# Выпускная квалификационная работа

# Применение методов оптимизации для формирования обобщенных кодов Баркера

**Студент: Кирилин Глеб Андреевич**

**Группа КМБО-01-17**

**Научный руководитель: Сенявин М.М.**

# Актуальность задачи

Актуальность предлагаемого исследования обусловлена широким использованием последовательностей Баркера в радиолокации, цифровой речи, ультразвуковом сканировании, GPS, Wi-Fi.

Коды Баркера длиной *N*, равной 11 и 13, используются в радиолокационных системах с расширенным спектром прямой последовательности.

# Цель работы

Целью работы является разработка алгоритмов и программ, реализующих методы оптимизации, применимых к задаче об обобщении кодов Баркера.

# Последовательности Баркера

Последовательность Баркера – это числовая последовательность x1, x2, … , xN, где каждый элемент равен 1 или -1, причем

$$|ACF_x(\mathbf{k})| \leq 1$$

где

$$ACF_x(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{N-|k|} x_i x_{i+|k|}$$

для 1 – N ≤ k ≤ N – 1, кроме 0.

# Известные последовательности Баркера

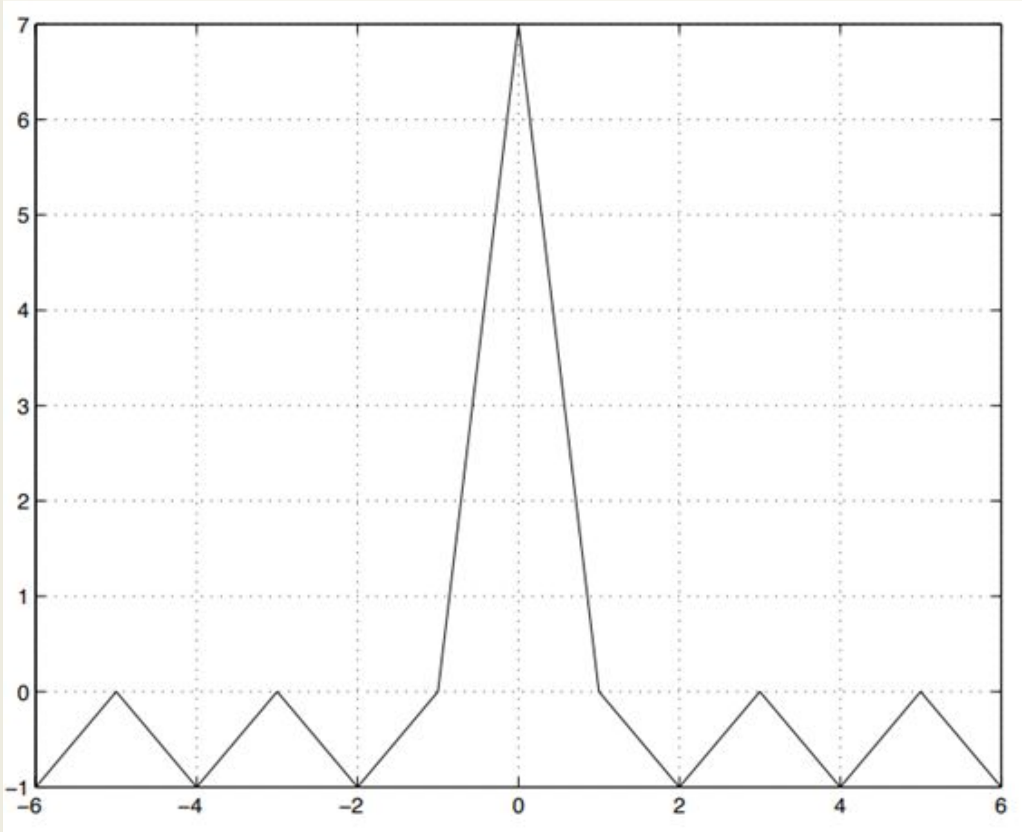
С точностью до реверсирования порядка и смены знаков каждого из элементов на данный момент известно только 9 кодов Баркера.

