

Функция нескольких переменных. Общие свойства. Непрерывность функции. Линии уровня, поверхности уровня.

Семинар 21

Определение 1

Если каждой паре (x, y) значений двух независимых друг от друга переменных величин x, y из некоторой области их изменения D соответствует определенное значение величины z , то z есть функция двух независимых переменных x, y , определенных в области D .

Обозначение: $z=f(x, y)$, $z=F(x, y)$, и так далее.

Способы задания функции: аналитический, табличный, графический.

Определение 2

Совокупность пар (x, y) значений x, y , при которых определена функция $z=f(x, y)$, называется областью определения или областью существования этой функции.

Пусть дана функция $z=f(x, y)$, определенная в некоторой области G плоскости OXY . Рассмотрим некоторую определенную точку $M_0(x_0, y_0)$, лежащую в области G или на ее границе.

Определение 3

Число A называется пределом функции $f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для всех точек $M(x, y)$, для которых выполняется неравенство $|MM_0| < r$ имеет место неравенство

Определение 4

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x, y)$.
Функция $z=f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если имеет место равенство $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ (1)

Причем точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области.

Если в некоторой точке $N_0(x_0, y_0)$ не выполняется условие (1), то точка $N_0(x_0, y_0)$ называется точкой разрыва функции $z=f(x, y)$. Условие (1) может не выполняться, например, в следующих случаях:

1) $z=f(x, y)$ определена во всех точках некоторой окрестности точки $N_0(x_0, y_0)$, за исключением самой точки $N_0(x_0, y_0)$.

2) $z=f(x, y)$ определена во всех точках окрестности точки $N_0(x_0, y_0)$, но не существует $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y)$

3) $z=f(x, y)$ определена во всех точках окрестности точки $N_0(x_0, y_0)$ и существует $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y)$, но $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$

Определение 5

Линией уровня функции $z=f(x, y)$ называется линия $z=f(x, y)=c$ на плоскости OXY , в точках которой функция сохраняет постоянное значение $z=c$.

Определение 6

Поверхностью уровня функции $u=f(x,y,z)$ называется поверхность $u=f(x,y,z)=c$ плоскости, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $u=c$.

Примеры с решениями

1. Найти область определения функции $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Решение.

Функция принимает действительные значения при условии $a^2 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq a^2$, т. е. областью определения данной функции является круг радиуса a с центром в начале координат, включая граничную окружность.

2. Найти область определения функции $u = \arcsin \frac{x}{y^2}$.

Решение.

Функция определена, если $y \neq 0; -1 \leq \frac{x}{y^2} \leq 1 \Rightarrow -y^2 \leq x \leq y^2$. Областью определения функции является плоскости, заключенная между двумя параболлами

$y^2 = x; y^2 = -x$, за исключением точки $O(0,0)$.

3. Найти область определения функции $u = \ln(2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6)$.

Решение.

Данная функция зависит от трех переменных и принимает действительные значения при $2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6 > 0 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{3} < -1$, т. е. область определения – часть пространства, заключенная внутри полостей двуполостного гиперболоида.

4. Найти линии уровня функции $u = x^2 + y^2$

Решение.

Уравнение семейства линий уровня имеет вид $x^2 + y^2 = C (C > 0)$.

Придавая C различные действительные значения, получим концентрические окружности с центром в начале координат.

5. Найти поверхности уровня функции $u = x^2 + z^2 - y^2$

Решение.

Уравнение семейства поверхностей имеет вид $x^2 + z^2 - y^2 = C$.

Если $C=0$, то получаем $x^2 + z^2 - y^2 = 0$ - конус.

Если $C>0$, то получаем $x^2 + z^2 - y^2 = C$ - семейство однополостных гиперболоидов;

Если $C<0$, то получаем $x^2 + z^2 - y^2 = C$ - семейство двуполостных гиперболоидов;

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти области определения функции

1) $u = \arcsin(x + y)$; ... 2) $u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$; ... 3) $u = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$; ... 4) $u = \ln(-x + y)$; ... 5) $u = \sqrt{x + y + z}$

2. Найти линии уровня функций:

1) $z = 2x + y$; ... 2) $z = x/y$; ... 3) $z = \ln \sqrt{\frac{y}{x}}$; ... 4) $z = \frac{\sqrt{x}}{y}$; ... 5) $z = e^{xy}$

3. Найти поверхности уровня функций:

1) $u = x + y + 3z$; ... 2) $u = x^2 + y^2 + z^2$; ... 3) $u = x^2 - y^2 - z^2$