

04.02.21.

Тема:

Геометрический смысл производной.

Решение примеров на геометрический смысл производной и составление касательной к графику функции.

*Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.*

Видео для усвоения материала:

<https://iu.ru/video-lessons/3fdd2954-895b-4d08-8ea2-9170ac3e7dfa>

## Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

## Геометрический смысл производной

Напомним, что графиком линейной функции  $y = kx + b$  является прямая (рис. 109). Число  $k = \operatorname{tg} \alpha$  называют *угловым коэффициентом* прямой, а угол  $\alpha$  — *углом между этой прямой и осью  $Ox$* .

Если  $k > 0$ , то  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  (рис. 109, а); в этом случае функция возрастает.

Если  $k < 0$ , то  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$  (рис. 109, б); в этом случае функция  $y = kx + b$  убывает.

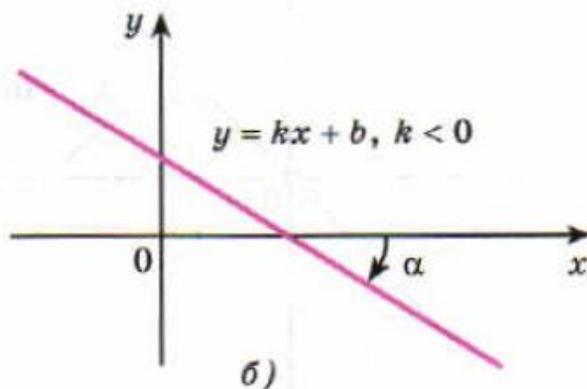
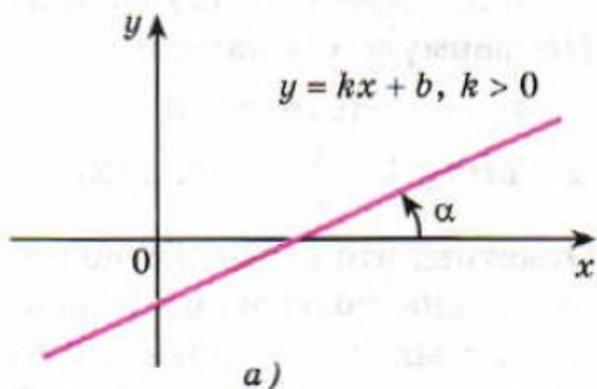


Рис. 109

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x$  равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке  $(x; f(x))$ .

**Задача 1** Найти угол между касательной к графику функции  $y = \sin x$  в точке  $(0; 0)$  и осью  $Ox$ .

► Найдем угловой коэффициент касательной к кривой  $y = \sin x$  в точке  $(0; 0)$ , т. е. значение производной этой функции при  $x = 0$ .

Производная функции  $f(x) = \sin x$  равна  $f'(x) = \cos x$ . По формуле (2) находим

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(0) = \cos 0 = 1,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \quad (\text{рис. 112}). \triangleleft$$

Отметим, что это свойство полезно для построения графика  $y = \sin x$ : в точке  $(0; 0)$  синусоида касается прямой  $y = x$  (рис. 112).

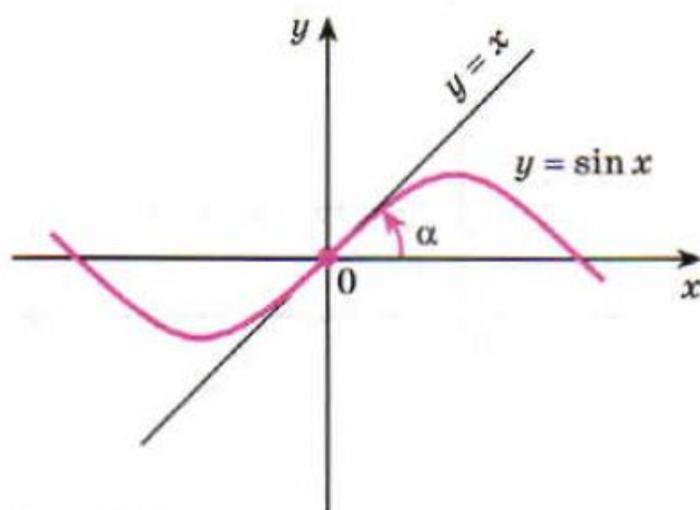


Рис. 112

**Задача 2** Найти угол между касательной к параболе  $y = x^2$  в точке  $(1; 1)$  и осью  $Ox$  и написать уравнение этой касательной.