| Длина | Последовательности | |
|---|---|---|
| 2 | +1 −1 | +1 +1 |
| 3 | +1 +1 −1 | |
| 4 | +1 −1 +1 +1 | +1 −1 −1 −1 |
| 5 | +1 +1 +1 −1 +1 | |
| 7 | +1 +1 +1 −1 −1 +1 −1 | |
| 11 | +1 +1 +1 −1 −1 −1 +1 −1 −1 +1 −1 | |
| 13 | +1 +1 +1 +1 +1 −1 −1 +1 +1 −1 +1 −1 +1 | |

# Известные последовательности Баркера

График автокорреляционной функции для последовательности Баркера длины 7.

$$ACF_x(0) = N'$$



# Постановка основной задачи

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x \in E^n$$

$$f_j(x) = \sum_{i=1}^{n-j} x_i x_{i+j}, 1 \le j \le n-1$$

$$x_i^2 - 1 = 0, \qquad 1 \le i \le n$$

Требуется найти вектор x, при котором функция F(x) принимает наименьшее возможное значение среди всех тех значений, которые она принимает для допустимых x:

$$F(x) = \max_j |f_j(x)| \to min$$

# Решение основной задачи

**Алгоритм:**

При решении были использованы метод полного перебора и метод покоординатного спуска – замена $x_k$ на $–x_k$.

При росте N время, затраченное на поиск нужной последовательности методом полного перебора, становится большим.

Поэтому перейдем к алгоритму методу покоординатного спуска.

# Решение основной задачи

Суть метода поокординатного спуска заключается в том, чтобы заменять координату $x_k$ на $-x_k$ и идти в сторону уменьшения критерия качества. Если критерий качества уменьшился, то координату $-x_k$ оставляем и переходим к $x_{k-1}$, иначе возвращаем начальное значение $x_k$ и переходим к $x_{k-1}$.

# Решение основной задачи

## Вычисления:

**N = 7:**

Для начальной точки x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) получилась тупиковая точка $\dot{x}$ = (1, 1, 1, -1, -1, 1, -1), минимум $F(\dot{x}) = 1$

Точка $\dot{x}$ также является кодом Баркера

**N = 11:**

Для начальной точки x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) получилась тупиковая точка $\dot{x}$ = (1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1), минимум $F(\dot{x}) = 3$

**N = 19:**

Для начальной точки x = (1, 1, 1, … , 1, -1, -1) получилась тупиковая точка $\dot{x}$ = (1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1), минимум $F(\dot{x}) = 3$

# Вывод

- Преимущество направленного перебора перед полным – при программной реализации алгоритма смогли избежать полного перебора всех функций.
- Не все тупиковые точки являются оптимальными.
- Минимум функции F(x) сильно зависит от выбора начальной точки.

Полученные тупиковые точки можно использовать как начальные приближения в более серьезных методах оптимизации.

Перейдем к эквивалентной задаче, которая имеет стандартный вид и гладкий критерий качества.

# Постановка эквивалентной задачи

$$x_{n+1} \to min$$
$$f_j^2(x) - \ x_{n+1}^2 \ \leq 0, 1 \leq j \leq n-1$$
$$x_i^2 - 1 = 0, 1 \leq i \leq n$$

Метод штрафных функций

$$g_j(x) = \left(\max\left(\left(f_j^2(x) - x_{n+1}^2\right), 0\right)\right)^2 \ , 1 \leq j \leq n-1$$
$$g_j(x) = \left(x_{j+1-n}^2 - 1\right)^2, n \leq j \leq 2n-1$$
$$G_k(x) = x_{n+1} + k \sum_{j=1}^{2n-1} g_j(x)$$
$$G_k(x) \to min, \ \ k \to \infty$$

# Описание метода штрафных функций

Имеется задача

$$f(x) \to min$$

При ограничениях

$$f_i(x) \leq 0, 1 \leq i \leq n$$
$$f_i(x) = 0, n+1 \leq i \leq m$$

Тогда целесообразно использовать штрафную функцию такого вида:

$$\boldsymbol{\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) + \sum_{i=n+1}^{m} g_i(x) = \sum_{i=1}^{n}(\max(f_i(x),\ 0)^p + \sum_{i=n+1}^{m} |f_i(x)|^p}$$

Далее переходим от исходной задачи к задаче безусловной минимизации

$$\boldsymbol{G_k(x) = f(x) + \ k\alpha(x) \to min}, \text{где } \boldsymbol{0 < k \to \infty}$$

# Алгоритм метода штрафных функций

**Начальные данные**

Выбираем eps > 0, начальную точку $x_0$ и параметр штрафа.

