Четность, нечетность периодичность функций

Функцию f(x), x∈X называют четной, если для любого значения x из множества X выполняется равенство:

$$f(-x)=f(x)$$

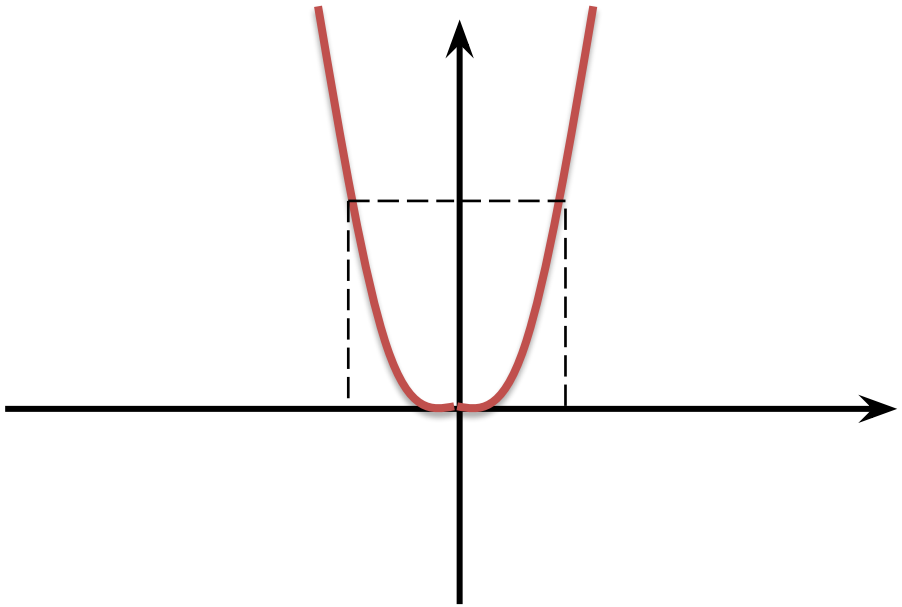
Функцию f(x), x∈X называют нечетной, если для любого значения x из множества X выполняется равенство:

$$f(-x)=-f(x)$$

Если числовое множество X вместе с каждым своим элементом x содержит и противоположный элемент -x, то такое множество называют симметричным множеством.

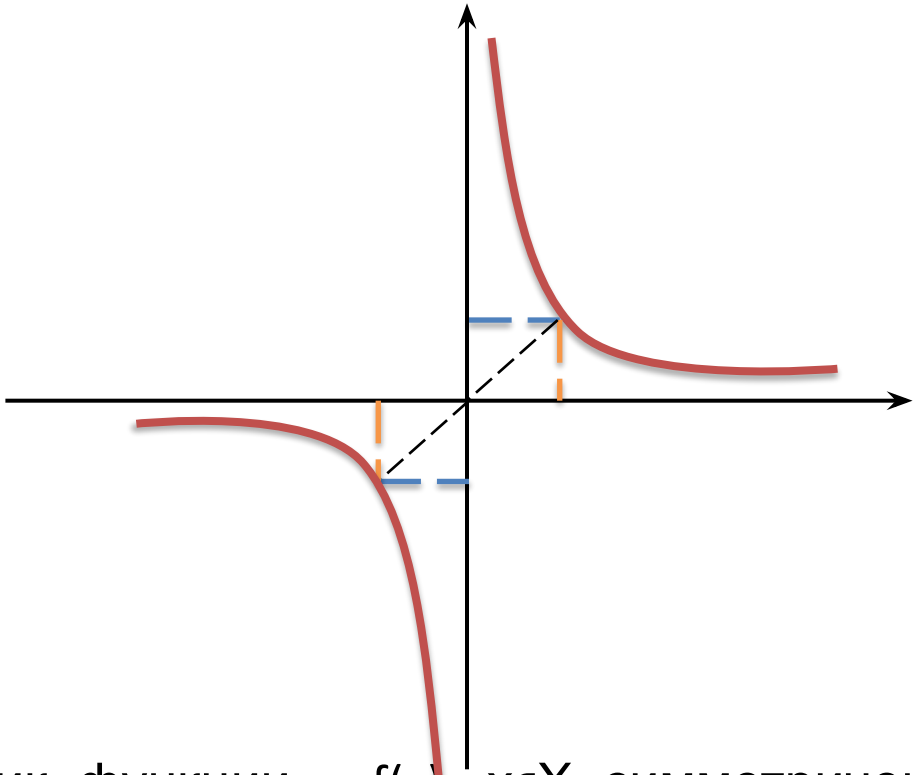
Например: отрезок [-5, 5] – симметричное множество, а отрезок [-4, 5]– не симметричное множество (в него входит число 5, но не входит противоположное ему -5)

График четной функции симметричен относительно оси y.



Если график функции y=f(x), xϵX симметричен относительно оси ординат, то y=f(x), xϵX – четная функция.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.



Если график функции y=f(x), xϵX симметричен относительно начала координат, то y=f(x), xϵX - нечетная функция

Если функция $y=f(x)$, $x \in X$ четная или нечетная, то ее область определения X – симметричное множество.

Если же X – несимметричное множество, то функция $y=f(x)$, $x \in X$ не может быть ни четной ни нечетной.

Алгоритм исследования функции y=f(x), xϵX на четность.

1) Установить, симметрична ли область определения функции.

Если нет, функция не является ни четной, ни нечетной. Если да, то перейти ко второму шагу алгоритма.

2) Составить выражение f(-x).

