Теория вероятностей и математическая статистика

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

- ***Суммой*** *A + B двух событий A* и *B* называют событие, состоящее в появления события *A*, или события *B*, или обоих этих событий. Если из орудия произведены два выстрела и *A* – попадание при первом выстреле, *B* – попадание при втором выстреле, то *A + B* – попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах. Если два события *A* и *B* – несовместные, то *A + B* – событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.
- ***Суммой нескольких событий*** называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного их этих событий. Например, событие *A + B + C* состоит в появлении одного из следующих событий: *A*, *B*, *C*, *A* и *B*, *A* и *C*, *B* и *C*, *A* и *B* и *C*.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

- *Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий*: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.
- Доказательство. Введем обозначения: n – общее число возможных элементарных исходов испытания; m_1 – число исходов, благоприятствующих событию A; m_2 – число исходов, благоприятствующих событию B.
- Следствие. *Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий*:
- $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

- **Пример.** В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.
- Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.
- Вероятность появления красного шара (событие A)
- $P(A) = 10/30 = 1/3$.
- Вероятность появления синего шара (событие B)
- $P(B) = 5/30 = 1/6$.
- События A и B несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима.
- Искомая вероятность
- $P(A + B) = P(A) + P(B) = 1/3 + 1/6 = 1/2$.

Полная группа событий

- **Теорема.** *Сумма вероятностей событий* A_1, A_2, … , A_n, *образующих полную группу, равна единице*:
- $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$
- Доказательство. Так как появление одного из событий полной группы достоверно, а вероятность достоверного события равна единице, то $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$
- **Противоположные события**
- *Противоположными* называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через A, то другое принято обозначать $\overline{A}$.
- **Пример.** Попадание и промах при выстреле по цели – противоположные события. Если A – попадание, то - промах.

Полная группа событий

- **Пример.** Из ящика наудачу взята деталь. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» - противоположные.
- **Теорема.** *Сумма вероятностей* $\overline{A}$ *противоположных событий равна единице*: $P(A) + P(\ ) = 1$.
- Доказательство. Противоположные события образуют полную группу, а сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице.
- Замечание 1. Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через p, то вероятность другого события обозначают через q. Таким образом, в силу предыдущей теоремы $p + q = 1$.

Произведение событий

- ***Произведением двух событий*** *А и В* называют событие *АВ,* состоящее в совместном появлении (совмещении**)** этих событий. Например, если *А*—деталь годная, *В* - деталь окрашенная, то *АВ*—деталь годна и окрашена.
- ***Произведением нескольких событий*** называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. Например, если *А, В, С* — появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то *ABC* — выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

Условная вероятность

- Случайное событие – это событие, которое при осуществлении совокупности условий *S* может произойти или не произойти. Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме условий *S,* не налагается, то такую вероятность называют ***безусловной****;* если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называют ***условной****.* Например, часто вычисляют вероятность события *B* при дополнительном условии, что произошло событие *A.* Заметим, что и безусловная вероятность, строго говоря, является условной, поскольку предполагается осуществление условий *S.*
- ***Условной вероятностью*** $P_A(B)$ называют вероятность события *B,* вычисленную в предположении, что событие *A* уже наступило.

Пример

- В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие *В*), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие *А*).
- ***Решение.*** После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомая условная вероятность $P_A(B)=3/5$.
- Этот же результат можно получить по формуле
- $P_A(B)=P(AB)/P(A)$ $P(A)>0$).
- Действительно, вероятность появления белого шара при первом испытании $P(A) = 3/6 = 1/2$. Найдем вероятность $P(AB)$ того, что в первом испытании появится черный шар, а во втором—белый. Общее число исходов — совместного появления двух шаров, безразлично какого цвета, равно числу размещений A_6^2 $=6*5 = 30$. Из этого числа исходов событию *АВ* благоприятствуют $3*3=9$ исходов. Следовательно, $P(AB)=9/30=3/10$.
- Искомая условная вероятность
- $P_A(B)=P(AB)/P(A) = (3/10)/(1/2)=3/5$.

Теорема умножения вероятностей

- **Теорема.** *Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*
- $P(AB) = P(A)\,P_A(B)$.
- Доказательство. По определению условной вероятности,
- $P_A(B)=P(AB)/P(A)$. Отсюда $P(AB)=P(A)P_A(B)$.
- Следствие. *Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:*
- $P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1A_2}(A_3) \dots P_{A_1A_2\dots A_{n-1}}(A_n)$,
- где $P_{A_1A_2\dots A_{n-1}}(A_n)$ — вероятность события A_n, вычисленная в предположении, что события $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ наступили. В частности, для трех событий $P(ABC)= P(A)P_A(B)P_{AB}(C)$.

