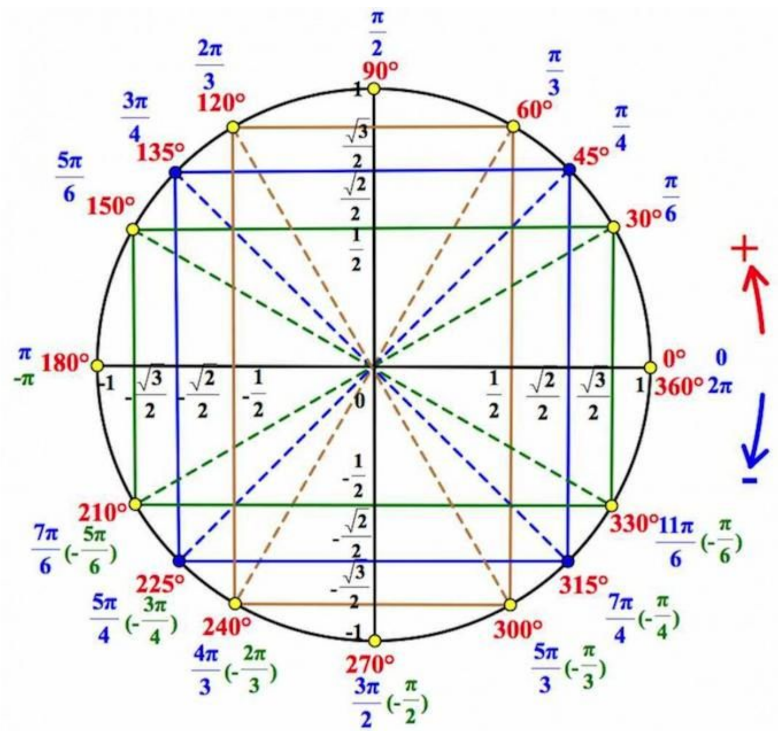
ТРИГОНОМЕТРИЯ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ



Преподаватель:
Махмудов
Кароматулло Азизович

Новосибирск – 2020

ФУНКЦИЯ y = sinx

Если каждому действительному числу x поставлено в соответствие число y, равное синусу угла в x радиан, то говорят, что этим определена функция

$$y = \sin x, \tag{1}$$

называемая **синусом числового аргумента** x.

Областью определения функции (1) является множество всех действительных чисел R, областью изменения — отрезок $[-1; 1]$.

Отметим некоторые свойства функции $y = \sin x$.

1. **Функция $y = \sin x$ нечетная.**
2. **Функция $y = \sin x$ периодическая с главным периодом 2π.**
3. **Функция $y = \sin x$ непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$.**
4. **Функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает, а на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ убывает.**

Для построения графика функции $y = \sin x$ надо для каждого x вычислить соответствующее значение $y = \sin x$ и точки $(x; y)$ отметить на координатной плоскости xOy. Совокупность этих точек образует график функции $y = \sin x$.

Однако эту работу выполнить невозможно, потому что указанных точек бесконечно много. График функции $y = \sin x$ можно построить приближенно, используя свойства этой функции и ее значения для некоторых x.

Построим сначала график функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Приведем таблицу приближенных значений $y = \sin x$ для некоторых значений x из этого отрезка (табл. 1).

Таблица 1

x	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{24}$	$\frac{\pi}{4}$
$y = \sin x$	0	0,13	0,29	0,38	0,50	0,61	0,71

x	$\frac{7\pi}{24}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \sin x$	0,79	0,87	0,92	0,97	0,99	1

график функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

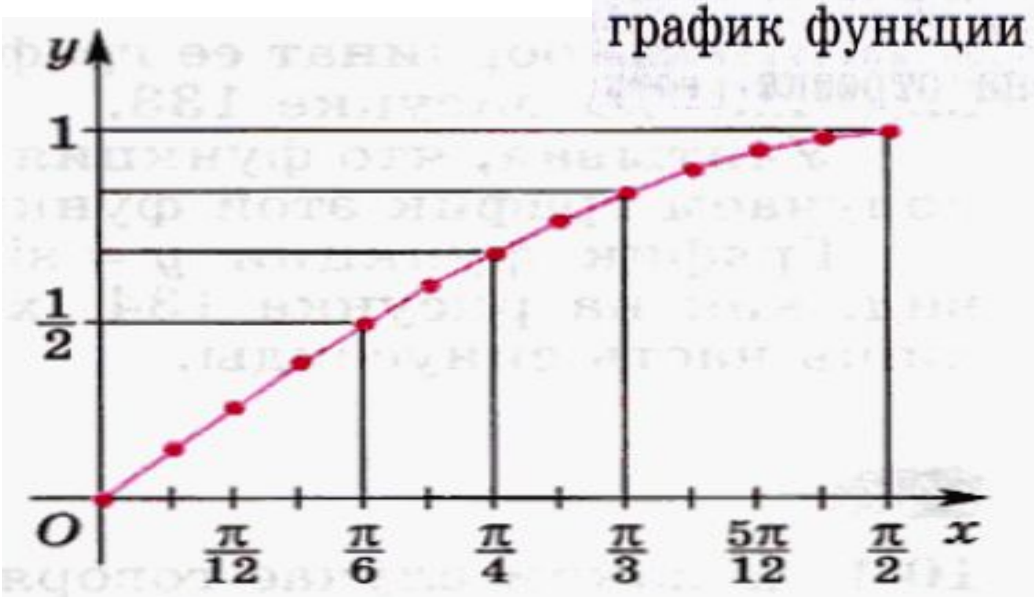
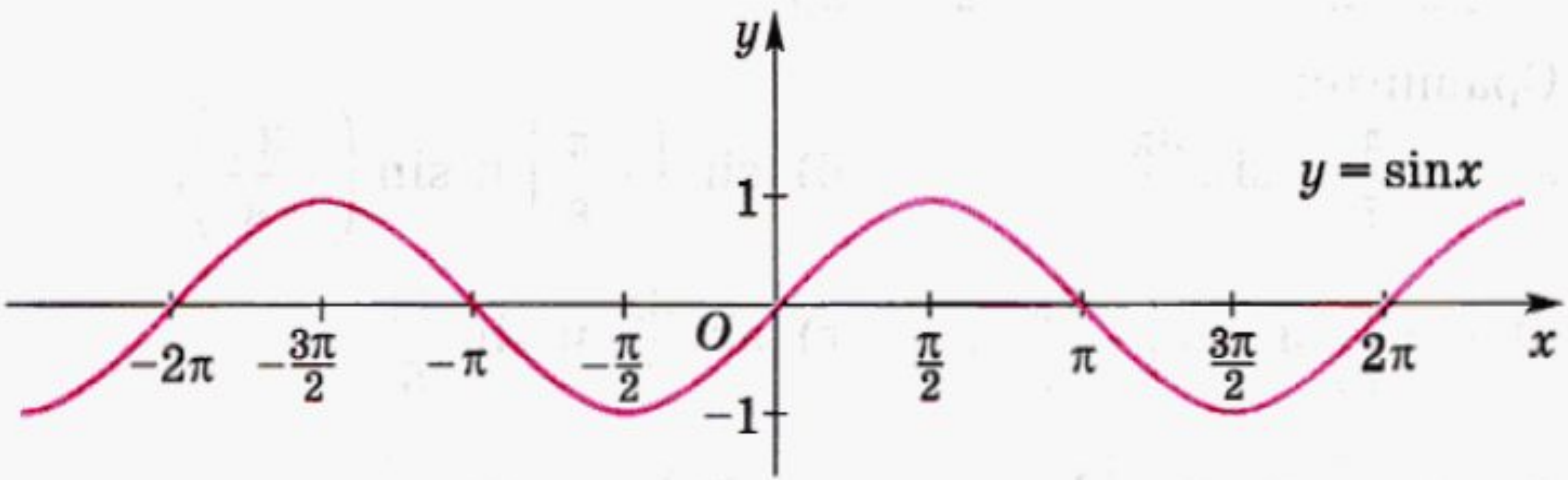


График функции $y = \sin x$ называют **синусоидой.**

Учитывая, что функция $y = \sin x$ периодическая с периодом 2π, получаем график этой функции для всех x.



