Четность, нечетность периодичность функций

Функцию $f(x)$, $x \in X$ называют четной, если для любого значения x из множества X выполняется равенство:

$$f(-x)=f(x)$$

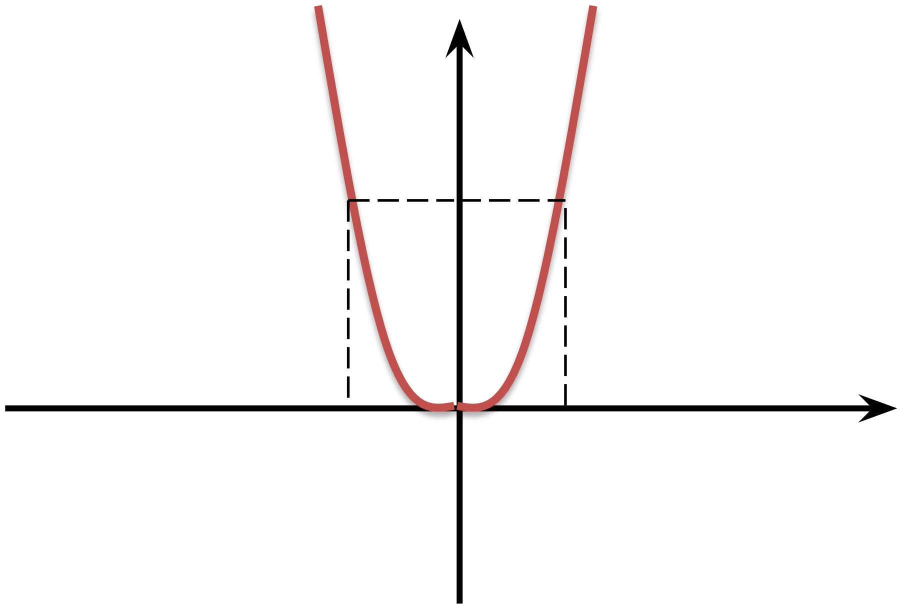
Функцию $f(x)$, $x \in X$ называют нечетной, если для любого значения x из множества X выполняется равенство:

$$f(-x)=-f(x)$$

Если числовое множество X вместе с каждым своим элементом x содержит и противоположный элемент -x, то такое множество называют симметричным множеством.

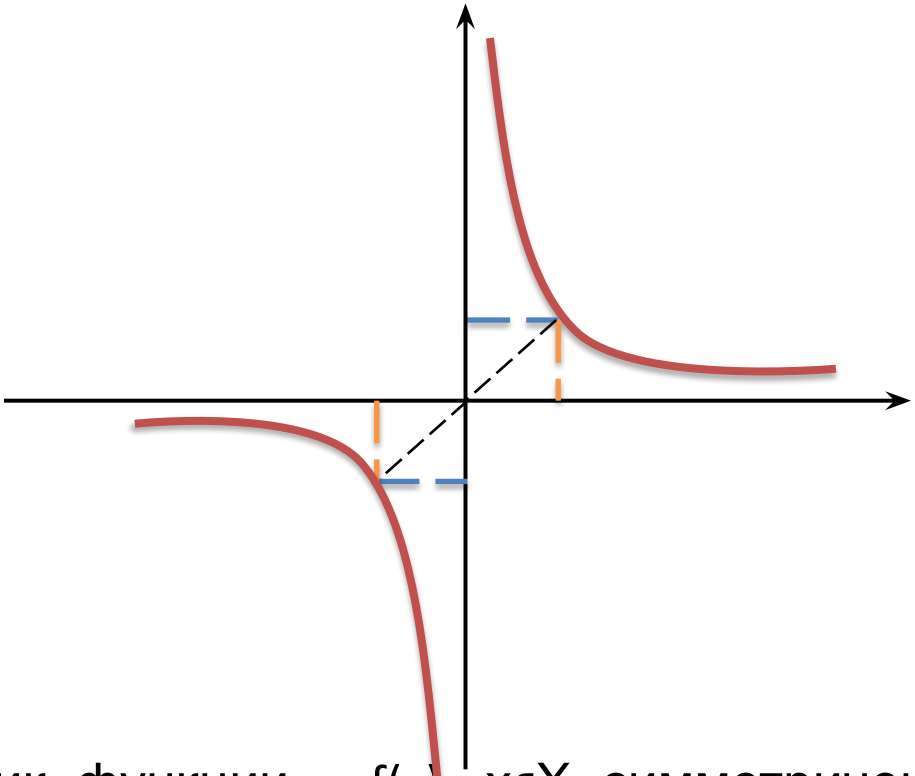
Например: отрезок [-5, 5] – симметричное множество, а отрезок [-4, 5]– не симметричное множество (в него входит число 5, но не входит противоположное ему -5)

График четной функции симметричен относительно оси у.



