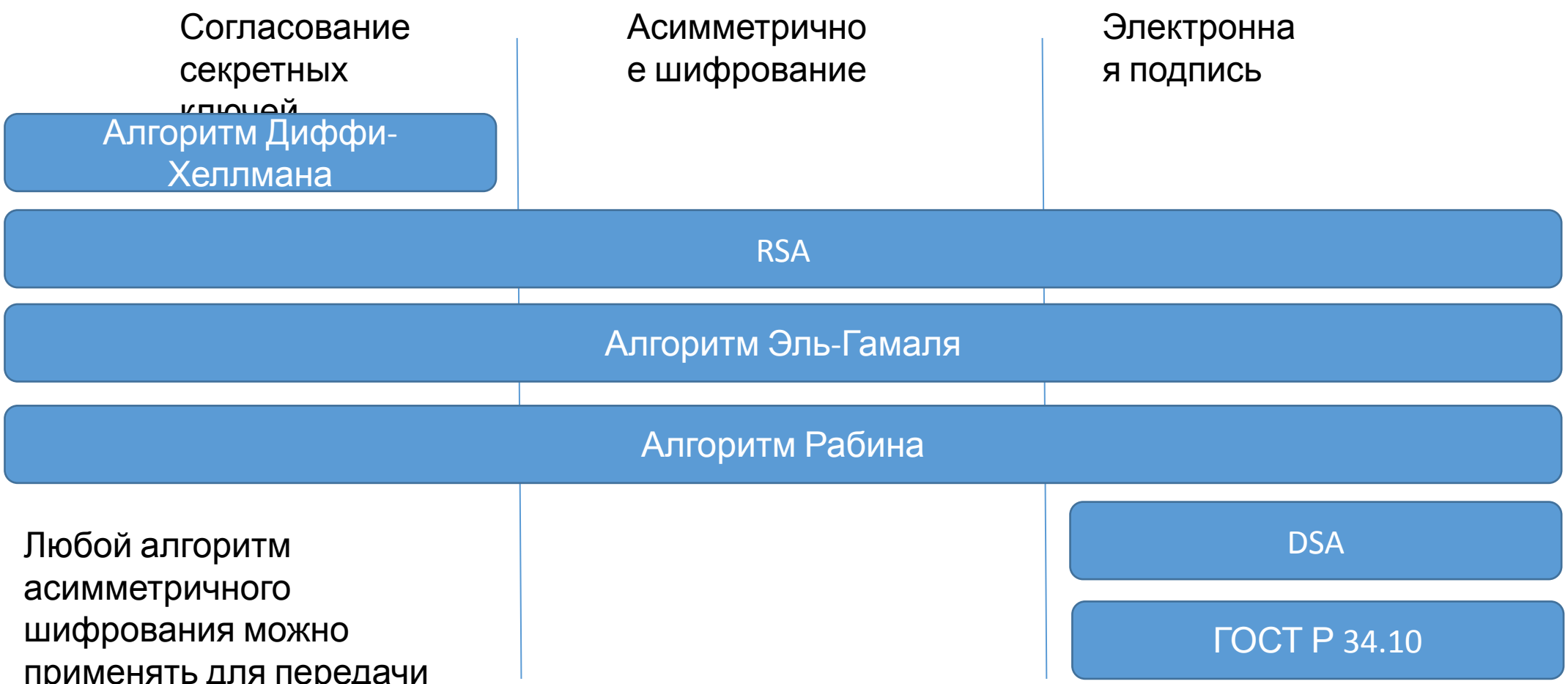
- Базовые операции асимметричной криптографии
- **Алгоритм Диффи-Хеллмана**
  - **Описание алгоритма**
  - **Выбор параметров**
- Алгоритм RSA
- Алгоритм DSA

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Общие сведения

Асимметричная криптография



Любой алгоритм асимметричного шифрования можно применять для передачи секретных ключей в зашифрованном виде

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Алгоритм Диффи-Хеллмана

Используются операции в мультипликативной группе по mod p, где p – простое число длиной 2048-8192 бит

шаг 1. Алиса генерирует случайный ключ x_A и вычисляет $y_A = f_{DH}(x_A, \alpha, p)$. Боб генерирует случайный ключ x_B и вычисляет $y_B = f_{DH}(x_B, \alpha, p)$.