Сравнить f(-x) и f(x):

а) если f(-x)=f(x), то функция четная;

б) если f(-x)=-f(x), то функция нечетная;

в) если хотя бы в одной точке xϵX выполняется соотношение f(-x)≠f(x) и хотя бы в одной точке xϵX выполняется соотношениеf(-x)≠-f(x), то функция не является ни четной, ни нечетной.

Пример 1

Исследовать на четность функцию: $y=x^4+\frac{2}{x^6}$

Решение:

1. $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ – симметричное множество
2. $f(-x)=(-x)^4+\frac{2}{(-x)^6}=x^4+\frac{2}{x^6}$

3. Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство f(-x)=f(x).

Таким образом, $y=x^4+\frac{2}{x^6}$ - четная функция

Пример 2

Исследовать на четность функцию: $y=x^3-\frac{3}{x^5}$

Решение:

1. $D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$ – симметричное множество

2.

$$f(-x)=(-x)^3-\frac{3}{(-x)^5}=-x^3-\frac{3}{-x^5}=-\left(x^3-\frac{3}{x^5}\right)$$

3. Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$.

Таким образом, $y=x^3-\frac{3}{x^5}$ – нечетная функция

Пример 3

Исследовать на четность функцию: $y=\frac{x-4}{x^2-9}$.

Решение:

1. $D(f)=(-\infty; -3)\cup(-3; 3) \cup (3; +\infty)$ – симметричное множество.
2. $f(-x)=\frac{(-x)-4}{(-x)^2-9}=-\frac{x+4}{x^2-9}$

3.Сравнив $f(-x)$ и $f(x)$, замечаем, что, скорее всего, не выполняются ни тождество $f(-x)=f(x)$, ни тождество $f(-x)=-f(x)$. Например, $x=4$, $f(4)=0$, $f(-4)=-\frac{8}{7}$, то есть $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$.

Таким образом, функция не является ни четной ни нечетной.

Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют периодической, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из множества X выполняется двойное равенство:

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$$

Число T, удовлетворяющее указанному условию, называют периодом функции $y = f(x)$.

Пример 1:

- Найти основной период функции $y = sin\,0{,}5x$.

Решение:

T – основной период функции $y = sin\,0{,}5x$

$f(x) = sin\,0{,}5x$

$f(x+T) = sin\,0{,}5(x+T) = sin(0{,}5x + 0{,}5T)$

$sin(0{,}5x + 0{,}5T) = sin\,0{,}5x$

$0{,}5x + 0{,}5T = 0{,}5x$

$0{,}5T = 2\pi n$

$0{,}5T = 2\pi$

$T = 4\pi$

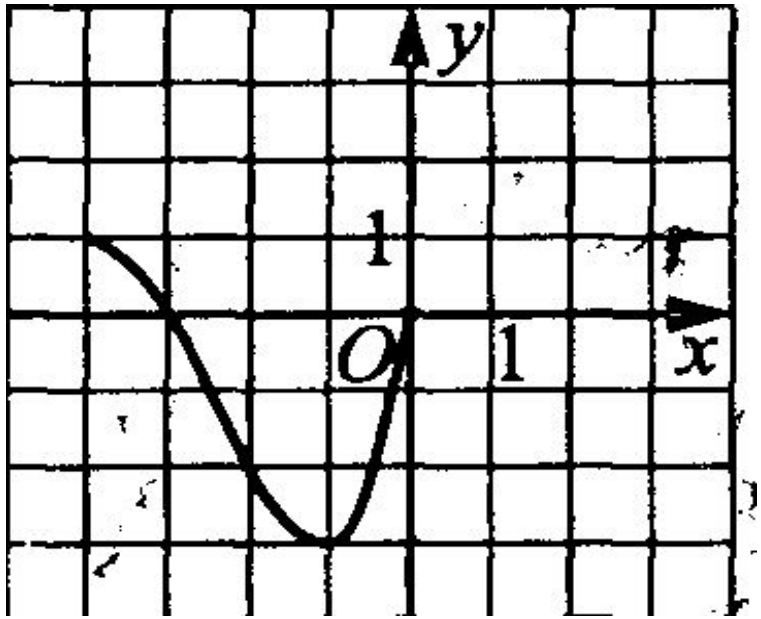
Ответ: $T = 4\pi$.

Пример 2:

Постройте график функции на отрезке $[1,3]$, на отрезке $[-3,-1]$, на отрезке $[3,5]$.

Пример 3

Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечетной. На рисунке изображен ее график на отрезке $[-4; 0]$. Найдите $f(-4) + f(1)$.



Пример 4

.

Периодическая функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Ее период равен 3 и $f(1) = 2$. Найдите значение выражения: 3 $f(10) + 4f(-5)$.

Разбейте функции на три группы:

- *четные*
- *нечетные*
- *не являются ни четными, ни нечетными*

1) $y = \cos 3x$	2) $y = 3\sin 2x$
3) $y = \frac{x}{2} \cdot \sin^2 x$	4) $y = \frac{1}{x} \cdot tgx$
5) $y = \cos x + x$	6) $y = \sin x - x$
7) $y = \sin(\frac{\pi}{2} - x) + 2x$	8) $y = \frac{tgx}{2}$
9) $y = 2^{\cos x}$	10) $y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$
11) $y = \lvert tgx \rvert$	12) $y = \lvert \sin x \rvert$
13) $y = \cos(x - \pi) - x^2$	14) $y = \cos x \cdot \sin \frac{x}{2}$
15) $y = x^2 + tgx$	

Проверяем ответы

четные	нечетные	ни чет., ни нечет.
1	2	5
4	3	7
9	6	15
10	8	
11	14	
12		
13		