# Числовые последовательности

- Любые записанные подряд $n$ чисел образуют **числовую последовательность**. Её обозначают $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

  Например:

  7, 10, 10, 13 — числовая последовательность, где $a_1 = 7$, $a_2 = 10$, $a_3 = 10$, $a_4 = 13$.

- Иногда последовательности задают, указывая её **первый член и формулу**, позволяющие найти любой другой член последовательности, зная предыдущие члены. Такой способ задания последовательности называют **рекуррентным**.

1. Найдите пятый член последовательности $c_n$, если $c_1 = -6$, $c_{n+1} = c_n + 3$.

*Решение.*

Последовательность задана рекуррентным способом, поэтому по очереди найдём её члены со второго по пятый.

$c_2 = c_1 + 3 = -6 + 3 = -3$,

$c_3 = c_2 + 3 = -3 + 3 = 0$,

$c_4 = c_3 + 3 = 0 + 3 = 3$,

$c_5 = c_4 + 3 = 3 + 3 = 6$.

*Ответ:* 6.

- Пусть дана бесконечная числовая последовательность $a_1$, $a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ . Если равенство $a_{n+1} = a_n + d$ выполняется для всех натуральных $n$, то такая последовательность называется **арифметической прогрессией**.

- Число $\boldsymbol{d = a_{n+1} - a_n}$ называют **разностью арифметической прогрессии**.

  Например, натуральный ряд чисел 1, 2, 3, … является арифметической прогрессией. Разность этой прогрессии $d = 3 - 2 = 1$.

- $\boldsymbol{a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)}$ — формула $n$-го члена арифметической прогрессии.

**2.** Дана арифметическая прогрессия, в которой $a_3 = 7$, $a_4 = 12$. Найдите разность этой прогрессии.

$d = a_4 - a_3 = 12 - 7 = 5.$

*Ответ:* 5.

**3.** Найдите десятый член арифметической прогрессии, если известно, что $a_1 = -2$ и $d = -3$.

По формуле $a_n = a_1 + d(n - 1)$ найдём

$a_{10} = -2 + (-3)(10 - 1) = -29.$

*Ответ:* $-29$.

4. Найдите первый член арифметической прогрессии, если $d = 5$, $a_9 = 12$.

$$a_9 = a_1 + 5(9 - 1),$$
$$12 = a_1 + 5 \cdot 8,$$
$$a_1 = 12 - 5 \cdot 8 = 12 - 40 = -28.$$

*Ответ:* $-28$.

**5.** Запишите первые пять членов арифметической прогрессии, в которой

а) $a_1 = 3$, $d = 4$.

б) $a_1 = 12$, $d = -2$.

а) $a_2 = a_1 + d = 3 + 4 = 7$,

$a_3 = a_2 + d = 7 + 4 = 11$,

$a_4 = a_3 + d = 11 + 4 = 15$,

$a_5 = a_4 + d = 15 + 4 = 19$.

б) $a_2 = a_1 + d = 12 + (-2) = 10$,

$a_3 = a_2 + d = 10 + (-2) = 8$,

$a_4 = a_3 + d = 8 + (-2) = 6$,

$a_5 = a_4 + d = 6 + (-2) = 4$.

- Сумма $n$ первых членов арифметической прогрессии ($S_n$):

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

или $$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

## Свойства арифметической прогрессии

- Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов: $$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

**6.** Задана арифметическая прогрессия $49, 2x, 51, \ldots$ . Найдите $x$.

Так как каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов, то

$$2x = \frac{49 + 51}{2}, \quad 2x = 50, \quad x = 25.$$

*Ответ:* 25.

**7.** Найдите сумму пяти первых членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 7$, $a_2 = 10$, $a_3 = 13$.

Найдём разность арифметической прогрессии $d = a_2 - a_1$, $d = 10 - 7 = 3$.

Найдём $a_4$ и $a_5$: $a_4 = a_3 + d$, $a_4 = 13 + 3 = 16$;

$a_5 = a_4 + d$, $a_5 = 16 + 3 = 19$.

$S_5 = 7 + 10 + 13 + 16 + 19 = 65$.

*Ответ*: 65.

**8.** Дана арифметическая прогрессия: 5, 11, 17, … . Найдите сумму семи её первых членов.

Зная, что $a_1 = 5$ и $a_2 = 11$, найдём разность арифметической прогрессии $d = a_2 - a_1$, $d = 11 - 5 = 6$.

По формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ найдём $a_7$.
$a_7 = 5 + 6(7-1) = 5 + 6 \cdot 6 = 5 + 36 = 41.$

Сумму первых семи членов арифметической прогрессии найдём по формуле $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Так как $a_1 = 5$, $a_7 = 41$, $n = 7$, то получим

$$S_7 = \frac{5+41}{2} \cdot 7 = \frac{46}{2} \cdot 7 = 23 \cdot 7 = 161.$$

*Ответ:* 161.