ФУНКЦИЯ y = cosx

Если каждому действительному числу x поставлено в соответствие число y, равное косинусу угла в x радиан, то говорят, что этим определена функция

$$y = \cos x, \tag{1}$$

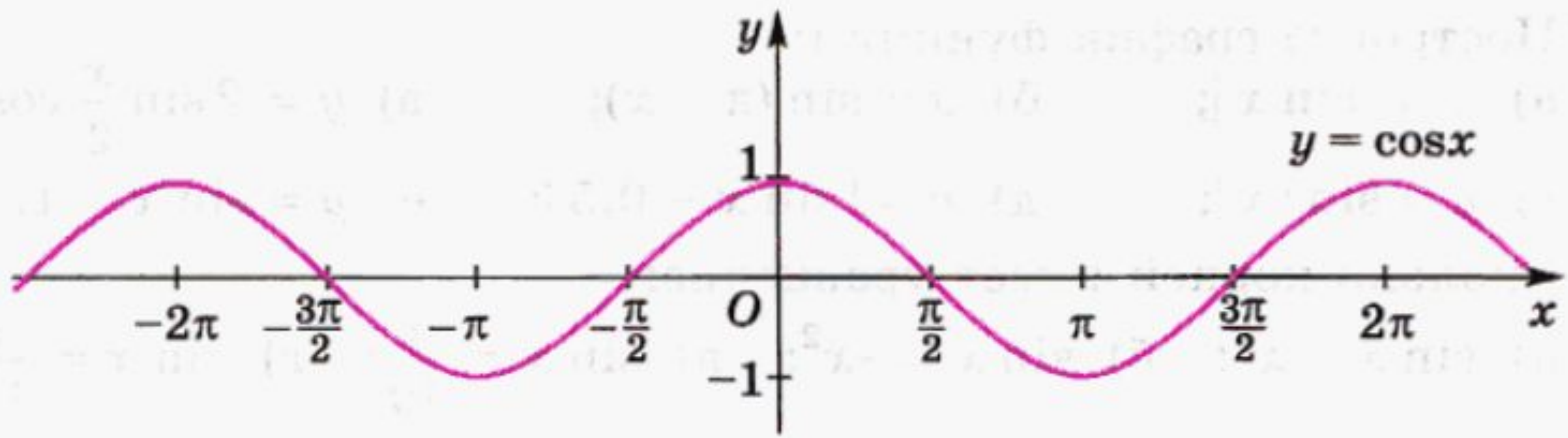
называемая **косинусом числового аргумента** x.

Областью определения функции (1) является множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, областью изменения — отрезок $[-1; 1]$.

Отметим некоторые свойства функции $y = \cos x$.

1. Функция $y = \cos x$ четная.
2. Функция $y = \cos x$ периодическая с главным периодом 2π.
3. Функция $y = \cos x$ непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$.
4. Функция $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ убывает, а на отрезке $[\pi; 2\pi]$ возрастает.

Из свойств 2 и 4 следует, что функция $y = \cos x$ убывает на каждом из промежутков $[0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$, возрастает на каждом из промежутков $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $n \in Z$.

