МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Уфимский государственный авиационный технический университет» (ФГБОУ ВО «УГАТУ»)

УГАТУ

ЛЕКЦИОННОЕ ЗАНЯТИЕ

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Старцева Ирина Владимировна,

Уфимский авиационный

Рекомендовано

для обучающихся по направлениям

- 09.02.00 Информатика и вычислительная техника
- 09.02.05 Прикладная информатика (по отраслям)
- 09.02.07 Информационные системы и программирование

План

1. Множества и элементы множеств.
2. Сравнение множеств.
3. Операции над множествами.
4. Диаграммы Эйлера – Венна.
5. Свойства операций над множествами.

1. Множества и элементы множеств

Множество – это фундаментальное понятие не только математики, но и всего окружающего мира. Возьмите прямо сейчас в руку любой предмет. Вот вам и множество, состоящее из одного элемента.

Множество – это совокупность объектов (элементов), которые понимаются как единое целое (по тем или иным признакам, критериям или обстоятельствам). Причём, это не только материальные объекты, но и буквы, цифры, теоремы, мысли, эмоции и т.д.

Обозначают множества прописными латинскими буквами: A, B, … , а его элементы обозначаются строчными латинскими буквами: a, b, ….

Например:

$x \in A$ (x является элементом множества A (" x принадлежит A")),

$x \notin A$ (x не является элементом множества A).

Например:

$A = \{а, б, в, г, д, \dots, э, ю, я\}$ - множество букв русского алфавита

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ - множество натуральных чисел

$C = \{Маша, Таня, Саша, Петя\}$ – множество студентов в 1 ряду

а $\in$ A – буква а принадлежит множеству букв русского алфавита

$\beta \notin$ A – буква β не принадлежит множеству букв русского алфавита

5 $\in$ N – число 5 принадлежит множеству натуральных чисел

5.5 $\notin$ N – число 5.5 не принадлежит множеству натуральных чисел

Множества A и C являются конечными (состоящими из конечного числа элементов), а множество N – это пример бесконечного множества.

Вышеприведённые множества записаны *прямым перечислением* элементов, но это не единственный способ. Многие множества удобно определять с помощью некоторого *признака (ов)*, который присущ всем его элементам.

Например:

N = { n ∈ N | n < 100} – множество натуральных чисел, меньше 100

O = {x | 0 ≤ x ≤ 1} – множество чисел, принадлежащих числовому промежутку [0,1]

Множество элементов x, удовлетворяющих свойству P(x) обозначается $\{x|P(x)\}$.

Запомните: длинная вертикальная черта выражает словесный оборот «которые», «таких, что». Довольно часто вместо неё используется двоеточие: – давайте прочитаем запись более формально: «множество элементов n, принадлежащих множеству N натуральных чисел, таких, что n < 100».

Кроме того, в теории и на практике рассматриваются так называемое пустое множество и универсальное множество.

Пустое множество – это множество, не содержащее ни одного элемента, обозначается оно символом: Ø.

Универсальное множество U (универсум) – множество, из которого берутся элементы в конкретном рассуждении. U – множество, рассматриваемое как наиболее общее в данной ситуации.

2. Сравнение множеств

Множество G является подмножеством множества A, если каждый элемент множества G принадлежит множеству A. Иными словами, множество G содержится во множестве A:

$G \subset A$

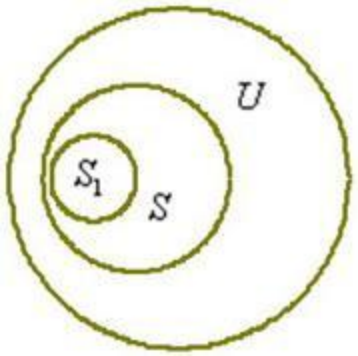
Значок $\subset$ называют значком включения.

Вернёмся к примеру, в котором A – это множество букв русского алфавита. Обозначим через G – множество его гласных букв. Тогда: $G \subset A$

Также можно выделить подмножество согласных букв и вообще – произвольное подмножество, состоящее из любого количества случайно (или неслучайно) взятых кириллических букв. В частности, любая буква кириллицы является подмножеством множества A.

