Динамика механической системы.

Система материальных точек или механическая система – совокупность материальных точек или материальных тех, объединяемых общими законами взаимодействия (положение или движение каждой из точек или тела зависит от положения и движения всех остальных)

Свободная механическая система – совокупность материальных точек или материальных тел, движение которых не ограничивается никакими связями (например, планетная система, в которой планеты рассматриваются как материальные точки).

Несвободная механическая система – механическая система движение материальных точек или тел которой ограничиваются наложенными на нее связями.

Пусть система состоит из N материальных точек $\Rightarrow$ $3N$ координат.

На систему наложено m связей вида $f_l(x_k, y_k, z_k, t) = 0, \;\; l = \overline{1,m}$

Число независимых координат: $n = 3N - m$

Обобщенные координаты $q_i, i = \overline{1,n}$ – независимые координаты, однозначно определяющие положение механической системы в пространстве в любой момент времени.

Внешними силами механической системы $\bar{F}_k^{(e)}$ называют силы, с которыми точки системы взаимодействуют с телами и точками, не входящими в данную систему.

Внутренними силами механической системы $\bar{F}_k^{(i)}$ называют силы взаимодействия между собой точек данной системы.

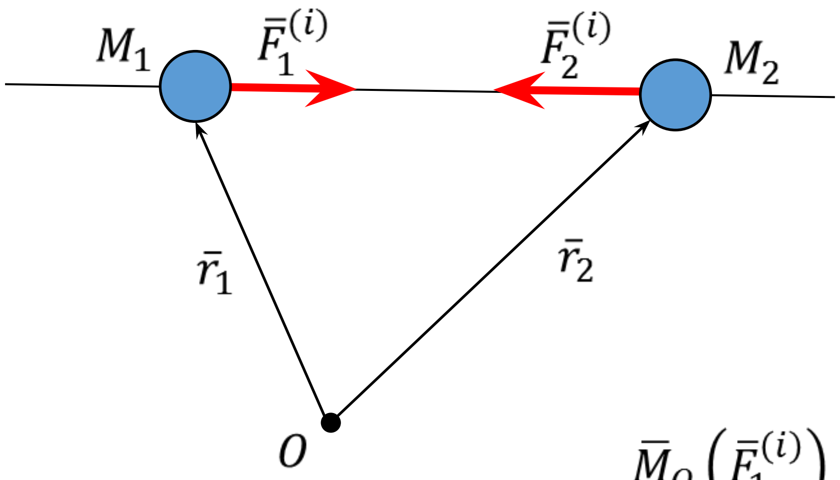
Одна и та же сила может являться как внешней, так и внутренней силой. Все зависит от того, какая механическая система рассматривается.

Свойство внутренних сил механической системы.

Теорема: Главный вектор всех внутренних сил системы и главный момент этих сил относительно произвольной точки равны нулю при любом состоянии системы.

Доказательство:

Рассмотрим механическую систему, состоящую из точек $M_k, k = \overline{1, N}$.



Для двух произвольных точек M_1 и M_2 по третьей аксиоме динамики:

$$\bar{F}_1^{(i)} + \bar{F}_2^{(i)} = 0$$

Суммируя по всем точкам системы, получим:

$$\bar{R}^{(i)} = \sum \bar{F}_k^{(i)} = 0.$$

Возьмем произвольную точку O. Относительно этой точки:

$$\bar{M}_O\left(\bar{F}_1^{(i)}\right) + \bar{M}_O\left(\bar{F}_2^{(i)}\right) = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1^{(i)} + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2^{(i)} = -\bar{r}_1 \times \bar{F}_2^{(i)} + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2^{(i)} =$$

$$= \overline{M_1 M_2} \times \bar{F}_2^{(i)} = 0 \quad \text{т.к.} \quad \overline{M_1 M_2} \parallel \bar{F}_2^{(i)}$$