**9.** Последовательность задана формулой $a_{n+1} = a_n + 2$ и условием $a_1 = 5$. Найдите сумму шести первых членов этой последовательности.

По определению числовая последовательность, заданная формулой $a_{n+1} = a_n + 2$, является арифметической прогрессией с разностью 2.

Сумму шести первых членов арифметической прогрессии найдём по формуле

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

*Ответ:* 60.

# Геометрическая прогрессия

- Пусть дана бесконечная числовая последовательность $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$ . Если выполняется равенство $\boldsymbol{b_{n+1} = b_n \cdot q}$ для всех натуральных $n$ и $q \neq 0$, то такая последовательность называется **геометрической прогрессией**.

- Число $\boldsymbol{q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}}$ называют **знаменателем** геометрической прогрессии.
  Например, последовательность чисел $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$ является геометрической прогрессией. Знаменатель прогрессии $q = 9 : 3 = 3$.

- $\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$ — формула $n$-ого члена геометрической прогрессии.

**10.** Дана геометрическая прогрессия $2,\ 6,\ 18,\ \ldots$ . Найдите знаменатель прогрессии.

*Решение.*

$$b_1 = 2,\ \ b_2 = 6,\ \ q = \frac{b_2}{b_1},\ \ q = \frac{6}{2} = 3.$$

*Ответ:* 3.

**11.** Найдите пятый член геометрической прогрессии, если $b_1 = 128$ и $q = \frac{1}{2}$.

*Решение.*

По формуле $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ найдём

$$b_5 = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 128 \cdot \frac{1}{16} = 8.$$

*Ответ:* 8.

**12.** Запишите пять первых членов геометрической прогрессии, если заданы $b_1$ и $q$.

а) $b_1 = 4,\ q = 2$;

б) $b_1 = -4,\ q = 2$;

в) $b_1 = 4,\ q = -2$;

г) $b_1 = -4,\ q = -2$.

*Ответ*

**13.** Найдите пятый член геометрической прогрессии, если $b_1 = \frac{1}{3}$, $b_4 = 9$.

Так как $b_4 = b_1 \cdot q^3$, то $9 = \frac{1}{3} \cdot q^3$, $q^3 = 27$, $q = 3$.

$b_5 = b_4 \cdot q = 9 \cdot 3 = 27$.

*Ответ:* 27.

- Сумма $n$ первых членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

**Свойства геометрической прогрессии**

- Числовая последовательность, члены которой отличны от нуля, является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого её члена, кроме первого, равен произведению предыдущего и последующего членов. $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, n \geqslant 2.$

**14.** Задана геометрическая прогрессия: 2, $x$, 18, … .
Найдите $x$.

Так как последовательность 2, $x$, 18, … по условию является геометрической прогрессией, то по свойству геометрической прогрессии запишем

$$x^2 = 2 \cdot 18,$$

$$x^2 = 36,$$

$$x_1 = 6,\ x_2 = -6.$$

*Ответ:* 6; −6.

**15.** Дана геометрическая прогрессия $3, 6, 12, \ldots$ . Найдите сумму шести её первых членов.

По условию $b_1 = 3$, $b_2 = 6$, знаменатель геометрической прогрессии $q = b_2 : b_1$, $q = 6 : 3 = 2$.

По формуле $S_6 = \dfrac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1}$ находим

$$S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot (64 - 1) = 3 \cdot 63 = 189.$$

*Ответ:* 189.

**16.** Геометрическая прогрессия задана формулой $n$-ого члена: $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. Найдите сумму пяти её членов.

В этой прогрессии $b_1 = 2 \cdot 3^{1-1} = 2$, $b_2 = 2 \cdot 3^{2-1} = 6$, $q = b_2 : b_1 = 6 : 2 = 3$, $n = 5$.

По формуле $S_5 = \dfrac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1}$ находим

$$S_5 = \frac{2(3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{2 \cdot (243 - 1)}{2} = 242.$$

*Ответ:* 242.

**17.** В геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$ сумма первых четырёх членов равна 60. Найдите первый член этой прогрессии.

Воспользуемся формулой $S_4 = \dfrac{b_1(q^4 - 1)}{q - 1}$:

$$\frac{b_1 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 60,$$

$$\frac{b_1 \cdot \left(\frac{1}{16} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = 60,$$

$$b_1 \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{2}{1} = 60,$$

$$b_1 = \frac{60 \cdot 16}{15 \cdot 2} = 32.$$

*Ответ*: 32.