Теорема умножения вероятностей

- **Пример.** В урне 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие A), при втором — черный (событие B) и при третьем—синий (событие С).
- Решение. Вероятность появления белого шара в первом испытании $P(A) = 5/12$. Вероятность появления черного шара во втором испытании, вычисленная в предположении, что в первом испытании появился белый шар, т, е. условная вероятность $P_A(B) = 4/11$. Вероятность появления синего шара в третьем испытании, вычисленная в предположении, что в первом испытании появился белый шар, а во втором — черный, т. е. условная вероятность $P_{AB}(C) = 3/10$.
- Искомая вероятность
- $P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C) = (5/12)*(4/11)*(3/10)=1/22.$

Независимые события

- *Событие B называют независимым от события A,* если появление события *A* не изменяет вероятности события *B,* т.е. если условная вероятность события *B* равна его безусловной вероятности: $P_A(B)=P(B)$. Если событие *B* не зависит от события *A,* то и событие *A* не зависит от события *B;* это означает, что свойство независимости событий взаимно.
- Для независимых событий теорема умножения $P(AB)= P(A)P_A(B)$ имеет вид $P(AB)=P(A)P(B)$,
- т.е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Независимые события

- *Два события называют независимыми,* если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют *зависимыми.*
- **Пример.** Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие *A*) равна 0,8, а вторым (событие *B*) - 0,7.
- Решение. События *A* и *B* независимые, поэтому, по теореме умножения, искомая вероятность
- $P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}7 \bullet 0{,}8 = 0{,}56$.
- Замечание 1. Если события *A* и *B* независимы, то независимы также события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.
- *Несколько событий называют попарно независимыми,* если каждые два из них независимы. Например, события *A, B, C* попарно независимы, если независимы события *A* и *B, A* и *C, B* и C.

Следствие из теоремы умножения

- .*Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности равна произведению вероятностей этих событий:*
- $P(A_1, A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\, P(A_2) \ldots P(A_n)$.
- **Пример.** Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными. Решение. Вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие A), $P(A) = 8/10 = 0{,}8$. Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие B), $P(B) = 7/10 = 0{,}7$.
- Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие С), $P(C) = 9/10 = 0{,}9$. Так как события A, B и C независимые в совокупности, то искомая вероятность равна $P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0{,}8 \bullet 0{,}7 \bullet 0{,}9 = 0{,}504$.

Вероятность появления хотя бы одного события

- Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из событий A_1, A_2, ..., A_n, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий* $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$:
- Доказательство. Обозначим через *A* событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, ..., A_n, События *A* и $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n$ (ни одно из событий не наступило) противоположны, следовательно, сумма их вероятностей равна единице:
- $P(A)+P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n)=1.$
- Отсюда, пользуясь теоремой умножения, получим
- $P(A)=1-P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\dots P(\bar{A}_n),$
- или $P(A)=1-q_1q_2\dots q_n$

Вероятность появления хотя бы одного события

- **Пример.** Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $p_1 = 0{,}8$; $p_1 = 0{,}7$; $p_3 = 0{,}9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие A) при одном залпе из всех орудий.
- Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 (попадание первого орудия), A_2 (попадание второго орудия) и A_3 (попадание третьего орудия) независимы в совокупности.
- Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2, A_3, (т. е. вероятности промахов), соответственно равны:
- $q_1 = 1 - p_1 = 1 — 0{,}8 = 0{,}2$; $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$;
- $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.
- Искомая вероятность
- $P(A) = 1 — q_1 q_2 q_3 = 1 — 0{,}2 \bullet 0{,}3 \bullet 0{,}1 = 0{,}994$.

Вероятность появления хотя бы одного события

- **Пример.** Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}8$. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.
- Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результата стрельбы из другого орудия, поэтому события *А* (попадание первого орудия) и *В* (попадание второго орудия) независимы.
- Вероятность события *АВ* (оба орудия дали попадание)
- $P(AB) = P(A)\,P(B) = 0{,}7 * 0{,}8 = 0{,}56.$
- Искомая вероятность
- $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}56 = 0{,}94.$

Формула полной вероятности

- Теорема. *Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий* $B_1, B_2, \ldots, B_n$, *образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А:*
- $P(A) = P(B_1) P_{B_1}(A) + P(B_2) P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) P_{B_n}(A).$
- Эту формулу называют «формулой полной вероятности».

Формула полной вероятности

- **Пример.** Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго—0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) — стандартная.

Решение. Обозначим через A событие «извлеченная деталь стандартна».

Деталь может быть извлечена либо из первого набора (событие B_1), либо из второго (событие B_2).

Вероятность того, что деталь вынута из первого набора, $P(B_1) = 1/2$.

Вероятность того, что деталь вынута из второго набора, $P(B_2)=1/2$.

Условная вероятность того, что из первого набора будет извлечена стандартная деталь, $P_{B_1}(A) = 0{,}8$.

Условная вероятность того, что из второго набора будет извлечена стандартная деталь $P_{B_2}(A)=0{,}9$.

Искомая вероятность того, что извлеченная наудачу деталь — стандартная, по формуле полной вероятности равна

$$P(A) = P(B_1)\,P_{B_1}(A) + P(B_2)\,P_{B_2}(A) = 0{,}5*0{,}8 + 0{,}5*0{,}9 = 0{,}85.$$