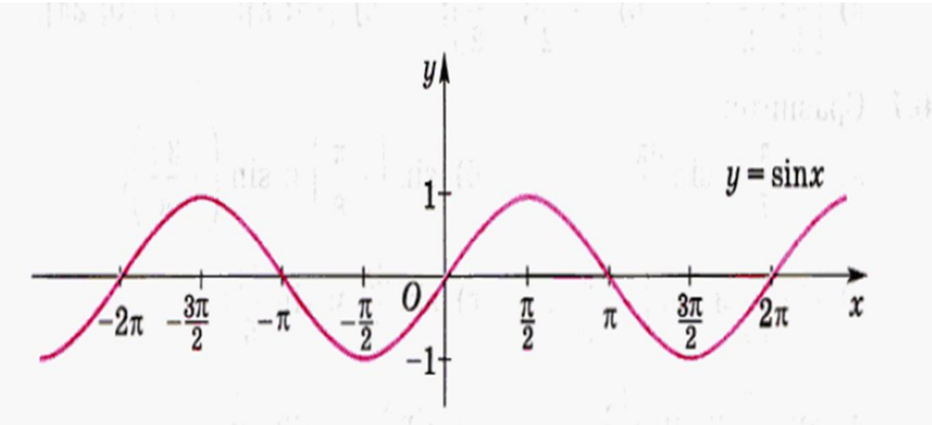


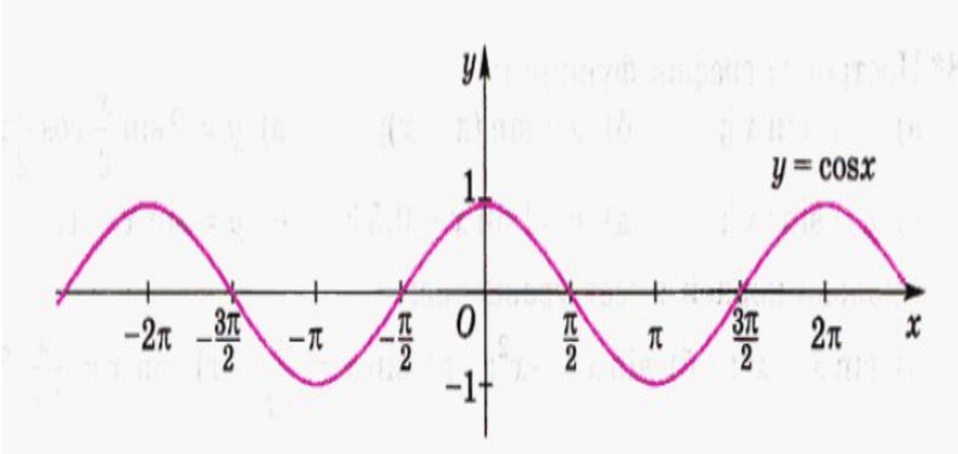
Так как

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin x\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos x = \cos x,$$

то из непрерывности на промежутке $(-\infty; +\infty)$ функции $y = \sin x$ следует непрерывность на промежутке $(-\infty; +\infty)$ функции $y = \cos x$. Кроме того, отсюда же следует, что график функции $y = \cos x$ получается переносом графика функции $y = \sin x$ влево на $\frac{\pi}{2}$,

График функции $y = \cos x$ называют косинусоидой.





ФУНКЦИЯ y = tgx

Если каждому действительному числу x, отличному от $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число, поставлено в соответствие число y, равное тангенсу угла в x радиан, то говорят, что этим определена функция

$$y = \operatorname{tg} x, \qquad (1)$$

называемая **тангенсом числового аргумента** x.

Областью определения функции (1) является множество всех действительных чисел x, отличных от $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$, областью изменения — интервал $(-\infty; +\infty)$.