Отношения между подмножествами удобно изображать с помощью условной геометрической схемы, которая называется кругами Эйлера.

Пусть S_1 – множество студентов в 1-м ряду, S – множество студентов группы, U – множество студентов университета. Тогда отношение включений $S_1 \subset S \subset U$ можно изобразить следующим образом:



Типичный пример включений мы наблюдаем при рассмотрении числовых множеств.

Как известно, исторически первыми появились натуральные числа, предназначенные для подсчёта материальных объектов.

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Если к множеству N присоединить те же числа с противоположным знаком и ноль, то получится множество целых чисел:

$Z = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Совершенно понятно, что множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел:

N $\subset$ Z – поскольку каждый элемент множества N принадлежит множеству Z. Таким образом, любое натуральное число можно смело назвать и целым числом.

$A = B$ если они являются подмножествами друг друга, то есть $A \subset B$ и $B \subset A$.

Например:

$A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ - множество четных чисел

$B = \{2n \mid n$ – натуральные числа$\}$

$A \subset B$ и $B \subset A$ следовательно $A = B$.

Мощность конечного множества $|A|$ – это число его элементов. Мощность бесконечного множества равна ∞.

$C = \{\text{Маша}, \text{Таня}, \text{Саша}, \text{Петя}\}$ – множество студентов в 1 ряду

$|C| = 4$

3. Операции над множествами

Пересечение.

Пересечение множеств характеризуется логической связкой И и обозначается значком ∩.

Пересечением множеств A и B называется множество A∩B , каждый элемент которого принадлежит и множеству A, и множеству B. Грубо говоря, пересечение – это общая часть множеств. Например:

A = {i, j, k} B = {k, m}

A∩B = {k}

Если у множеств нет одинаковых элементов, то их пересечение пусто. Например множества Q рациональных и I иррациональных чисел не пересекаются Q ∩ I = Ø.

Объединение.

Объединение множеств характеризуется логической связкой ИЛИ и обозначается значком $\cup$

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, каждый элемент которого принадлежит множеству A или множеству B. Например:

A = {1, 3, 5,7}

B = {5, 10, 15,20}

$A \cup B$ = {1, 3, 5, 7, 10, 15, 20} – нужно перечислить все элементы множеств A и B, причём одинаковые элементы (в данном случае 5 на пересечении множеств) следует указать один раз.

Разность.

Разностью множеств A и B называют множество A\B, каждый элемент которого принадлежит множеству A и не принадлежит множеству B.

Разность A\B читается следующим образом: «a без бэ». И рассуждать можно точно так же: рассмотрим множества A = {a, b, c, d}, B = {a, d, e, f}. Чтобы записать разность , нужно из множества A «выбросить» все элементы, которые есть во множестве B:

A\B = {b, c}

Пример с числовыми множествами:

Z\N = { …, - 3, - 2, - 1, 0} – здесь из множества целых чисел исключены все натуральные, да и сама запись Z\N так и читается: «множество целых чисел без множества натуральных».

Зеркально: разностью множеств B и A называют множество , каждый элемент которого принадлежит множеству B и не принадлежит множеству A.

Для тех же множеств A = {a, b, c, d}, B = {a, d, e, f}.

B\A = {e, f} – из множества B «выброшено» то, что есть во множестве A.

А вот эта разность оказывается пуста: N\Z = Ø. И в самом деле – если из множества натуральных чисел исключить целые числа, то, собственно, ничего и не останется.

Кроме того, иногда рассматривают симметрическую разность AΔB, которая объединяет обе разности:

AΔB = A\B ∪ B\A– иными словами, это «всё, кроме пересечения множеств».

AΔB = {b, c, e, f}

Декартово произведение множеств

Декартовым (прямым) произведением множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар (a, b), в которых элемент $a \in A$, а элемент $b \in B$.

Запишем декартово произведение множеств A = {a, b, c}, B = {1, 2}:

A × B = {(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)} – перечисление пар удобно осуществлять по следующему алгоритму: «сначала к 1-му элементу множества A последовательно присоединяем каждый элемент множества B, затем ко 2-му элементу множества A присоединяем каждый элемент множества B, затем к 3-му элементу множества A присоединяем каждый элемент множества B».