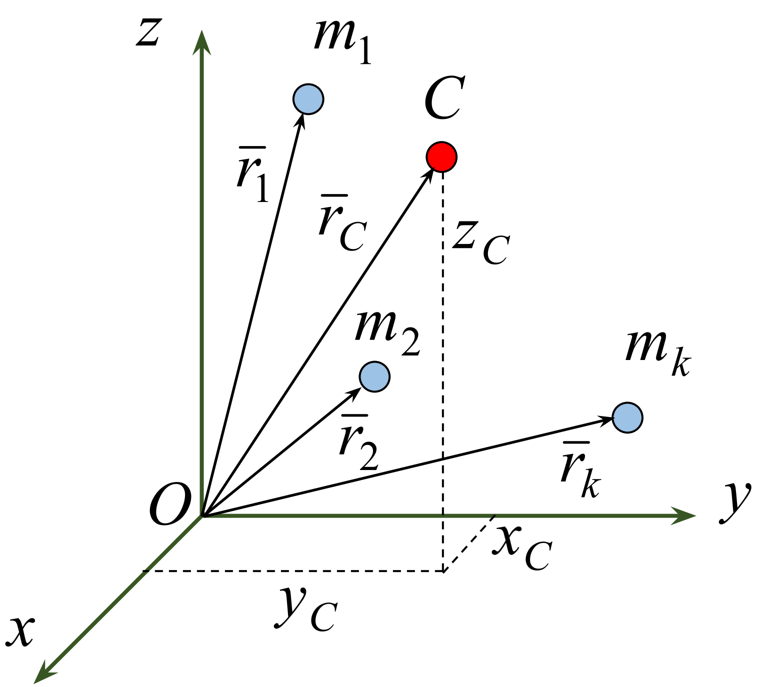
Суммируя по всем точкам системы, получим:

$$\bar{L}_O^{(i)} = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(i)}) = 0.$$

Центр масс механической системы.

МГТУ им. Н. Э. Баумана

Движение механической системы зависит не только от действующих сил, но и от ее суммарной массы и распределения масс внутри системы.



Рассмотрим механическую систему, состоящую из точек $M_k(m_k), k = \overline{1, N}$.

Масса системы равна арифметической сумме масс всех точек или тел, образующих систему:

$$M = \sum m_k$$

Для описания движения системы в целом вводится геометрическая точка, называемой ***центром масс***, радиус-вектор которой определяется выражением:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum \bar{r}_k m_k}{M}.$$

Координаты центра масс:

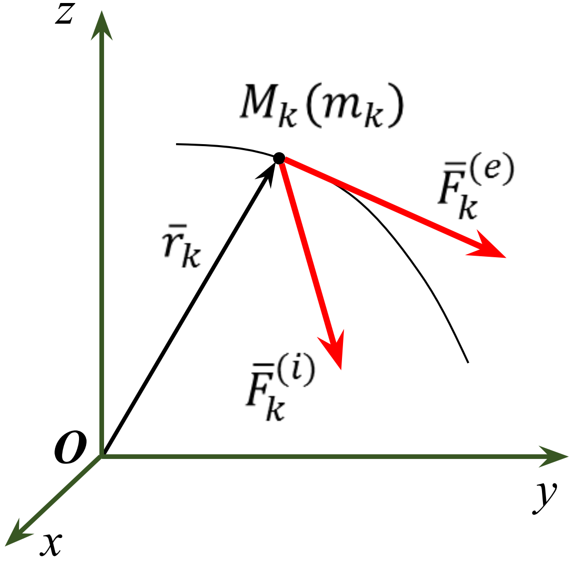
$$x_C = \frac{\sum x_k m_k}{M}; \quad y_C = \frac{\sum y_k m}{M}; \quad z_C = \frac{\sum z_k m_k}{M}.$$

Центр масс является геометрической, а не материальной точкой и может не совпадать ни с одной точкой системы.

Для тела, находящегося в однородном поле тяготения (*g=const*), положения центра тяжести и центра масс совпадают. Однако понятие о центре масс является более общим, чем понятие о центре тяжести и сохраняет свой смысл для тела, находящегося в любом силовом поле, и, как характеристика распределения масс имеет смысл не только для тела, но и для любой механической системы.

Дифференциальные уравнения движения механической системы.

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из точек M_k, массой m_k, $k = \overline{1, N}$ под действием внешних и внутренних сил.



Для k-ой точки системы можно записать дифференциальное уравнение движения:

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^{(i)} + \bar{F}_k^{(e)}$$

$$\bar{a}_k = \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2},$$

$$m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}_k^{(i)} + \bar{F}_k^{(e)}, k = \overline{1, N}$$ – дифференциальные уравнения движения механической системы