Отметим некоторые свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

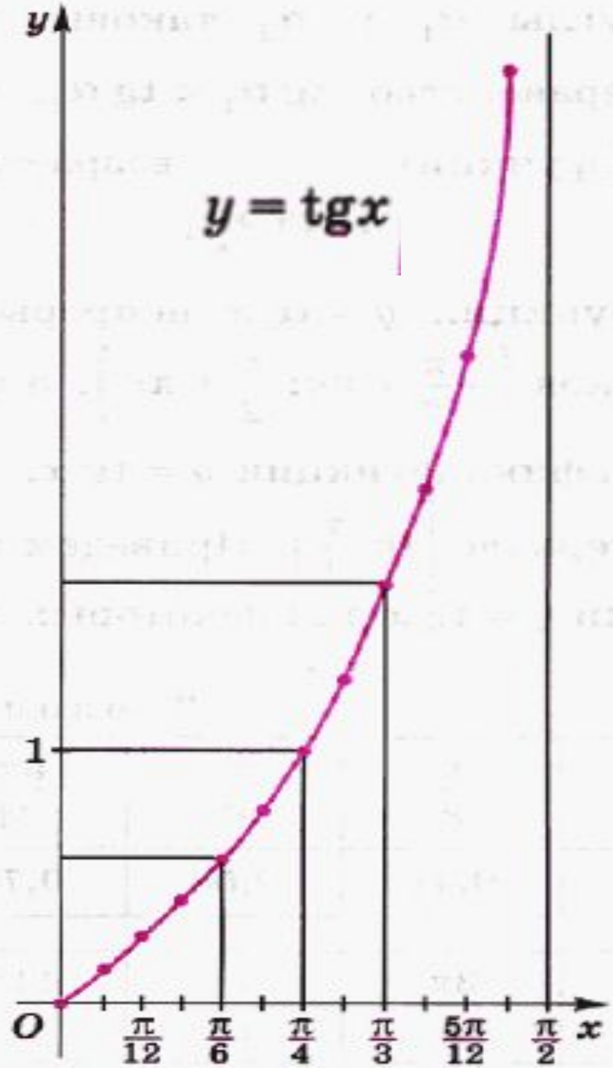
1. Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечетная.
2. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с главным периодом π.
3. Функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
4. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Из свойств 2—4 следует, что функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна и возрастает на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Теперь перейдем к построению графика функции $y = \operatorname{tg} x$.

Построим его сначала на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Приведем таблицу приближенных значений функции $y = \operatorname{tg} x$ для некоторых x из этого полуинтервала (табл. 2).

Отметим эти точки $(x; y)$ на координатной плоскости xOy. Учитывая, что на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывно возрастает от 0 до $+\infty$, соединим отмеченные точки непрерывной линией. Полученную непрерывную кривую (рис. 136) можно рассматривать как приближенный график функции $y = \operatorname{tg} x$ на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.



■ Рис. 136

Таблица 2

x	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{24}$
$y = \operatorname{tg} x$	0	0,13	0,27	0,41	0,58	0,77
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{24}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$
$y = \operatorname{tg} x$	1	1,3	1,73	2,41	3,73	7,6

Наконец, учитывая, что функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π, получим ее график для всех x. График функции $y = \operatorname{tg} x$ называют **тангенсоидой**, он имеет вид, как на рисунке 138, на котором изображена часть графика.