► Производная функции  $f(x) = x^2$  равна  $f'(x) = 2x$ . По формуле (2) находим  $\operatorname{tg} \alpha = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$ , откуда  $\alpha = \operatorname{arctg} 2$  (рис. 113).

Найдем теперь уравнение касательной  $AB$  к параболе  $y = x^2$  в точке  $A(1; 1)$  (см. рис. 113). Если  $y = kx + b$  — уравнение прямой  $AB$ , то  $k = \operatorname{tg} \alpha = 2$ , т. е. уравнение касательной имеет вид  $y = 2x + b$ . Подставляя в это уравнение координаты точки  $(1; 1)$ , получаем  $1 = 2 \cdot 1 + b$ , откуда  $b = -1$ . Следовательно,  $y = 2x - 1$  — уравнение искомой касательной.  $\triangleleft$

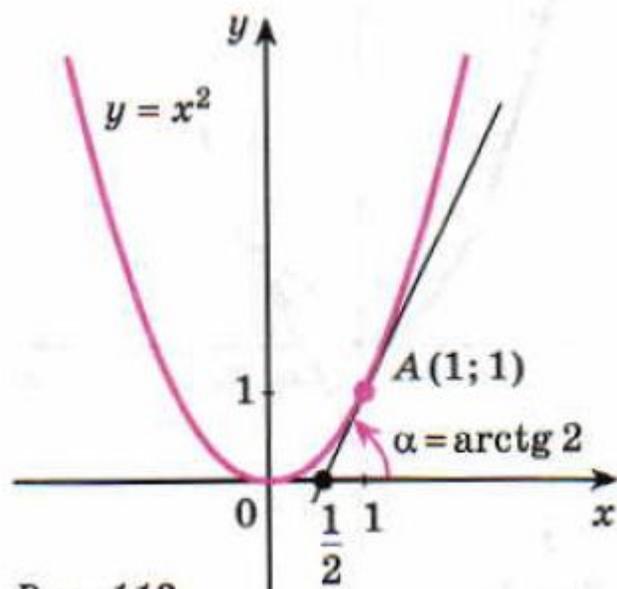


Рис. 113

уравнение касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad \circ \quad (3)$$

**Задача 3** Найти уравнение касательной к графику функции  $y = \cos x$  в точке с абсциссой  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ .

► Найдём значения функции  $f(x) = \cos x$  и её производной в точке  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ :

$$f(x_0) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f'(x_0) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

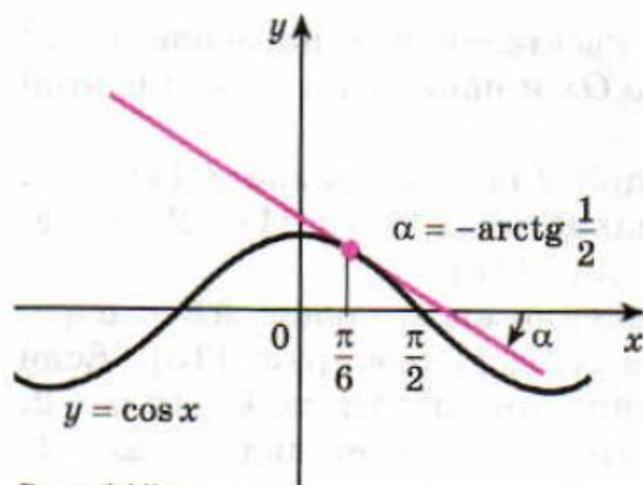


Рис. 115

Используя формулу (3), найдём искомое уравнение касатель-

$$\text{ной: } y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \left( x - \frac{\pi}{6} \right),$$

$$\text{или } y = -\frac{1}{2}x + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} \right). \quad \triangleleft$$

Касательная к графику функции  $y = \cos x$  в точке  $\left( \frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$  изображена на рисунке 115.

## Практическая часть.

**858** Найти угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ :

1)  $f(x) = x^3, x_0 = 1;$                       2)  $f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{4};$

3)  $f(x) = \ln x, x_0 = 1;$

**859** Найти угол между касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$  и осью  $Ox$ :

1)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3, x_0 = 1;$                       2)  $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 1;$

3)  $f(x) = 2\sqrt{x}, x_0 = 3;$                       4)  $f(x) = \frac{18}{\sqrt{x}}, x_0 = 3;$

**860** Написать уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ :

1)  $f(x) = x^2 + x + 1, x_0 = 1;$                       2)  $f(x) = x - 3x^2, x_0 = 2;$