Зеркально: декартовым произведением множеств B и A называется множество всех упорядоченных пар (b, a), в которых $b \in B$, $a \in A$. В нашем примере:

$B \times A = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$

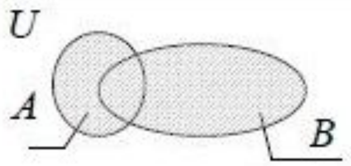
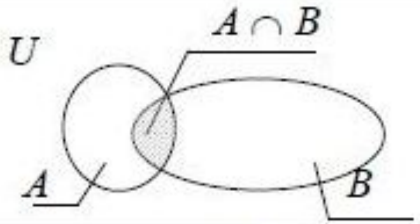
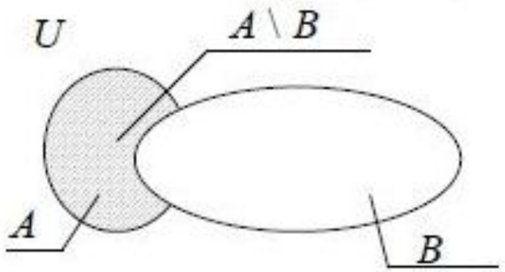
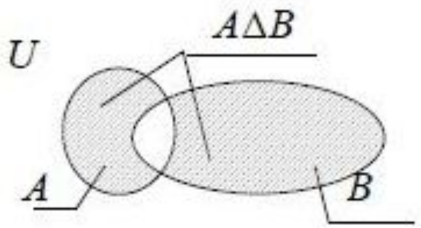
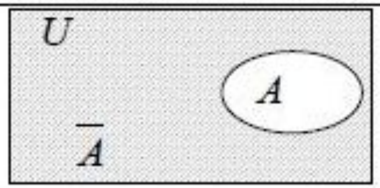
– здесь схема записи аналогична: сначала к «единице» последовательно присоединяем все элементы множества A, затем к «двойке» – те же самые элементы.

Но это чисто для удобства – и в том, и в другом случае пары можно перечислить в каком угодно порядке – здесь важно записать все возможные пары.

Декартово произведение $R \times R$ – это есть не что иное, как множество точек декартовой системы координат X0Y.

4. Диаграммы Эйлера – Венна

Диаграммы Эйлера-Венна – это геометрическое представление множеств. Множество *U* изображается прямоугольником, рассматриваемые множества – фигурами (окружностями). Для выделения результата применяется штриховка.

Название операции и обозначение	Определение	Диаграмма
Объединение $C = A \cup B$	$C = \{c \mid c \in A \text{ или } c \in B\}$	
Пересечение $C = A \cap B$	$C = \{c \mid c \in A \text{ и } c \in B\}$	
Разность $C = A - B$ или $C = A \setminus B$	$C = \{c \mid c \in A \text{ и } c \notin B\}$	
Симметричная разность $C = A \oplus B$ или $C = A \Delta B$	$C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	
Дополнение A в U $C = \overline{A}$	$C = U \setminus A$ $C = \{c \mid c \notin A\}$	

5. Свойства операций над множествами

Объединение и пересечение:

$A \cup B = B \cup A$ – коммутативность

$A \cap B = B \cap A$ – коммутативность

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – ассоциативность

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – ассоциативность

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – дистрибутивность

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивность

$A \cup A = A$ – идемпотентность

$A \cap A = A$ – идемпотентность

$A \cup \overline{A} = U$ – свойство дополнения

$A \cap \overline{A} = \emptyset$ – свойство дополнения

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ - закон де Моргана

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ - закон де Моргана

$A \cup \emptyset = A$ – свойство нуля

$A \cap \emptyset = \emptyset$ – свойство нуля

Дополнение:

$\bar{\bar{A}} = A$ – инволютивность

$A\backslash \mathrm{B} = A \cap \overline{B} = A(A \cap B)$

$A \Delta B = (A \cup B)(A \cap B)$

Разность, симметрическая разность:

$A\backslash \emptyset = A$

$A\backslash \mathrm{A} = \emptyset$

$A \Delta B = B \Delta A$

$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

$A \Delta \emptyset = A$

$A \Delta A = \emptyset$