

Четность, нечетность периодичность функций

Функцию $f(x)$, $x \in X$ называют **четной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство:

$$f(-x) = f(x)$$

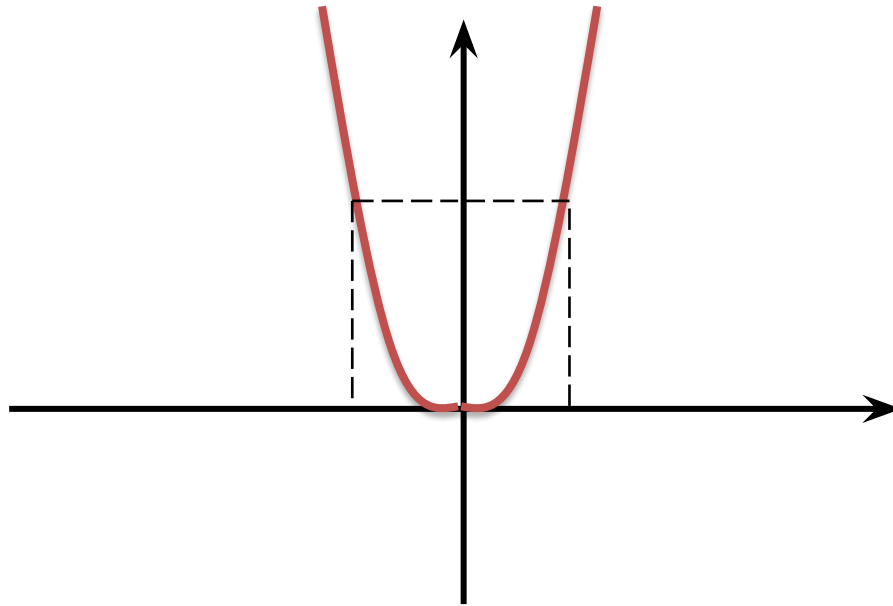
Функцию $f(x)$, $x \in X$ называют **нечетной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство:

$$f(-x) = -f(x)$$

Если числовое множество X вместе с каждым своим элементом x содержит и противоположный элемент $-x$, то такое множество называют **симметричным множеством**.

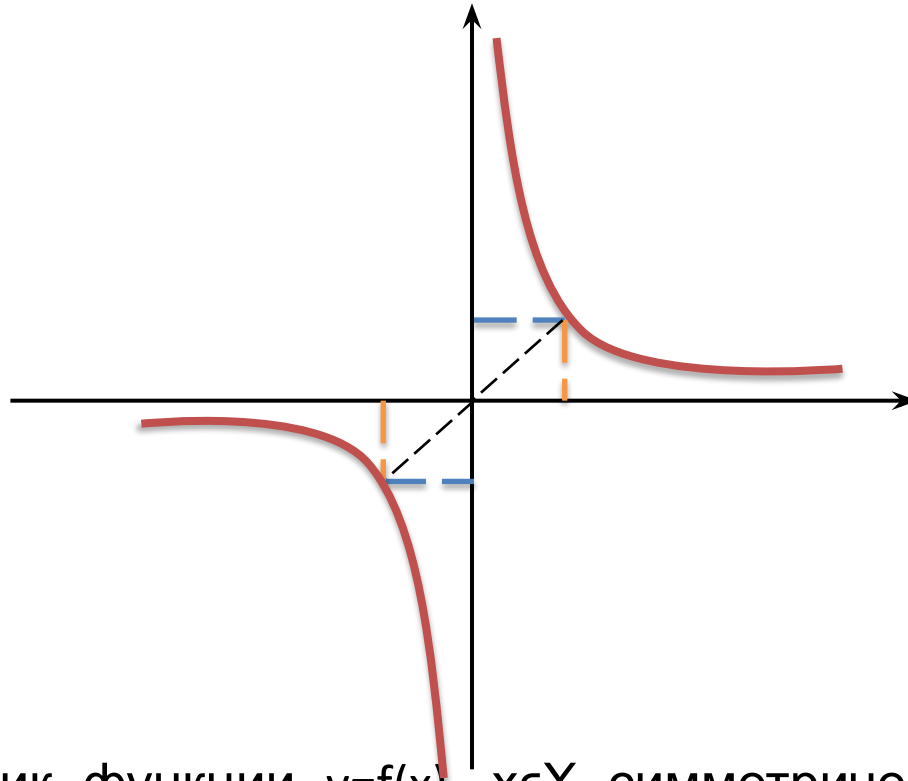
Например: отрезок $[-5, 5]$ – симметричное множество, а отрезок $[-4, 5]$ – не симметричное множество (в него входит число 5, но не входит противоположное ему -5)

График четной функции симметричен относительно **оси у**.