**Первый шаг**

Решаем задачу

$$G_k(x) = f(x) + k\alpha(x) \to min$$

Полагаем, что новый x равен оптимальному решению задачи и переходим к следующему шагу.

**Второй шаг**

Если $k\alpha(x) < eps$, то останавливаемся.

В противном случае увеличиваем k и переходим к первому шагу.

# Решение эквивалентной задачи

**Алгоритм нахождения вектора для основной задачи :**

1. Взять несколько тупиковых точек, которые были получены при решении основной задачи.
2. Взять эти точки в качестве начальных для метода штрафных функций.
3. Составить штрафную функцию и минимизировать ее.
4. Округлить полученные значения компонент вектора до 1 или -1.
5. Продолжить применение метода штрафных функций с полученной точкой в качестве начальной, если результат не улучшился – значит, получен квазиоптимум.

# Решение эквивалентной задачи

**Вычисления:**

**N = 11**

Начальный вектор: 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, -1

*Минимум = 3*

Итоговый вектор: 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, -1

*Минимум = 3*

**N = 19**

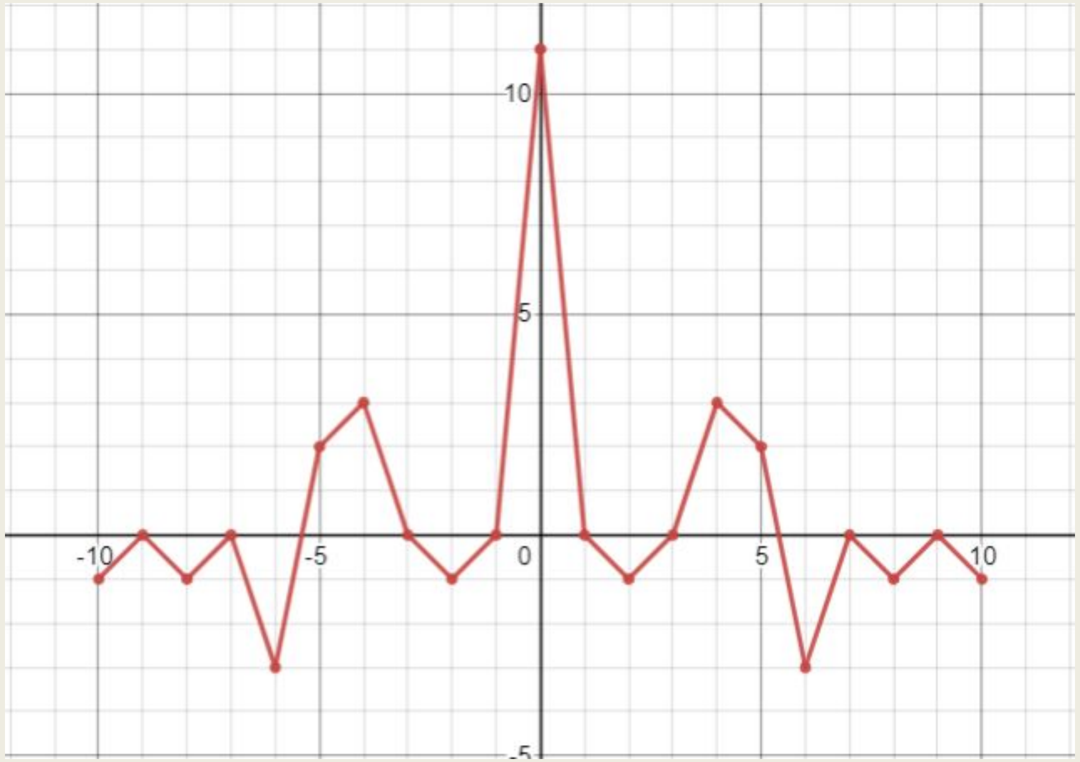
Начальный вектор: 1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1

