Числовые последовательности

- Любые записанные подряд n чисел образуют **числовую последовательность**. Её обозначают $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

  Например:

  7, 10, 10, 13 — числовая последовательность, где $a_1 = 7$, $a_2 = 10$, $a_3 = 10$, $a_4 = 13$.

- Иногда последовательности задают, указывая её **первый член и формулу**, позволяющие найти любой другой член последовательности, зная предыдущие члены. Такой способ задания последовательности называют **рекуррентным**.

1. Найдите пятый член последовательности c_n, если $c_1 = -6$, $c_{n+1} = c_n + 3$.

Решение.

Последовательность задана рекуррентным способом, поэтому по очереди найдём её члены со второго по пятый.

$c_2 = c_1 + 3 = -6 + 3 = -3,$

$c_3 = c_2 + 3 = -3 + 3 = 0,$

$c_4 = c_3 + 3 = 0 + 3 = 3,$

$c_5 = c_4 + 3 = 3 + 3 = 6.$

Ответ: 6.

- Пусть дана бесконечная числовая последовательность a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n, $\ldots$. Если равенство $a_{n+1} = a_n + d$ выполняется для всех натуральных n, то такая последовательность называется **арифметической прогрессией**.

- Число $\boldsymbol{d = a_{n+1} - a_n}$ называют **разностью арифметической прогрессии**.

  Например, натуральный ряд чисел 1, 2, 3, … является арифметической прогрессией. Разность этой прогрессии $d = 3 - 2 = 1$.

- $\boldsymbol{a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)}$ — формула n-го члена арифметической прогрессии.

2. Дана арифметическая прогрессия, в которой $a_3 = 7$, $a_4 = 12$. Найдите разность этой прогрессии.

$d = a_4 - a_3 = 12 - 7 = 5.$

Ответ: 5.

3. Найдите десятый член арифметической прогрессии, если известно, что $a_1 = -2$ и $d = -3$.

По формуле $a_n = a_1 + d(n - 1)$ найдём

$a_{10} = -2 + (-3)(10 - 1) = -29.$

Ответ: -29.

4. Найдите первый член арифметической прогрессии, если $d = 5$, $a_9 = 12$.

$a_9 = a_1 + 5(9 - 1)$,

$12 = a_1 + 5 \cdot 8$,

$a_1 = 12 - 5 \cdot 8 = 12 - 40 = -28$.

Ответ: -28.

5. Запишите первые пять членов арифметической прогрессии, в которой

а) $a_1 = 3$, $d = 4$.

б) $a_1 = 12$, $d = -2$.

а) $a_2 = a_1 + d = 3 + 4 = 7,$

$a_3 = a_2 + d = 7 + 4 = 11,$

$a_4 = a_3 + d = 11 + 4 = 15,$

$a_5 = a_4 + d = 15 + 4 = 19.$

б) $a_2 = a_1 + d = 12 + (-2) = 10,$

$a_3 = a_2 + d = 10 + (-2) = 8,$

$a_4 = a_3 + d = 8 + (-2) = 6,$

$a_5 = a_4 + d = 6 + (-2) = 4.$

- Сумма n первых членов арифметической прогрессии (S_n):

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

или $$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Свойства арифметической прогрессии

- Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов: $$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

6. Задана арифметическая прогрессия $49, 2x, 51, \ldots$. Найдите x.

Так как каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов, то

$$2x = \frac{49 + 51}{2}, \quad 2x = 50, \quad x = 25.$$

Ответ: 25.

7. Найдите сумму пяти первых членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 7$, $a_2 = 10$, $a_3 = 13$.

Найдём разность арифметической прогрессии $d = a_2 - a_1$, $d = 10 - 7 = 3$.

Найдём a_4 и a_5: $a_4 = a_3 + d$, $a_4 = 13 + 3 = 16$;

$a_5 = a_4 + d$, $a_5 = 16 + 3 = 19$.

$S_5 = 7 + 10 + 13 + 16 + 19 = 65$.

Ответ: 65.

8. Дана арифметическая прогрессия: 5, 11, 17, … . Найдите сумму семи её первых членов.

Зная, что $a_1 = 5$ и $a_2 = 11$, найдём разность арифметической прогрессии $d = a_2 - a_1$, $d = 11 - 5 = 6$.

По формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ найдём a_7.
$a_7 = 5 + 6(7-1) = 5 + 6 \cdot 6 = 5 + 36 = 41.$

Сумму первых семи членов арифметической прогрессии найдём по формуле $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$

Так как $a_1 = 5$, $a_7 = 41$, $n = 7$, то получим

$$S_7 = \frac{5+41}{2} \cdot 7 = \frac{46}{2} \cdot 7 = 23 \cdot 7 = 161.$$

Ответ: 161.