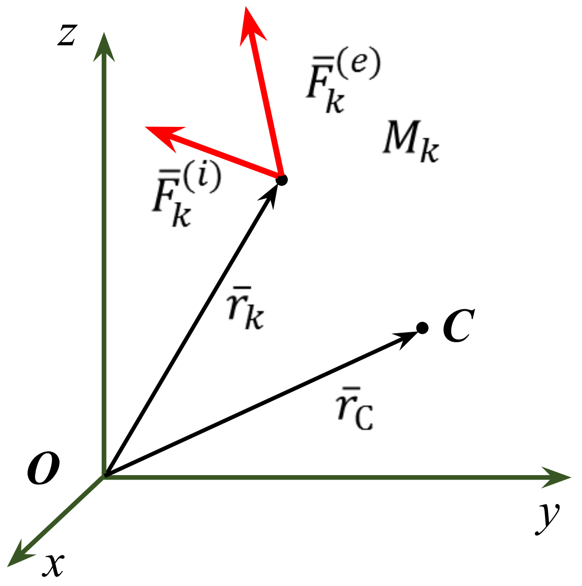
$$\begin{cases} m\ddot{x}_k = F_{kx}^{(i)} + F_{kx}^{(e)}, \\ m\ddot{y}_k = F_{ky}^{(i)} + F_{ky}^{(e)}, \\ m\ddot{z}_k = F_{kz}^{(i)} + F_{kz}^{(e)}. \end{cases}$$

Начальные условия:

$$x_k(0) = x_{k0}; \quad y_k(0) = y_{k0}; \quad z_k(0) = z_{k0};$$
$$\dot{x}_k(0) = \dot{x}_{k0}; \quad \dot{y}_k(0) = \dot{y}_{k0}; \quad \dot{z}_k(0) = \dot{z}_{k0}.$$

Система из *3N* дифференциальных уравнений в общем случае не интегрируется.

Теорема о движении центра масс механической системы.



$$M_k(m_k),\ k=\overline{1,N}$$

$$m_k\frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2}=\bar{F}_k^{(i)}+\bar{F}_k^{(e)}, k=\overline{1,N}$$

Просуммируем данные уравнения по всем точкам системы:

$$\sum m_k\frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2}=\cancel{\sum\bar{F}_k^{(i)}}+\sum\bar{F}_k^{(e)}$$

$$\bar{R}^{(i)}=\sum\bar{F}_k^{(i)}=0$$

В левой части уравнения поменяем порядок суммирования и дифференцирования:

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum m_k\bar{r}_k=\sum\bar{F}_k^{(e)},\qquad M\bar{r}_C=\sum m_k\bar{r}_k,\qquad \sum\bar{F}_k^{(e)}=\bar{R}^{(e)}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(M\bar{r}_C)=\bar{R}^{(e)},\qquad \boxed{M\bar{a}_C=\bar{R}^{(e)}}$$ – ***теорема о движении центра масс механической системы***

Центр масс механической системы движется как материальная точка, как бы обладающая массой системы под действием всех внешних сил, действующих на точки системы.

Частные случаи движения центра масс.

1. Пусть $\bar{R}^{(e)} = 0$.

$$\bar{a}_C = \frac{d\bar{v}_C}{dt} = 0; \qquad \bar{v}_C = \bar{C}_1; \quad \bar{r}_C = \bar{C}_1 t + \bar{C}_2$$

Н.У.: $t = 0, \quad \bar{r}_C = \bar{r}_{C0}, \quad \bar{v}_C = \bar{v}_{C0}$

$$\bar{v}_C = \bar{v}_{C0}, \quad \bar{r}_C = \bar{v}_{C0} t + \bar{r}_{C0}$$

Если главный вектор внешних сил, действующих на точки системы равен нулю, то центр масс системы движется равномерно и прямолинейно.

Если при этом $\bar{v}_{C0} = 0$, то $\bar{r}_C = \bar{r}_{C0}$. Т.е. центр масс системы покоится в течении всего времени движения системы.

2. Пусть $R_x^{(e)} = 0$.

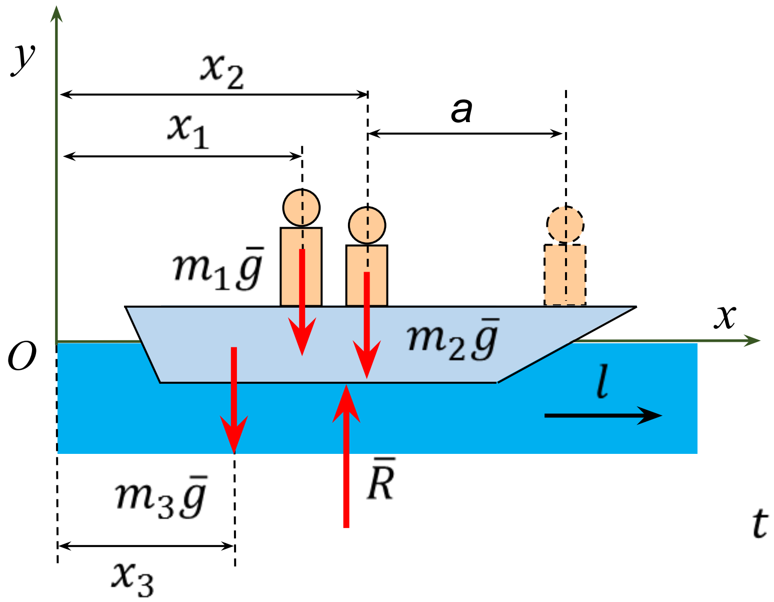
$$\ddot{x}_C = 0; \qquad v_{xC} = C_1; \qquad x_C = C_1 t + C_2$$