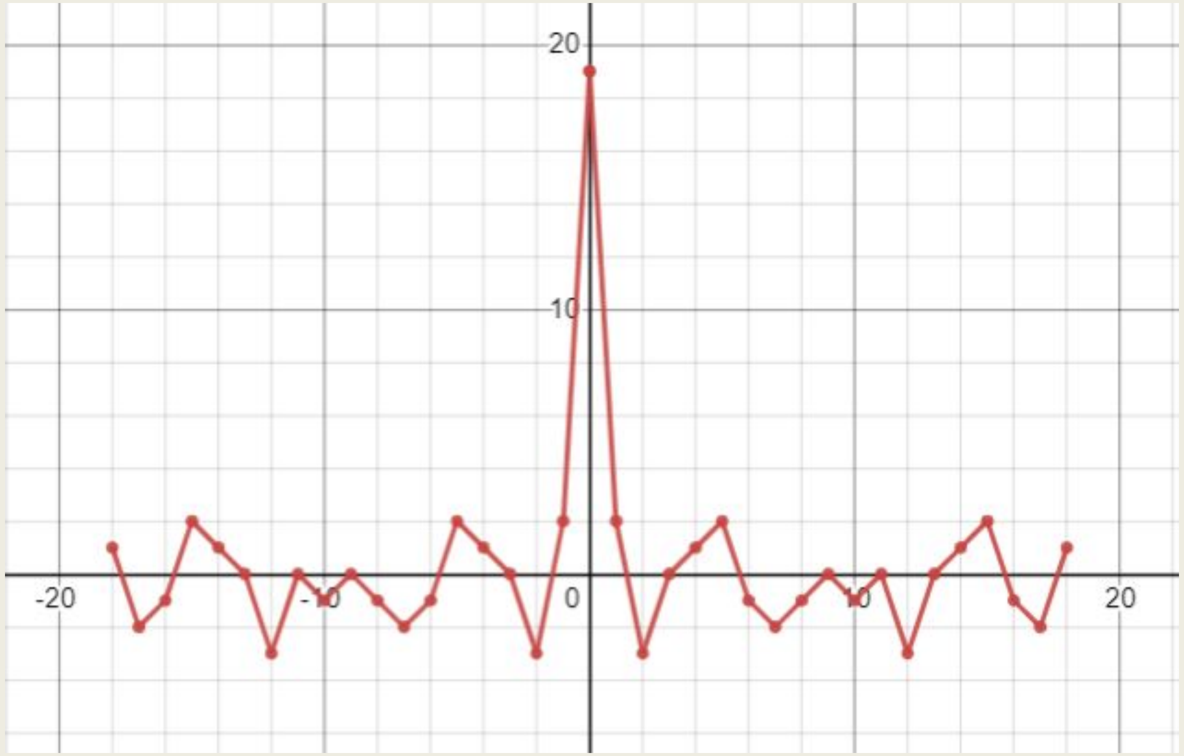
*Минимум = 4*

Итоговый вектор: -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1

*Минимум = 3*

# Решение эквивалентной задачи




ACF для последовательности длиной N = 11 ACF для последовательности длиной N = 19

# Решение эквивалентной задачи

**N = 30**

Начальный вектор: 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1. *Минимум = 6*

