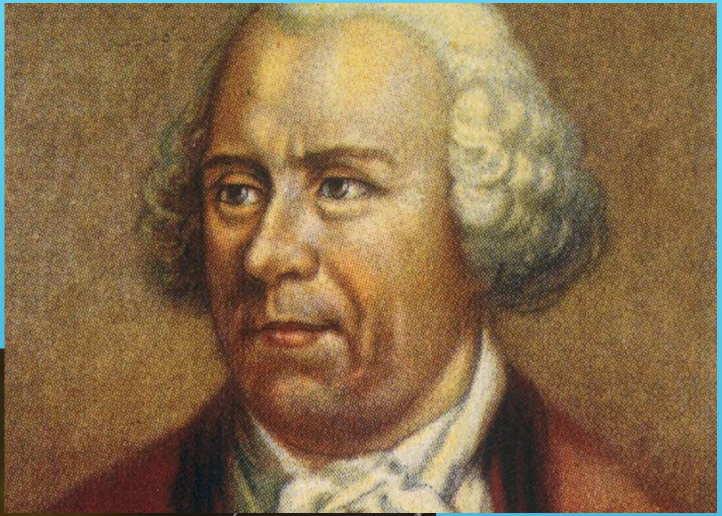
МЕТОД СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИБКОГО КОЛЬЦА ПРИ НЕГОЛОНОМНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА

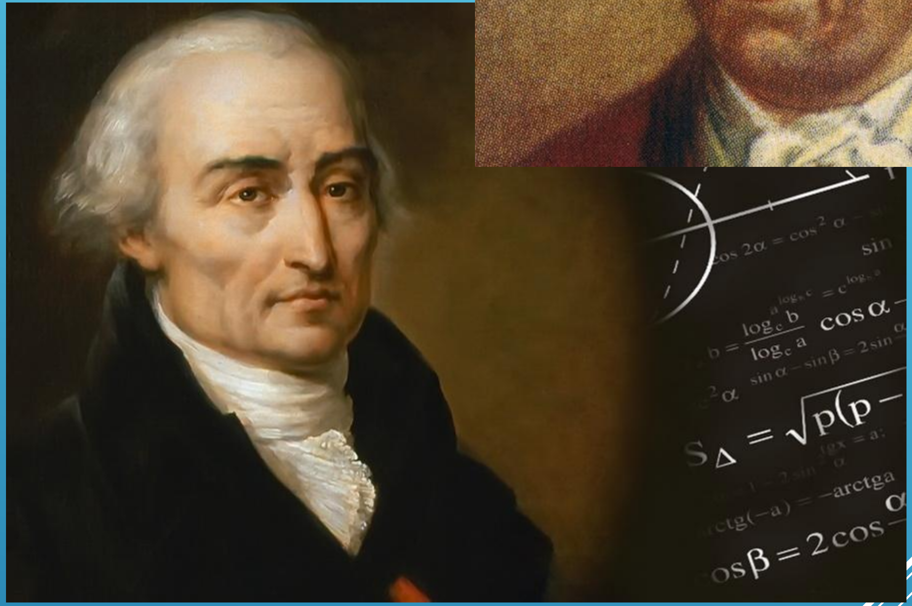
к.т.н. Котлов Вадим Михайлович

ГосНИИАС г. Москва

Зарождение динамики *неголономных систем*, по-видимому, следует отнести к тому времени, когда аналитический формализм, созданный трудами Л. Эйлера и Ж. Лагранжа, оказался,

к всеобщему удивлению, неприменимым к очень простым механическим задачам о качении без проскальзывания твердого тела по плоскости.