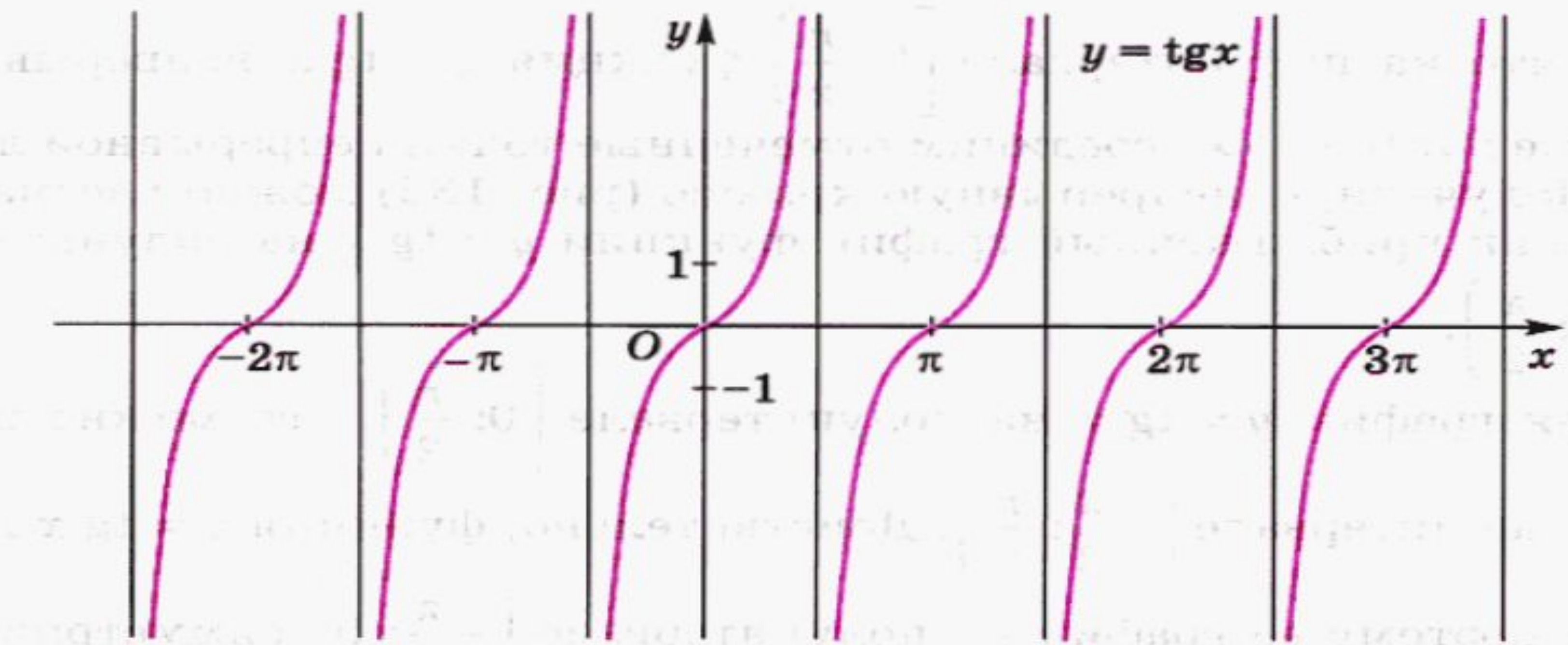


Рис. 138

ФУНКЦИЯ $y = \mathrm{ctg}x$

Если каждому действительному числу x, отличному от $x = \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, поставлено в соответствие число y, равное котангенсу угла в x радиан, то говорят, что этим определена функция

$$y = \mathrm{ctg}\, x, \tag{1}$$

называемая **котангенсом числового аргумента** x.

Областью определения функции (1) является множество всех действительных чисел x, отличных от $x = \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, областью изменения — интервал $(-\infty; +\infty)$.

Отметим некоторые свойства функции (1).

1. **Функция $\mathrm{ctg}\, x$ нечетная.**
2. **Функция $\mathrm{ctg}\, x$ периодическая с главным периодом π.**
3. **Функция $\mathrm{ctg}\, x$ непрерывна на интервале $(0; \pi)$.**
4. **Функция $\mathrm{ctg}\, x$ убывает на интервале $(0; \pi)$.**

Так как

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \qquad (2)$$

а функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то из равенств (2) следует, что функция $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна на интервале $(0; \pi)$. Тем самым показана справедливость свойства 3.

Из свойств 2—4 следует, что функция $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна и возрастает на каждом из промежутков $(0 + \pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Из равенств (2) следует, что график функции $y = \operatorname{ctg} x$ можно получить из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ так: надо перенести его вправо на $\frac{\pi}{2}$, а затем отобразить симметрично относительно оси Ox. Поэтому график функции $y = \operatorname{ctg} x$ будет иметь вид, как на рисунке 139. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ называют **котангенсоидой**.