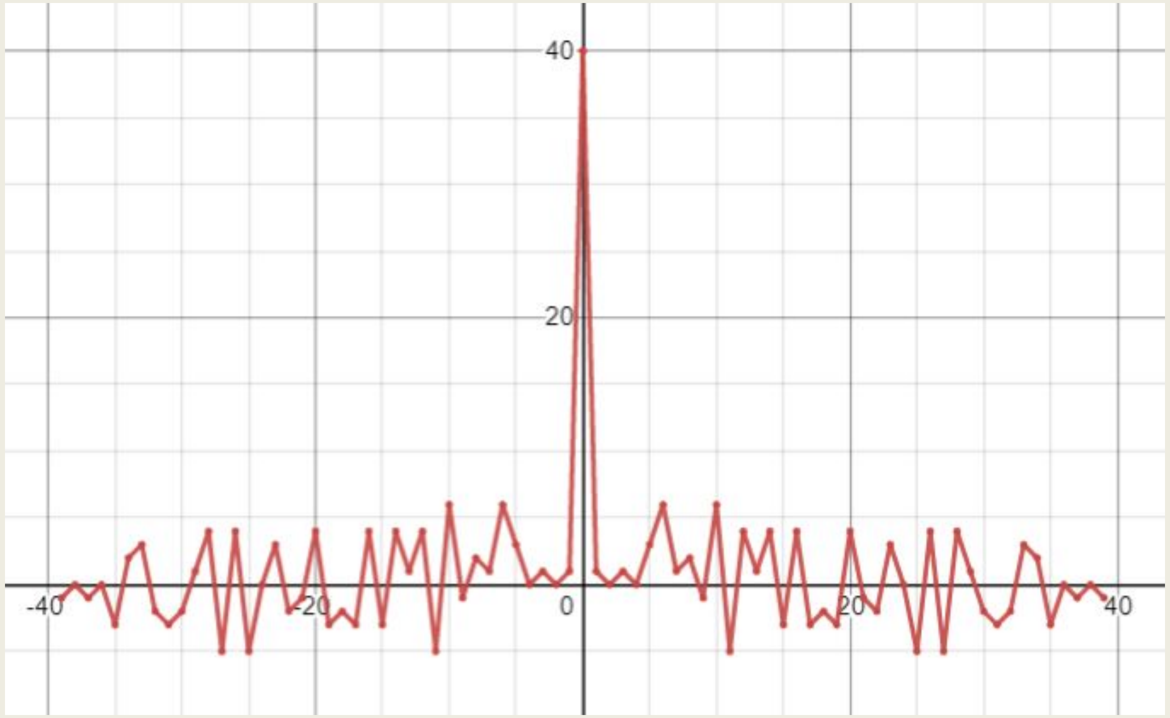
Итоговый вектор: 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1. *Минимум = 4*

**N = 40**

Начальный вектор: 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1. *Минимум = 6*

Итоговый вектор: 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1. *Минимум = 6*

# Решение эквивалентной задачи


ACF для кода Баркера длиной  N = 30

ACF для кода Баркера длиной N = 40

# Решение эквивалентной задачи

**N = 45**

Начальный вектор: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1. *Минимум = 6*

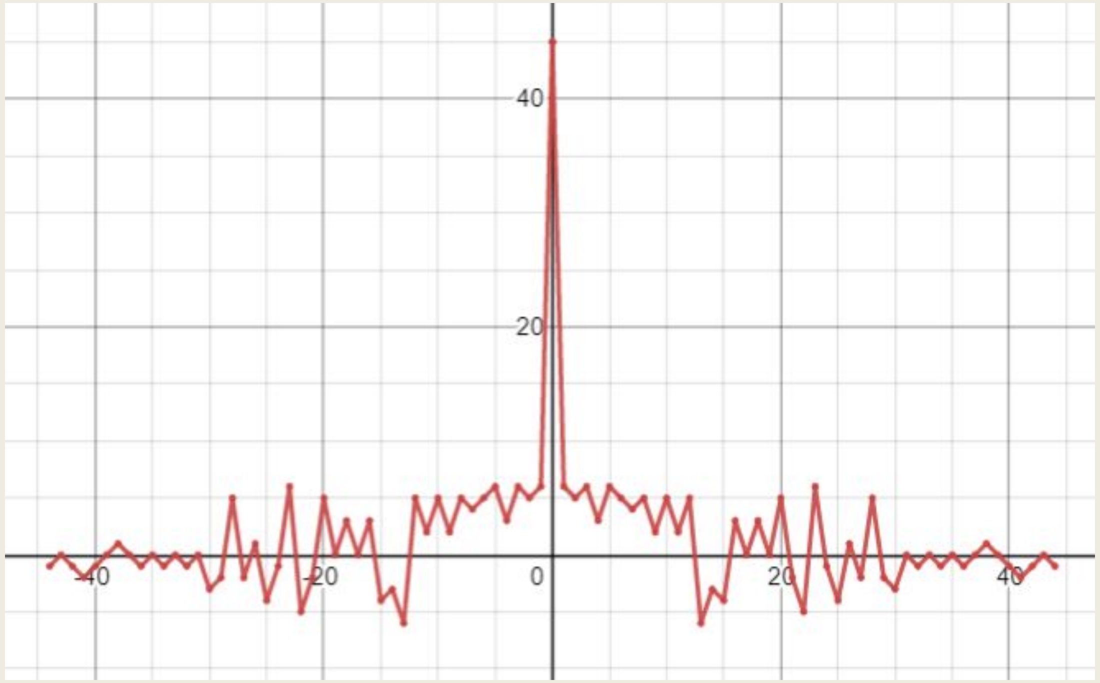
Итоговый вектор: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1. *Минимум = 6*