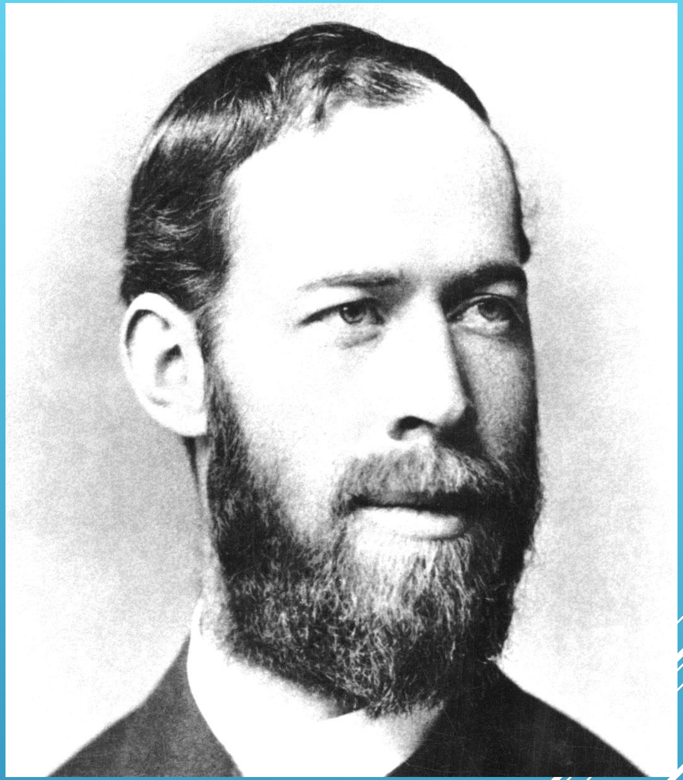
Только в 1894 г.

в книге «Принципы механики, изложенные в новой связи»

(через 106 лет после труда Лагранжа «Аналитическая механика» в 1788 году)

Генрих Герц **ввел разделение**

связей и механических систем на голономные и неголономные



.

К настоящему времени динамика неголономных систем оформлена как самостоятельная часть общей динамики механических систем-находит широкое применение в задачах современной техники, таких как движения автомобиля, самолетного шасси, железнодорожного колеса.

А ее методы активно используются в теории электрических машин

Достаточно полное изложение задач и методов неголономной механики представлено в монографии Ю. И.Неймарка, Н.А.Фуфаева "Динамика неголономных

Условия голономные и неголономные.

Условия (они же ограничения), накладываемые на движение механической системы разделяют как *потенциальные*:

- накладываются на координаты

$$(1)\quad f[x, y] = 0$$

так и *кинематические:*

- накладываются на скорости (или компоненты скорости)

$$f[x, y, \dot{x}, \dot{y}] = 0$$

Условия голономные и неголономные.

Задача учета нелинейных кинематических связей не разработана, в линейном виде **связь относительно** *скоростей* **выглядит следующим образом:**

$$(2)\ a_1 [x,y]\, \dot{x} + a_2 [x,y]\, \dot{y} = 0$$

что позволяет эту связь записать через дифференциалы

$$d[x] / d[t] = \dot{x},\ d[y] / d[t] = \dot{y},$$

как

$$(3)\ a_1[x,y] \cdot d[x] + a_2 [x,y] \cdot d[y] = 0$$

Условия голономные и неголономные.

Если дифференциальную связь (3) нельзя записать как полный дифференциал некоторой функции

$$d[F[x,y]] \neq a_1[x,y] \cdot d[x] + a_2[x,y] \cdot d[y]$$

То такая связь называется неинтегрируемой (неголономной), а механическая система с такой связью- неголономной системой. Соответственно, система с голономной связью – голономной.

Метод составления уравнений динамики механической системы при наложении различных типов условий на переменные

Для голономных связей Лагранжем предложены **два метода:**

1)использование функции связи **как новой переменной-**
(приводит к уменьшение общего числа переменных)

2) **метод «множителей Лагранжа»,**
(вводит условия через множители Лагранжа, которые физически представляют собой силы, обеспечивающие выполнение этих условий).

Методы составления уравнений динамики механической системы при наложении различных типов условий на переменные

СЧИТАЕТСЯ что, **неголономные связи** допускают лишь второй способ составления уравнений динамики- метод множителей Лагранжа.

ПОЛАГАЕТСЯ, что уменьшение числа переменных здесь невозможно, потому что нет уравнений, с помощью которых можно бы выразить одни переменные через другие и приходится оперировать с большим количеством переменных, чем того требует число степеней свободы системы

НОВЫЙ МЕТОД

Однако, способ уменьшения числа переменных вводя кинематические условия как новые переменные давно предложен А. Пуанкаре и Э. Картаном в книге “ Интегральные инварианты” М.: 1922 г.

Картаном введена математическая конструкция , названная им ***интегральный инвариант динамики второго порядка (либо тензор "количество движения- энергии")***

НОВЫЙ МЕТОД

Указанное выражение получается совершенно естественно при вычислении вариации интеграла действия Гамильтона.