шаг 2. Алиса и Боб обмениваются y_A и y_B по открытому каналу.

шаг 3. Алиса и Боб вычисляют общий ключ шифрования $y_{AB} = f_{DH}(x_A, y_B, p) = f_{DH}(x_B, y_A, p)$.

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Алгоритм Диффи-Хеллмана

- Полученный общий ключ затем преобразуется в ключ шифрования с помощью KDF
- Алгоритм может использоваться при количестве абонентов больше 2
  - «Цифровая телефонная книга» – для каждого i-го абонента указывается его y_i
  - Абонент j при необходимости установить связь с i вычисляет y_{ij}
- **Проблема**: если основание степени образует подгруппу с малым порядком, то множество возможных значений значений y_A или y_B может оказаться достаточно невелико, чтобы их можно было подобрать полным перебором
  - Необходим алгоритм выбора основания степени, дающего высокий порядок
  - Необходим алгоритм проверки основания степени на высокий порядок

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Алгоритм Диффи-Хеллмана

Выбор параметров: подгруппа с заданным порядком

Метод позволяет генерировать $\{\alpha, p\}$ такие, что порядок q будет иметь заданную длину:

шаг 1. Сгенерировать случайное простое число q заданной длины

шаг 2. Сгенерировать случайное четное число N длиной length(N) = length(p) – length(q)

шаг 3. Проверить p=Nq+1 на простоту

шаг 4. Повторять шаги 2 и 3 пока p не станет простым

шаг 5. Сгенерировать случайное число $g \in \{1, \dots, p\}$

шаг 6. Рассчитать $\alpha = g^N \bmod p$

шаг 7. Проверить, что $\alpha^q \bmod p = 1$ и $\alpha \neq 1$

шаг 8. Повторять шаги 5-7 пока α не удовлетворит условиям

шаг 9. Вернуть $\{\alpha, p\}$

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Алгоритм Диффи-Хеллмана

Выбор параметров: подгруппа с заданным порядком

- Длины q и N подбираются по следующему принципу
  - q равно требуемому количеству элементов в подгруппе
  - q длиной 256 бит дает примерно ту же безопасность, что 256-битный ключ симметричного шифрования
  - Длина N подбирается так, чтобы длина p=Nq+1 была 2048-8192 бит
- Метод позволяет упростить вычисление функции Диффи-Хеллмана благодаря свойству:

$$\alpha^e \bmod p = \alpha^{e \bmod q} \bmod p$$

- Помимо p и α общедоступной информацией должно быть значение q

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Алгоритм Диффи-Хеллмана

Выбор параметров: подгруппа с заданным порядком

Проверка параметров алгоритма:

- Проверка $\{\alpha, p, q\}$
  - Проверить на простоту числа p и q
  - Проверить, что (p-1) mod q = 0
  - Проверить, что $\alpha^q mod\ p = 1$ и $\alpha \neq 1$
- При получении от Алисы y_A Боб должен убедиться, что $y_A^q\ mod\ p = 1$
  - Операции $y_A^q\ mod\ p$ и $y_A^{X_b}\ mod\ p$ можно выполнить одновременно с использованием **эвристики аддитивной последовательности** [additive sequence heuristics], что позволяет сэкономить ~250 операций умножения при использовании 256-битной подруппы и 2048-битного модуля
- Кроме того, все параметры нужно проверять на соответствие их величины условиям

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Содержание лекции

- Базовые операции асимметричной криптографии
- Алгоритм Диффи-Хеллмана
- **Алгоритм RSA**
  - **Описание алгоритма**
  - **Особенности практической реализации**
  - **Распределение ключей с помощью RSA**
- Алгоритм DSA