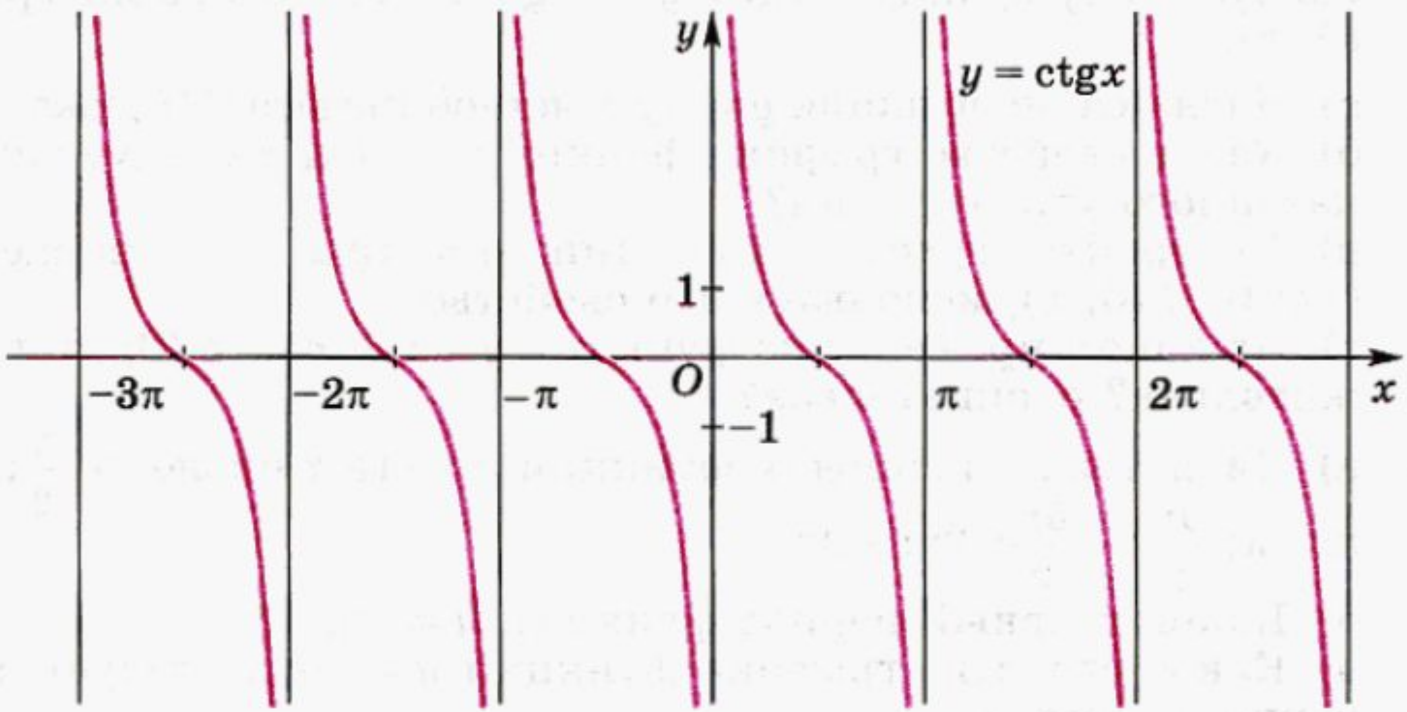
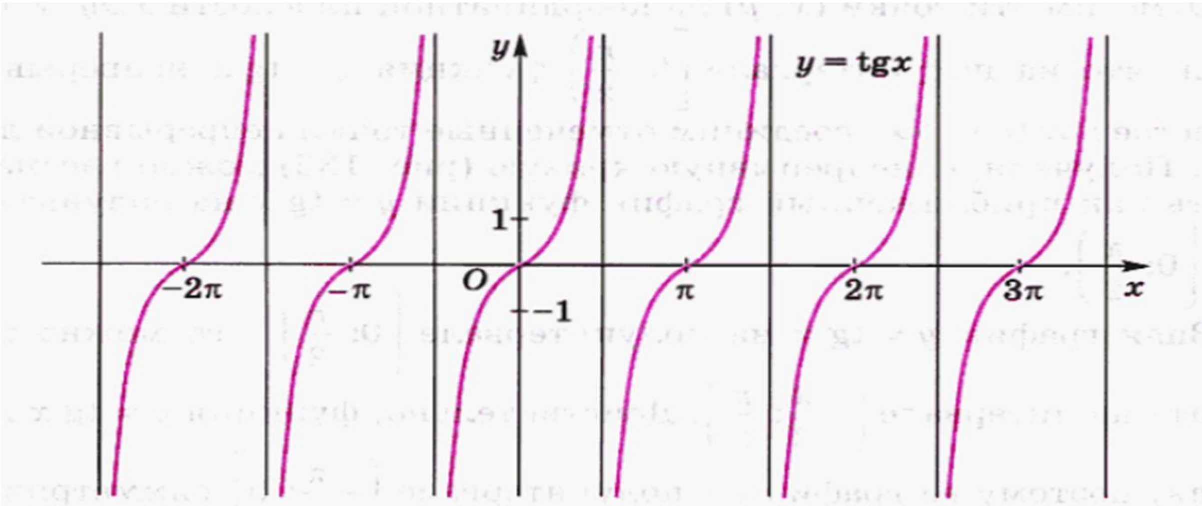