В современных обозначениях:

$$d\Omega = d[x1] \wedge d[x] - d[H] \wedge d[t]$$

где
$\wedge$- внешнее умножение дифференциалов
x- координата
x1-скорость,
H=T+U- гамильтониан,
t- время

НОВЫЙ МЕТОД

Поскольку из этого дифференциального инварианта следует система уравнений движения - любой механической системы, а сам дифференциальный инвариант состоит из дифференциальных форм, то введение ограничений, как на сами кинематические переменные, так на их дифференциалы могут быть проведены в рамках самого интегрального инварианта

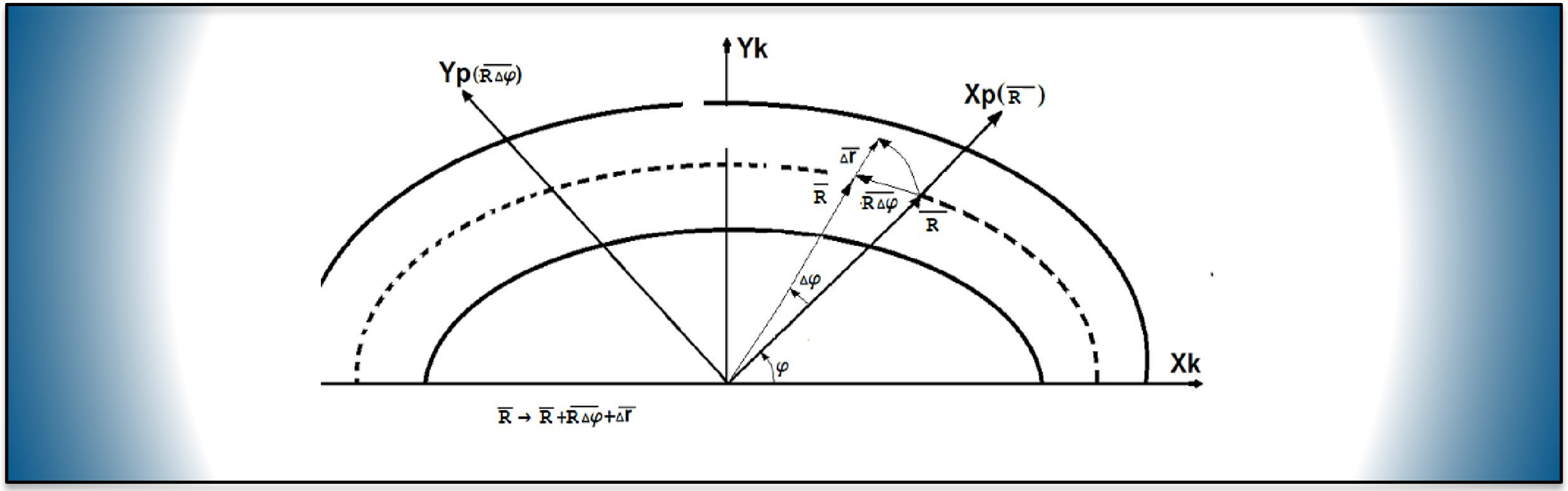
НОВЫЙ МЕТОД

В случае использования интегрального инварианта механики по Картану, введение ограничений на переменные механической системы (как голономные, так и неголономные) приводит к уменьшению числа независимых переменных.

Таким образом, применение интегрального инварианта механики соответствует способу введения ограничений на переменные, как новых переменных, приводящее к уменьшению числа степеней свободы механической системы, что соответствует методу Лагранжа по замене переменных.

Применение нового метода к составлению уравнений динамики волнового твердотельного гироскопа
(по В.Ф. Журавлеву, Д.М. Климову)

Волновой твердотельный гироскоп моделируется как упругое гибкое кольцо



Динамика упругого кольца описывается функцией Лагранжа L :