Н.У.: $t = 0, \quad x_C = x_{C0}, \quad v_{xC} = v_{xC0}$

$$v_{xC} = v_{xC0}, \quad x_C = v_{xC0} t + x_{C0}$$

Пример.

Два человека массами m_1 и m_2 находятся в лодке массой m_3. В начальный момент времени лодка с людьми находилась в покое. Определить перемещение лодки, если человек массой m_2 пересел к носу лодки на расстояние a.



Решение:

$$M\bar{a}_C = m_1\bar{g} + m_2\bar{g} + m_3\bar{g} + \bar{R}$$

$$x: \quad M\ddot{x}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_C = C_1;$$

$$\text{Н.У.: } t = 0, \quad \dot{x}_{0C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad x_C = const$$

$$t = 0: \quad x_C = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$$

Пусть человек переместился на расстояние a, а лодка на расстояние l.

$$t = t_1: \quad x_C = \frac{1}{M}[m_1(x_1 + l) + m_2(x_2 + a + l) + m_3(x_3 + l)]$$

$$\cancel{m_1x_1} + \cancel{m_2x_2} + \cancel{m_3x_3} = m_1(\cancel{x_1} + l) + m_2(\cancel{x_2} + a + l) + m_3(\cancel{x_3} + l)$$

$$l = -\frac{m_2a}{m_1+m_2+m_3}$$

Лодка переместится на расстояние l в противоположную сторону.

Дифференциальные уравнения поступательного движения.

Для описания поступательного движения тела, достаточно задать движение любой одной его точки. В качестве этой точки в динамике принимается центр масс тела.

Свободное твердое тело при поступательном движении имеет три степени свободы, и его движение можно задать, определив движение центра масс в декартовой системе координат.

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^{(e)}, \\ m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^{(e)}, \\ m\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^{(e)}. \end{cases}$$

– ***дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела.***

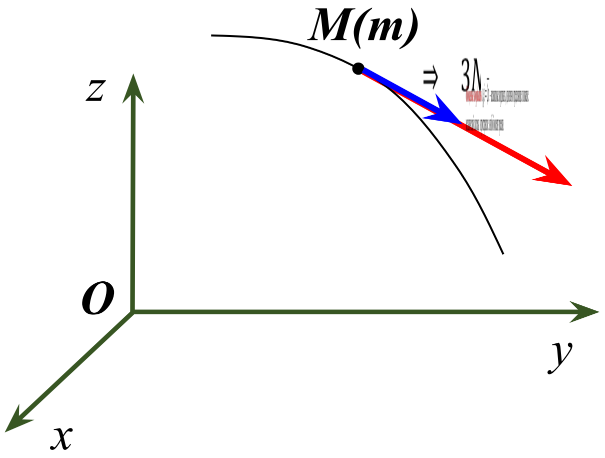
Начальные условия:

$$x_C(0) = x_{C0}; \quad y_C(0) = y_{C0}; \quad z_C(0) = z_{C0};$$
$$\dot{x}_C(0) = \dot{x}_{C0}; \quad \dot{y}_C(0) = \dot{y}_{C0}; \quad \dot{z}_C(0) = \dot{z}_{C0}.$$

Количество движения точки и механической системы.

МГТУ им. Н. Э. Баумана

Одной из мер движения точки или системы является количество их движения.



$\Rightarrow 3N$

На систему наложено m связей вида $f_l(x_k, y_k, z_k, t) = 0, \quad l = \overline{1,m}$

Число независимых координат: $n = 3N - m$

Проекции на декартовы оси:

Внешними силами механической системы $\bar{F}_k^{(e)}$ называют силы, с которыми точки системы взаимодействуют с телами и точками, не входящими в данную систему.