Если график функции $y=f(x)$, $x \in X$ симметричен относительно **оси ординат**, то $y=f(x)$, $x \in X$ – **четная функция**.

График нечетной функции симметричен относительно **начала координат**.



Если график функции $y=f(x)$, $x \in X$ симметричен относительно **начала координат**, то $y=f(x)$, $x \in X$ - **нечетная функция**

Если функция $y=f(x)$, $x \in X$ четная или нечетная, то ее область определения X – симметричное множество.

Если же X – несимметричное множество, то функция $y=f(x)$, $x \in X$ не может быть ни четной ни нечетной.

Алгоритм исследования функции $y=f(x)$, $x \in X$ на четность.

1) Установить, симметрична ли область определения функции.

Если нет, **функция не является ни четной, ни нечетной**. Если да, то перейти ко второму шагу алгоритма.

2) Составить выражение $f(-x)$.

Сравнить $f(-x)$ и $f(x)$:

а) если $f(-x)=f(x)$, то **функция четная**;

б) если $f(-x)=-f(x)$, то **функция нечетная**;

в) если хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) \neq f(x)$ и хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) \neq -f(x)$, то **функция не является ни четной, ни нечетной**.

Пример 1

Исследовать на четность функцию: $y = x^4 + \frac{2}{x^6}$

Решение:

1. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ – симметричное множество

$$2. f(-x) = (-x)^4 + \frac{2}{(-x)^6} = x^4 + \frac{2}{x^6}$$

3. Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Таким образом, $y = x^4 + \frac{2}{x^6}$ – **четная** функция

Пример 2

Исследовать на четность функцию: $y = x^3 - \frac{3}{x^5}$

Решение:

1. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ – симметричное множество

2.

$$f(-x) = (-x)^3 - \frac{3}{(-x)^5} = -x^3 - \frac{3}{-x^5} = -\left(x^3 - \frac{3}{x^5}\right)$$

3. Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Таким образом, $y = x^3 - \frac{3}{x^5}$ – **нечетная** функция

Пример 3

Исследовать на четность функцию: $y = \frac{x-4}{x^2-9}$.

Решение:

1. $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$ – симметричное множество.

$$2. f(-x) = \frac{(-x)-4}{(-x)^2-9} = -\frac{x+4}{x^2-9}$$

3. Сравнив $f(-x)$ и $f(x)$, замечаем, что, скорее всего, не выполняются ни тождество $f(-x) = f(x)$, ни тождество $f(-x) = -f(x)$.

Например, $x=4$, $f(4)=0$, $f(-4)=-\frac{8}{7}$, то есть $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$.

Таким образом, функция не является **ни четной ни нечетной**.

Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **периодической**, если существует такое отличное от нуля число T , что для любого x из множества X выполняется двойное равенство:

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$$

Число T , удовлетворяющее указанному условию, называют **периодом** функции $y = f(x)$.

Пример 1:

● Найти основной период функции $y = \sin 0,5x$.

Решение:

T – основной период функции $y = \sin 0,5x$

$$f(x) = \sin 0,5x$$

$$f(x + T) = \sin 0,5(x + T) = \sin(0,5x + 0,5T)$$

$$\sin(0,5x + 0,5T) = \sin 0,5x$$

$$0,5x + 0,5T = 0,5x$$

$$0,5T = 2\pi n$$

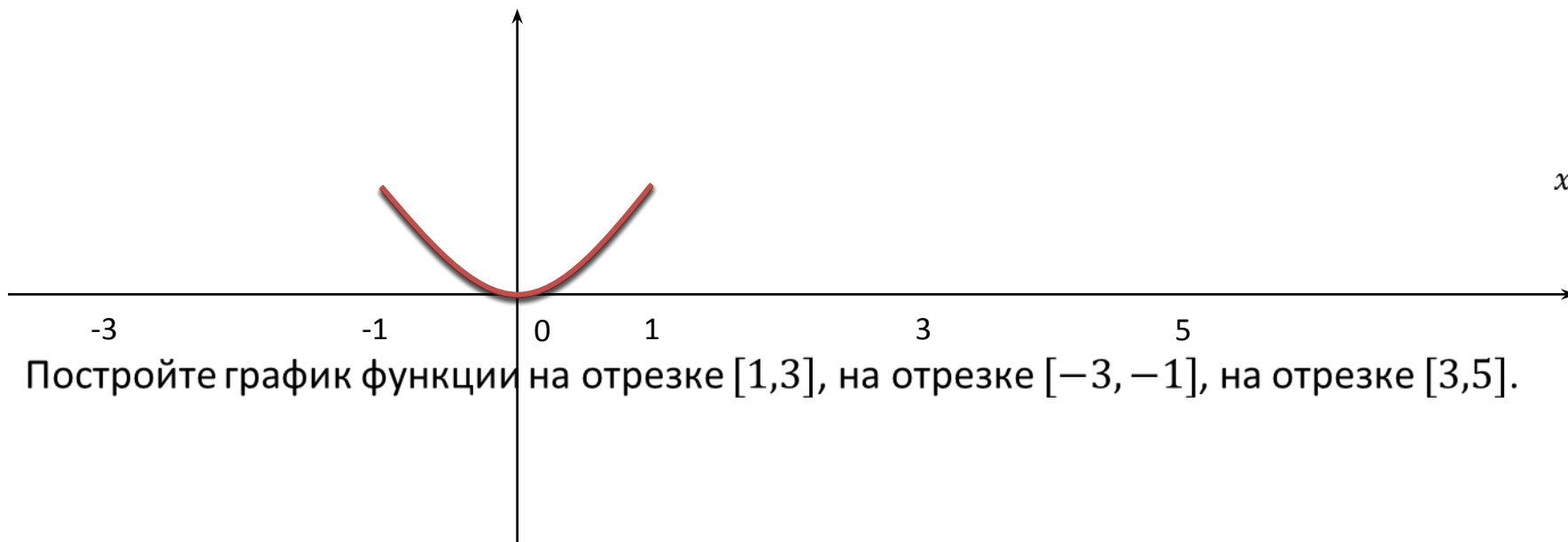
$$0,5T = 2\pi$$

$$T = 4\pi$$

Ответ: $T = 4\pi$.

Пример 2:

y

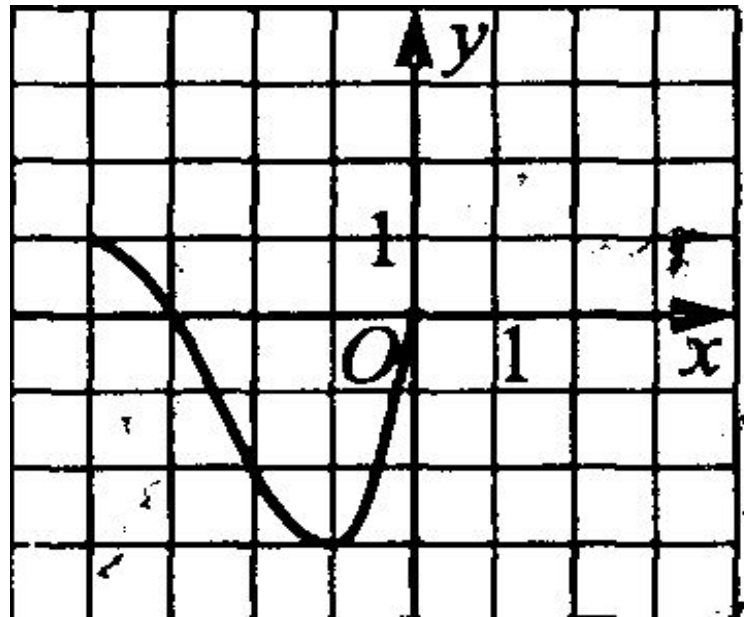


Постройте график функции на отрезке $[1,3]$, на отрезке $[-3,-1]$, на отрезке $[3,5]$.

Пример 3

Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечетной. На рисунке изображен ее график на отрезке $[-4; 0]$.

Найдите $f(-4) + f(1)$.



Пример 4

Периодическая функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Ее период равен 3 и $f(1) = 2$. Найдите значение выражения: $3f(10) + 4f(-5)$.

Разбейте функции на три группы:

- *четные*
- *нечетные*
- *не являются ни четными, ни нечетными*

1) $y = \cos 3x$

2) $y = 3 \sin 2x$

3) $y = \frac{x}{2} \cdot \sin^2 x$

4) $y = \frac{1}{x} \cdot \operatorname{tg} x$

5) $y = \cos x + x$

6) $y = \sin x - x$

7) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2x$

8) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$

9) $y = 2^{\cos x}$

10) $y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

11) $y = |\operatorname{tg} x|$

12) $y = |\sin x|$

13) $y = \cos(x - \pi) - x^2$

14) $y = \cos x \cdot \sin \frac{x}{2}$

15) $y = x^2 + \operatorname{tg} x$

Проверяем ответы

четные	нечетные	ни чет., ни нечет.
1	2	5
4	3	7
9	6	15
10	8	
11	14	
12		
13		