Если график функции y=f(x), x∈X симметричен относительно оси ординат, то y=f(x), x∈X – четная функция.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.



Если график функции y=f(x), xϵX симметричен относительно начала координат, то y=f(x), xϵX - нечетная функция

Если функция $y=f(x)$, $x \in X$ четная или нечетная, то ее область определения X – симметричное множество.

Если же X – несимметричное множество, то функция $y=f(x)$, $x \in X$ не может быть ни четной ни нечетной.

Алгоритм исследования функции $y=f(x)$, $x \in X$ на четность.

1) Установить, симметрична ли область определения функции.

Если нет, функция не является ни четной, ни нечетной. Если да, то перейти ко второму шагу алгоритма.

2) Составить выражение $f(-x)$.

Сравнить $f(-x)$ и $f(x)$:

а) если $f(-x)=f(x)$, то функция четная;

б) если $f(-x)=-f(x)$, то функция нечетная;

в) если хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) \neq f(x)$ и хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение$f(-x) \neq -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Пример 1

- Исследовать на четность функцию: $y=x^4+\frac{2}{x^6}$

Решение:

1. $D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$ – симметричное множество

2. $f(-x)=(-x)^4+\dfrac{2}{(-x)^6}=x^4+\dfrac{2}{x^6}$

3. Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство f(-x)=f(x).

Таким образом, y=$x^4+\frac{2}{x^6}$ - четная функция

Пример 2

Исследовать на четность функцию: $y=x^3-\frac{3}{x^5}$

Решение:

1. $D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$ – симметричное множество

2. $$f(-x)=(-x)^3-\frac{3}{(-x)^5}=-x^3-\frac{3}{-x^5}=-\left(x^3-\frac{3}{x^5}\right)$$

3. Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$.

Таким образом, $y=x^3-\frac{3}{x^5}$ – нечетная функция

Пример 3

Исследовать на четность функцию: $y=\frac{x-4}{x^2-9}$.

Решение:

1. $D(f)=(-\infty;\ -3)\cup(-3;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$ – симметричное множество.

2. $f(-x)=\dfrac{(-x)-4}{(-x)^2-9}=-\dfrac{x+4}{x^2-9}$

3.Сравнив $f(-x)$ и $f(x)$, замечаем, что, скорее всего, не выполняются ни тождество $f(-x)=f(x)$, ни тождество $f(-x)=-f(x)$. Например, $x=4$, $f(4)=0$, $f(-4)=-\frac{8}{7}$, то есть $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$.

Таким образом, функция не является ни четной ни нечетной.

Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют периодической, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из множества X выполняется двойное равенство:

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$$

Число T, удовлетворяющее указанному условию, называют периодом функции $y = f(x)$.

Пример 1:

- Найти основной период функции $y = sin\,0{,}5x.$

Решение:

T – основной период функции $y = sin\,0{,}5x$

$f(x) = sin\,0{,}5x$

$f(x+T) = sin\,0{,}5(x+T) = sin(0{,}5x + 0{,}5T)$

$sin(0{,}5x + 0{,}5T) = sin\,0{,}5x$

$0{,}5x + 0{,}5T = 0{,}5x$

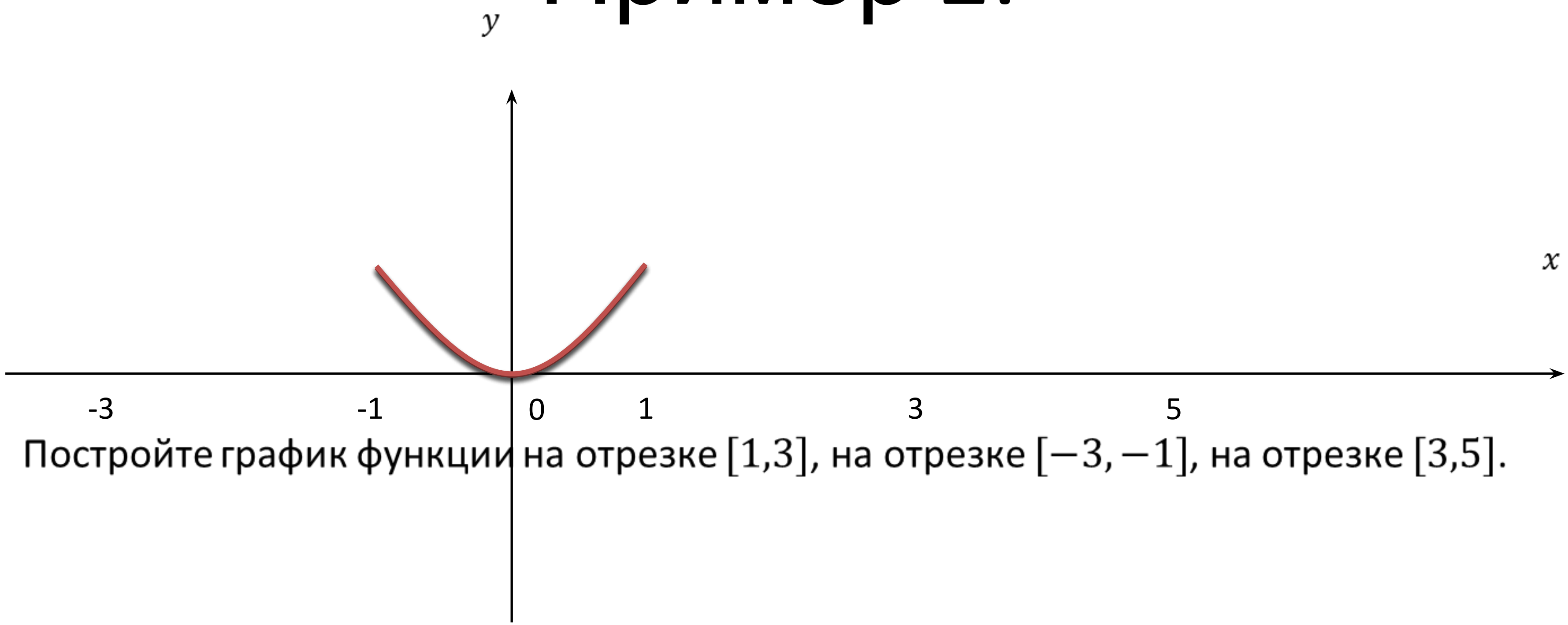
$0{,}5T = 2\pi n$

$0{,}5T = 2\pi$

$T = 4\pi$

Ответ: $T = 4\pi$.

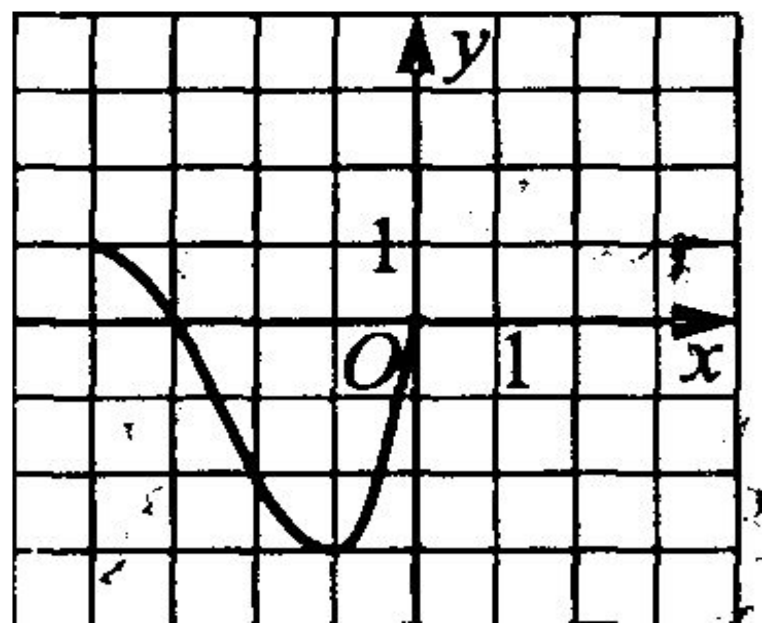
Пример 2:



Постройте график функции на отрезке $[1,3]$, на отрезке $[-3,-1]$, на отрезке $[3,5]$.

Пример 3

Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечетной. На рисунке изображен ее график на отрезке $[-4; 0]$. Найдите $f(-4) + f(1)$.



Пример 4

.

Периодическая функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Ее период равен 3 и $f(1) = 2$. Найдите значение выражения: 3 $f(10) + 4f(-5)$.

Разбейте функции на три группы:

- *четные*
- *нечетные*
- *не являются ни четными, ни нечетными*

1) $y = \cos 3x$	2) $y = 3\sin 2x$
3) $y = \frac{x}{2} \cdot \sin^2 x$	4) $y = \frac{1}{x} \cdot tgx$
5) $y = \cos x + x$	6) $y = \sin x - x$
7) $y = \sin(\frac{\pi}{2} - x) + 2x$	8) $y = \frac{tgx}{2}$
9) $y = 2^{\cos x}$	10) $y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$
11) $y = \lvert tgx \rvert$	12) $y = \lvert \sin x \rvert$
13) $y = \cos(x - \pi) - x^2$	14) $y = \cos x \cdot \sin \frac{x}{2}$
15) $y = x^2 + tgx$	

Проверяем ответы

четные	нечетные	ни чет., ни нечет.
1	2	5
4	3	7
9	6	15
10	8	
11	14	
12		
13		