Алгоритм RSA

Генерация ключей

шаг 1. Сгенерировать простые числа p и q одинаковой заданной длины

шаг 2. Вычислить $n = pq$ и t=НОК$(p-1,q-1)$

шаг 3. Выбрать число e, взаимно простое с n

шаг 4. Вычислить $\mathrm{d} = {}^{1}/_{e} \ mod \ t$

- НОК$(p-1,q-1)$ вычисляется по формуле $\mathrm{НОК}(a,b) = \frac{ab}{\mathrm{НОД}(a,b)}$
- НОД(a,b) вычисляется с помощью алгоритма Евклида
- Безопасной длиной p и q считается 1024-4096 бит
- В теории предполагается, что:
  - ОК$=\{e,n\}$
  - ЗК$=\{d\}$
  - p, q, t – секретные параметры, стираемые после генерации ЗК

Алгоритм RSA

Зашифровка и расшифровка

$$ШТ = ОТ^e \ mod \ n$$
$$ОТ = ШТ^d \ mod \ n$$

Постановка и проверка электронной подписи

$$ЭП = ОТ^d \ mod \ n$$
$$ОТ = ЭП^e \ mod \ n$$

Алгоритм RSA

Особенности практической реализации

- Значение e выбирается небольшим (часто e=3 для ЭП и e=5 для шифрования), чтобы снизить ресурсоемкость вычислений
  - Под ОК понимается n
  - Зашифрование и проверка ЭП намного менее ресурсозатратны, чем расшифование и постановка ЭП
  - Разный показатель для шифрования и подписи позволяет шифровать текст, а затем его подписывать; иначе подписывание равнозначно расшифровке
- Зная n и любой из параметров {p,q,t,d} можно рассчитать оставшиеся 3 параметра из {p,q,t,d}
- Расшифровку ШТ (постановку ЭП) можно ускорить примерно в 3-4 раза, зная p и q и используя **теорему Сунь Цзы** (китайскую теорему об остатках [Chinese Remainder Theorem, CRT])

Алгоритм RSA

Особенности практической реализации

Теорема Сунь Цзы [формулировка, используемая в RSA]: число x, взятое по модулю $n = p * q$ (где p и q – простые числа) взаимно-однозначно соответствует паре $\{a, b\}$ где $a = x \ mod \ p$ и $b = x \ mod \ q$

Формула Гарнера для вычисления x на основе $\{a, b\}$

$$x = \Big(\big((a - b)(q^{-1} \ mod \ p)\big) \ mod \ p\Big) q + b$$

Пара $\{a, b\}$ является **CRT-представлением числа** x

$$x \leftrightarrow \{a, b\}$$
$$(x + y) mod \ n \leftrightarrow \{(a_x + a_y) mod \ p, (b_x + b_y) mod \ q\}$$
$$(xy) mod \ n \leftrightarrow \{(a_x a_y) mod \ p, (b_x b_y) mod \ q\}$$
$$(x^y) mod \ n \leftrightarrow \{(a_x^{y \ mod \ (p-1)}) mod \ p, (b_x^{y \ mod \ (q-1)}) mod \ q\}$$

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Алгоритм RSA

Особенности практической реализации

Процедура генерации ключей с учетом практических соображений:

шаг 1. Сгенерировать нечетное число p заданной длины

шаг 2. Проверить, что p $mod\ 3\ \neq 1$ и p $mod\ 5\ \neq 1$

шаг 3. Проверить, что p - простое

шаг 4. Повторять шаги 1-3 пока p не пройдет обе проверки

шаг 5. Повторить шаги 1-4 для числа q

шаг 6. Вычислить $n\ =\ pq$ и $t = (p-1)(q-1)/\text{НОД}(p-1, q-1)$

шаг 7. Вычислить $d_{\text{эп}} = {}^{1}/_{3}\ mod\ t$ и $d_{\text{ш}} = {}^{1}/_{5}\ mod\ t$