Внутренними силами механической системы $\bar{F}_k^{(i)}$ называют силы взаимодействия между собой точек данной системы.

Рассмотрим механическую систему состоящую из точек M_k, $k = \overline{1,N}$

В отличие от вектора количества движения точки, вектор количества движения системы является ***свободным вектором*** и не имеет точки приложения.

Проекции на декартовы оси:

$\bar{F}^{(i)}$

$\bar{F}^{(i)} \quad M_2$

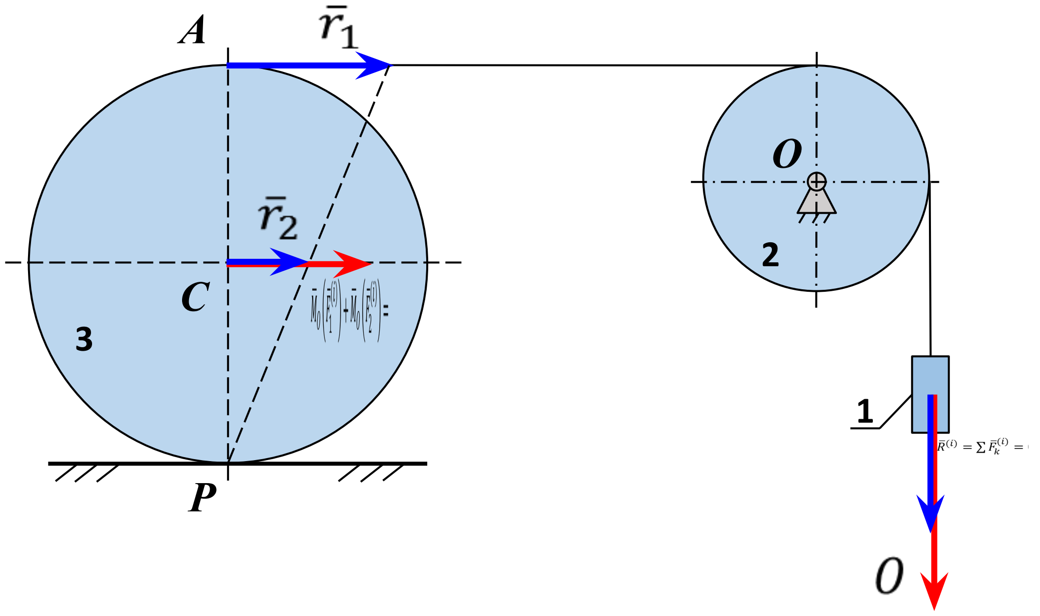
Для двух произвольных точек M_1 и M_2 по третьей аксиоме динамики:

Если система состоит из твердых тел, то:

$\bar{F}^{(i)} + \bar{F}^{(i)} = 0$

Количество движения точки и механической системы.

Пример. Для заданной системы определить количество движения. Колесо катится без проскальзывания, массы звеньев m_1, m_2, m_3. Груз 1 опускается со скоростью v_1.

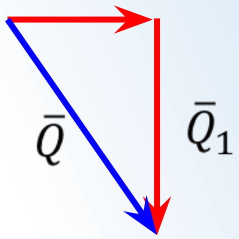


$$\bar r_1 \times \bar F_1^{(i)} + \bar r_2 \times \bar F_2^{(i)}$$

$$= -\bar r_1 \times \bar F_2^{(i)} + \bar r_2 \times \bar F_2^{(}$$

$$= \overline{M_1 M_2} \times \bar F_2^{(i)}$$

$$=$$



Колесо катится без проскальзывания:

$$= 0$$ т.к. $\overline{M_1 M_2} \parallel \bar F_2^{(i)}$

$$Q = \sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_3 \frac{v_1}{2})^2}$$

Элементарный и полный импульс силы.

Действие силы $\bar F$ на материальную точку в течение времени dt характеризует ***элементарный импульс силы***:

$$d\bar S = \bar F dt.$$

Полным импульсом силы $\bar F$, действующей на материальную точку в течение времени t, называется вектор:

$$\bar S = \int_0^t \bar F dt.$$

Теорема об изменении количества движения материальной точки.

Основное уравнение динамики точки: $m\bar{a} = \bar{F}$

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{q}}{dt} = \bar{F}.$$

$\boxed{\frac{d\bar{q}}{dt} = \bar{F}}$ – теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме.

Первая производная по времени от вектора количества движения точки равна равнодействующей активных сил и реакций связей, действующих на точку.