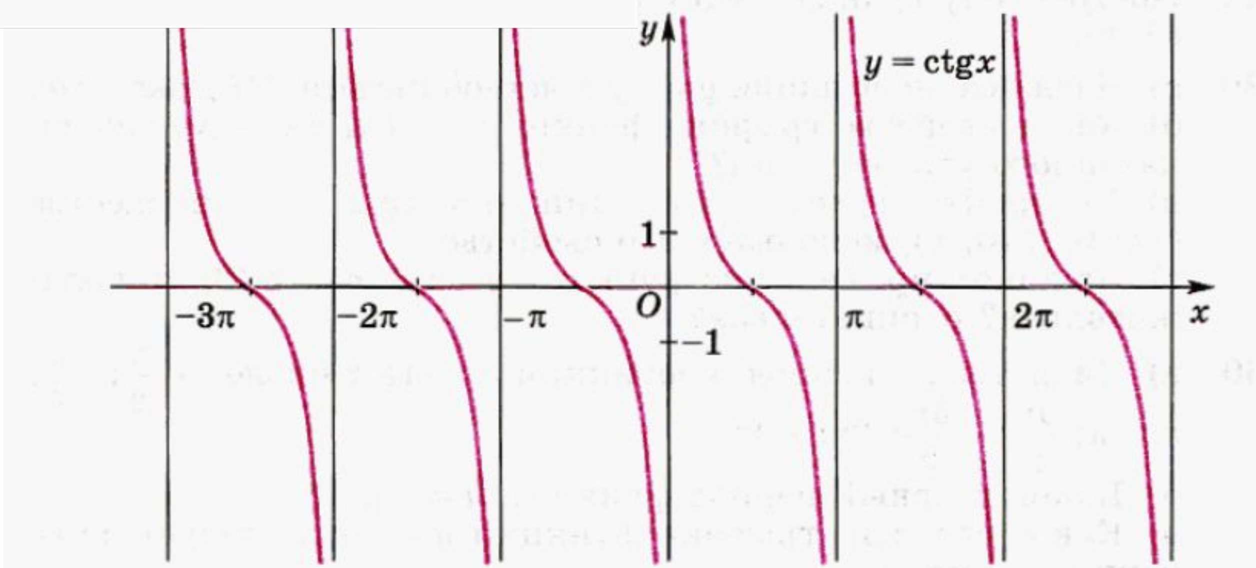


Рис. 139



■ Рис. 138



■ Рис. 139