$e_{\text{эп}} = 3,\ e_{\text{ш}} = 5$

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Алгоритм RSA

Особенности практической реализации

- Блок шифруемого текста должен иметь чуть меньшую длину, чем n
  - Если намного меньше – для расшифровки будет достаточно взять корень 5-й степени из ШТ
- Блок шифруемого текста перед шифрованием должен быть преобразован к псевдослучайному виду
  - Например – побитное сложение с солью
- При постановке ЭП сначала вычисляется хеш-функция от документа, затем ставится подпись на эту хеш-функцию
  - Чтобы достичь необходимой длины блока на основе хеш-функции можно сгенерировать ПСП
  - либо применить KDF, позволяющую варьировать длину выходного значения

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Алгоритм RSA

Особенности практической реализации

- Атака на *шифр* подбором открытого текста
  - Ева может проверить предположение о значении ОТ, зашифровав его и сравнив с имеющимся ШТ
  - То же относится и к другим асимметричным *шифрам*
- Проверка правильности вычислений
  - Вупинг
  - Проверка при постановке ЭП: после постановки провести процедуру проверки
  - Проверка при шифровании: сгенерировать случайное простое число z и проверить, что $(\text{ШТ} * z^e) mod\, n = (\text{ОТ} * z)^e \, mod\, n$

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Алгоритм RSA

Использование для распределения ключей

- Асимметричное шифрование применяется для передачи ключа симметричного шифрования
- Алиса генерирует случайный блок ОТ, зашифровывает его с помощью RSA на ОК Боба и передает ШТ Бобу
- Боб расшифровывает блок своим ЗК
- Алиса и Боб генерируют ключ симметричного шифрования на основе переданного блока с помощью KDF
- Даже если Еве станет известен ключ симметричного шифрования, это не даст ей информации о ЗК Боба

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Содержание лекции

- Базовые операции асимметричной криптографии
- Алгоритм Диффи-Хеллмана
- Алгоритм RSA
- **Алгоритм DSA**

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Алгоритм DSA

- DSA (Digital Signature Algorithm) свободно распространяемый стандарт, АНБ, 1991
- DSS (Digital Signature Standard) – DSA на хеш-функцию SHA-1
- ECDSA – вариант на эллиптических кривых, 1999
- Сравнение с RSA
  - Не может применяться для шифрования
  - ЗК генерируется случайным образом и в целом генерация ключей проще
  - Постановка подписи по скорости аналогична RSA, проверка медленнее
- Параметры:

  q – простое число той же длины, что и хеш-функция

  p – простое число, величина кратна 64 битам, $(p-1) mod\ q = 0$

  a – число >1, вычисляемое по формуле $a = h^{\frac{p-1}{q}} mod\ p$, где $h < p-1$, обычно $h = 2$

  ЗК – случайное число, меньше, чем q – длина обычно 256

  $ОК = a^{ЗК} mod\ p$ – длина обычно 2048 бит

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Алгоритм DSA

Процедура постановки:

k – секретное случайное число $< q$

$$r = (a^k mod\ p) mod\ q$$

$$s = \frac{hash(\text{ОТ}) + \text{ЗК} * r}{k} mod$$

$$\text{ЭП} = \{r, s\}$$

Процедура проверки:

$$w = 1/s\ mod\ q$$

$$u_1 = (hash(OT) * w) mod\ q$$

$$u_1 = (r * w) mod\ q$$

$$v = (a^{u_1} * OK^{u_1} mod\ p) mod\ q$$

$$v = ?\ r$$

УГАТУ

Уфимский государственный авиационный технический университет

Темы докладов

Универсальные асимметричные криптосистемы

- **Криптосистема Эль-Гамаля**
- **Криптосистема Рабина**

Нормативно-правовое регулирование в области криптографии:

- **Федеральный Закон «Об электронной подписи»**
- **Порядок лицензирования средств криптографической защиты информации в РФ**
- **Нормативно-правовое регулирование криптографии в зарубежных странах** (доклад можно поделить на троих; обязательно нужно осветить особенности регулирования в США, Китая и крупных стран ЕС)