**N = 50**

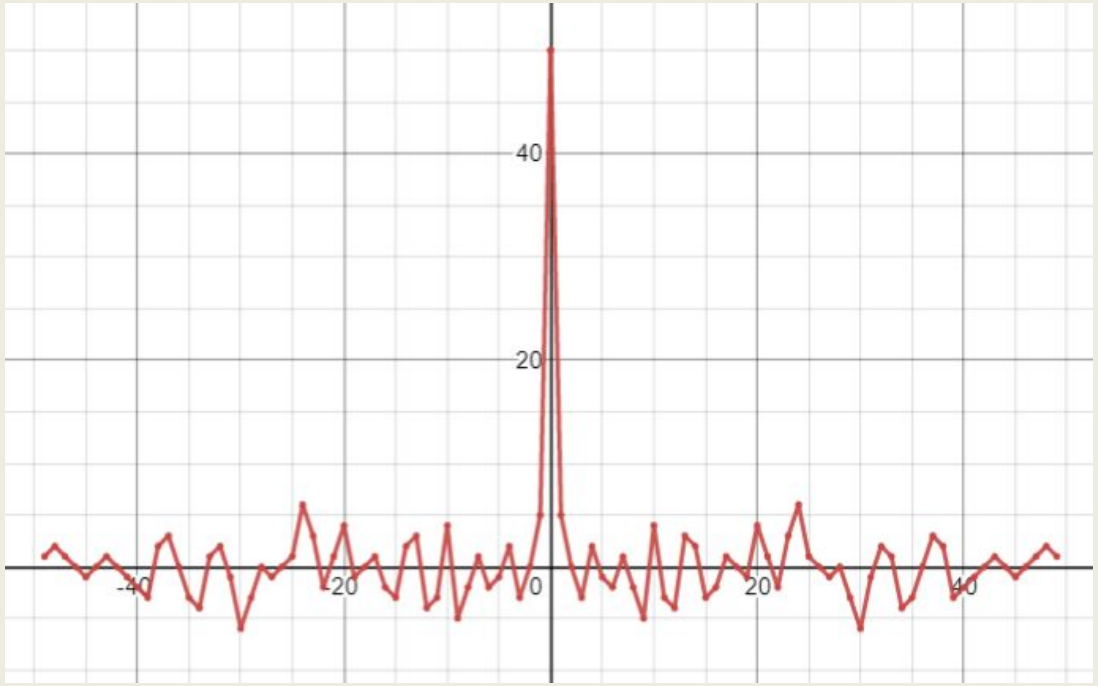
Начальный вектор: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1. *Минимум = 8*

Итоговый вектор: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1. *Минимум = 6*

# Решение эквивалентной задачи




ACF для кода Баркера длиной  N = 45




ACF для кода Баркера длиной N = 50

# Выводы

- Применены современные методы оптимизации к эквивалентной задаче.
- Рассмотрены случаи для $N > 19$.
- Для случая $N = 11$ критерий качества не был улучшен.
- Для $N = 19, 30, 50, 60$ применение метода штрафных функций позволило улучшить критерий качества и приблизиться к минимуму, но все же его не достигнуть.
- Для $N = 40, 45$ критерий качества либо не менялся, либо только ухудшался.

# Спасибо за внимание!