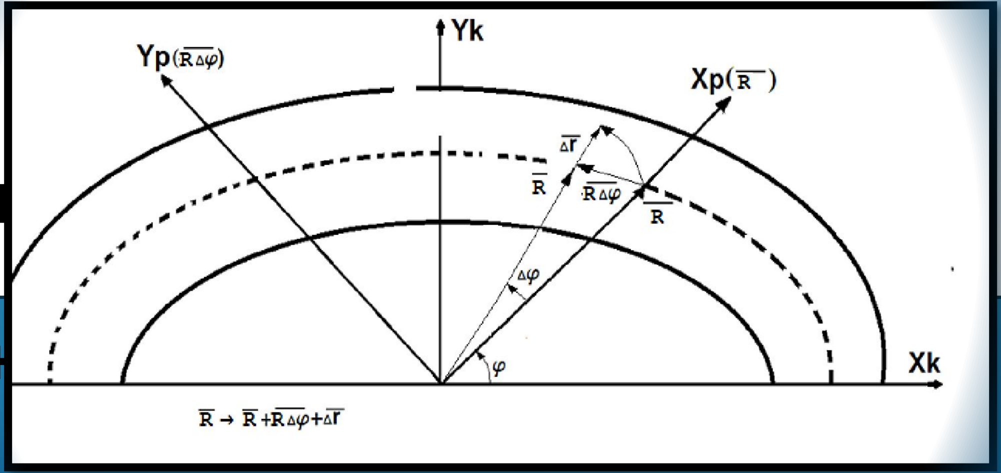
$$L=1/2\ ((v1+(R-w)\ \Omega)^2+(w1+v\ \Omega)^2)-1/2\ \ \kappa1^2\ (wss+vs\ )^2-$$
$$-(1/2\ )\ \delta1^2\ (vs\ -w)^2$$

при наложении условия нерастяжимости средней линии кольца:

$$(vs+R-w)^2+(ws+v)^2=R^2$$

где, (w, v)-деформации кольца вдоль радиуса и образующей

(w1,s v1,s)-скорость их изменений по времени и по коор. соответствен



Новые соотношения для гибкого кольца

•

Если пренебречь потенциальной энергией, то эффект инертных свойств упругой деформацией гибкого кольца следует из оставшейся кинематической энергии:

$$L=1/2\ ((v1+(R-w)\ \Omega)^2+(w1+v\ \Omega)^2)$$

Если не пренебрегать потенциальной энергией, то новый метод при наложении условия нерастяжимости даст следующие соотношения:

$$d[SID]us=\ 1/\Omega^2\ (1/2\ d[\Omega^2\ r\psi^2+\Omega^2\ v\psi^2]-((R+r)^2+v^2)\ d[\Omega^2/2])\Lambda d[\psi]\Lambda d[\varphi]+\kappa 1^2 d[r+rss]\Lambda(d[R\ \ Q]-(r+rss)\ d[\varphi])\Lambda d[t]=0$$

Анализ приближений условий нерастяжимости средней линии на основе НОВОЙ формы нерастяжимости:

$$vs+R-w \to R\ Cos[Q],\ -ws-v \to R\ Sin[Q]$$

приводит, к тому, что изменение потенциальной энергии

$$П2=1/2\ \ к1^2\ (-rss+vs)^2$$

не происходит; остается только влияние кинетической энергии, искаженное условием нерастяжимости:

$$1/2\ d[\Omega^2\ r\psi^2+\Omega^2\ v\psi^2]-((R+r)^2+v^2)\ d[\Omega^2/2]=0$$

Таким образом, получено уравнение для гибкого кольца, моделирующее ВТГ.

ВЫВОД

Эффект инертных свойств упругой деформацией гибкого кольца следует из уравнений кольца и в случае когда потенциальной энергией можно пренебречь.

В рамках приближений, введенных авторами книги, влияние нерастяжимости средней линии гибкого кольца приводит к пренебрежению изменениями потенциала,остается только влияние кинетической энергии, искаженной условием нерастяжимости, которое удовлетворяет уравнению:

ВЫВОД

$1/2\ d[\Omega^2\ r\psi^2+\Omega^2\ v\psi^2]-((R+r)^2+v^2)\ d[\Omega^2/2]=0$

или

$((R+r)^2+v^2)\ d[\Omega^2/2]=1/2\ d[r1^2+v1^2]$

подобному уравнению термодинамики :

$T\ dS=dU+P\ dV$

$T\ dS=dQ$- поток тепла

$d[S]=dQ/T$

где

$\Omega^2/2$-подобна энтропии ,(r^2+v^2)-подобна температуре

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Картан Э.Д. Интегральные инварианты М.: 1922 г.

2. Суслов Г.К. Теоретическая механика, (издание 3), М : Л : ГИТТЛ, 1946 г.

3..Чаплыгин С.А. Исследования по динамике НЕГОЛОНОМНЫХ систем, М.:1949 г.

4. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем, М.: 1967 г.

5. Журавлёв В.Ф., Розенблат Г.М. Теоретичекая механика в решениях задач
(из сборника Мещерского И.В. Системы с качением. Неголономные связи), М.: 2009 г.

6. Журавлев В.Ф. , Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп, М.: 1985 г.

Котлов Вадим Михайлович
vadimkot366@yandex.ru