9. Последовательность задана формулой $a_{n+1} = a_n + 2$ и условием $a_1 = 5$. Найдите сумму шести первых членов этой последовательности.

По определению числовая последовательность, заданная формулой $a_{n+1} = a_n + 2$, является арифметической прогрессией с разностью 2.

Сумму шести первых членов арифметической прогрессии найдём по формуле

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Ответ: 60.

Геометрическая прогрессия

- Пусть дана бесконечная числовая последовательность $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$. Если выполняется равенство $\boldsymbol{b_{n+1} = b_n \cdot q}$ для всех натуральных n и $q \neq 0$, то такая последовательность называется **геометрической прогрессией**.

- Число $\boldsymbol{q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}}$ называют **знаменателем** геометрической прогрессии.
Например, последовательность чисел $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$ является геометрической прогрессией. Знаменатель прогрессии $q = 9 : 3 = 3$.

- $\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$ — формула n-ого члена геометрической прогрессии.

10. Дана геометрическая прогрессия $2,\ 6,\ 18,\ \ldots$. Найдите знаменатель прогрессии.

Решение.

$$b_1 = 2,\ \ b_2 = 6,\ \ q = \frac{b_2}{b_1},\ \ q = \frac{6}{2} = 3.$$

Ответ: 3.

11. Найдите пятый член геометрической прогрессии, если $b_1 = 128$ и $q = \frac{1}{2}$.

Решение.

По формуле $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ найдём

$$b_5 = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 128 \cdot \frac{1}{16} = 8.$$

Ответ: 8.

12. Запишите пять первых членов геометрической прогрессии, если заданы b_1 и q.

а) $b_1 = 4,\ q = 2$;

б) $b_1 = -4,\ q = 2$;

в) $b_1 = 4,\ q = -2$;

г) $b_1 = -4,\ q = -2$.

Ответ

13. Найдите пятый член геометрической прогрессии, если $b_1 = \frac{1}{3}$, $b_4 = 9$.

Так как $b_4 = b_1 \cdot q^3$, то $9 = \frac{1}{3} \cdot q^3$, $q^3 = 27$, $q = 3$.

$b_5 = b_4 \cdot q = 9 \cdot 3 = 27$.

Ответ: 27.

- Сумма n первых членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Свойства геометрической прогрессии

- Числовая последовательность, члены которой отличны от нуля, является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого её члена, кроме первого, равен произведению предыдущего и последующего членов.

$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1},\ n \geqslant 2.$

14. Задана геометрическая прогрессия: 2, x, 18, … . Найдите x.

Так как последовательность 2, x, 18, … по условию является геометрической прогрессией, то по свойству геометрической прогрессии запишем

$$x^2 = 2 \cdot 18,$$

$$x^2 = 36,$$

$$x_1 = 6, \ x_2 = -6.$$

Ответ: 6; −6.

15. Дана геометрическая прогрессия $3,\ 6,\ 12,\ \ldots$. Найдите сумму шести её первых членов.

По условию $b_1 = 3$, $b_2 = 6$, знаменатель геометрической прогрессии $q = b_2 : b_1$, $q = 6 : 3 = 2$.

По формуле $S_6 = \dfrac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1}$ находим

$$S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot (64 - 1) = 3 \cdot 63 = 189.$$

Ответ: 189.

16. Геометрическая прогрессия задана формулой n-ого члена: $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. Найдите сумму пяти её членов.

В этой прогрессии $b_1 = 2 \cdot 3^{1-1} = 2$, $b_2 = 2 \cdot 3^{2-1} = 6$, $q = b_2 : b_1 = 6 : 2 = 3$, $n = 5$.

По формуле $S_5 = \dfrac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1}$ находим

$$S_5 = \frac{2(3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{2 \cdot (243 - 1)}{2} = 242.$$

Ответ: 242.

17. В геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$ сумма первых четырёх членов равна 60. Найдите первый член этой прогрессии.

Воспользуемся формулой $S_4 = \frac{b_1(q^4 - 1)}{q - 1}$:

$$\frac{b_1 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 60,$$

$$\frac{b_1 \cdot \left(\frac{1}{16} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = 60,$$

$$b_1 \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{2}{1} = 60,$$

$$b_1 = \frac{60 \cdot 16}{15 \cdot 2} = 32.$$

Ответ: 32.