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \bar{F} \ | \cdot dt$$

Рассмотрим механическую систему, состоящую из точек $M_k(m_k), k = \overline{1,N}$.

$$\bar{r}_C = \frac{\sum \bar{r}_k m_k}{M}. \qquad \boxed{M = \sum m_k}$$

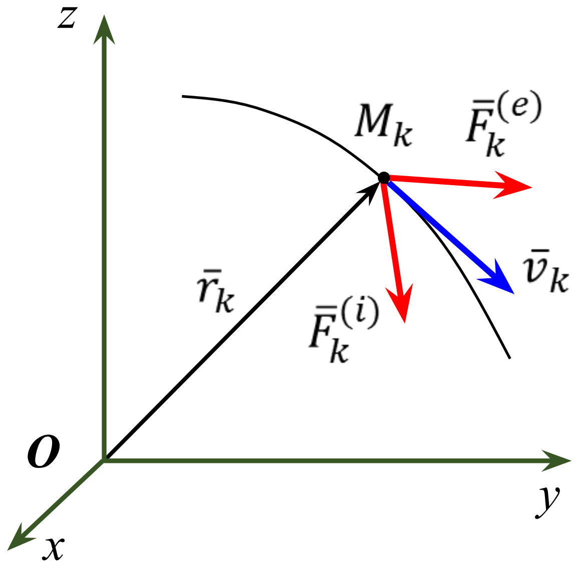
Дифференциал количества движения точки равен элементарному импульсу равнодействующей силы, действующей на точку.

$$x_C = \frac{\sum x_k m_k}{M}; \quad y_C = \frac{\sum y_k m}{M}; \quad z_C = \frac{\sum z_k m_k}{M}. \qquad \Rightarrow \boxed{m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \bar{S}}$$

– теорема об изменении количества движения материальной точки в интегральной форме.

Изменение количества движения точки за промежуток времени от 0 до t равно полному импульсу равнодействующей силы, действующей на точку за тот же промежуток времени.

Теорема об изменении количества движения механической системы.



$$M_k(m_k),\ k = \overline{1,N}$$

$$\frac{d}{dt}(m_k\bar{v}_k) = \bar{F}_k^{(i)} + \bar{F}_k^{(e)}, k = \overline{1,N}$$

Просуммируем данные уравнения по всем точкам системы:

$$\sum \frac{d}{dt}(m_k\bar{v}_k) = \cancel{\sum \bar{F}_k^{(i)}} + \sum \bar{F}_k^{(e)}$$

$$\bar{R}^{(i)} = \sum \bar{F}_k^{(i)} = 0$$

В левой части уравнения поменяем порядок суммирования и дифференцирования:

$$\frac{d}{dt}\sum m_k\bar{v}_k = \sum \bar{F}_k^{(e)},$$

$$\boxed{\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)} = \bar{R}^{(e)}}$$

– теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме.

Первая производная по времени от вектора количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил, действующих на точки этой системы.

Теорема об изменении количества движения механической системы.

$$\boxed{d\bar{Q} = \sum \bar{F}_k^{(e)} dt = \sum d\bar{S}(\bar{F}_k^{(e)})}$$

Дифференциал количества движения механической системы равен сумме элементарных импульсов внешних сил, действующих на точки системы.

$$\int_{\bar{Q}_0}^{\bar{Q}} d\bar{Q} = \int_0^t \sum \bar{F}_k^{(e)} dt = \sum \int_0^t \bar{F}_k^{(e)} dt = \sum \bar{S}_k^{(e)}$$

$$\boxed{\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^{(e)}}$$

– теорема об изменении количества движения механической системы в интегральной форме.

Изменение количества движения системы за время t равно векторной сумме полных импульсов внешних сил, действующих на точки механической системы за то же время.

Законы сохранения количества движения механической системы.

1. Пусть $\bar{R}^{(e)} = \sum \bar{F}_k^{(e)} = 0.$

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = 0; \quad \Rightarrow \quad \bar{Q} = \overline{const}.$$

Если главный вектор внешних сил системы равен нулю, то вектор количества движения системы постоянен.

$Q_x = C_1; \quad Q_y = C_2; \quad Q_z = C_3$ – первые интегралы уравнений движения системы.

2. Пусть $R_x{}^{(e)} = 0.$ $\quad \dfrac{dQ_x}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_x = const.$

Если проекция главного вектора внешних сил, действующих на точки системы, на какую-либо ось равна нулю, то проекция вектора количества движения системы на ту же ось остается постоянной величиной.