

16.01.21.

Тема:

Комплексные числа. Понятие мнимой единицы. Алгебраическая форма комплексного числа. Последовательности.

*Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.*

Видео для усвоения материала:

<https://youtu.be/cTzO4wyt0t0>

## Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

### **Комплексные числа и арифметические операции над ними**

Числа — один из основных математических объектов. Вам уже знакомы натуральные, целые, рациональные, иррациональные числа. Все вместе они образуют множество действительных чисел. В этой главе мы познакомимся с новой числовой системой — системой *комплексных чисел* (в слове *комплексных* предпочтительнее делать ударение на втором слоге). Термин *система* здесь употребляется не в том смысле, как вы привыкли, говоря о решении системы уравнений или системы неравенств; термин *система* означает множество объектов вместе с некоторым набором свойств и отношений. В математике часто говорят не «множество натуральных чисел» или «множество целых чисел», а «система натуральных чисел», «система целых чисел».

Понятие числа развивалось и изменялось на протяжении всей истории человечества. С течением времени числовые системы расширялись, становились более сложными, включая как составные части ранее известные числовые системы (например, система целых чисел включает в себя систему натуральных чисел). Каждая из числовых систем имела свои преимущества и свои недостатки. У более сложной системы больше различных возможностей по ее использованию и применению, но при этом и само построение такой системы, и знание многочисленных деталей, очевидно, требуют больших усилий и большего времени.

Об истории развития понятия числа можно написать отдельный учебник. Мы ограничимся только одной, чисто алгебраической, точкой зрения.

Рассмотрим «плюсы» и «минусы» основных числовых систем, они указаны в таблице на с. 241. Мы видим, что по мере продвижения по строкам этой таблицы от  $N$  к  $R$  список во втором столбце расширяется как раз за счет сужения списка в третьем столбце. Осталась частично допустимая операция извлечения корней из произвольных чисел, которая, как мы увидим, станет допустимой в системе комплексных чисел.

| Числовая система          | Допустимые алгебраические операции   | Частично допустимые алгебраические операции  |
|---------------------------|--|--|
| Натуральные числа, $N$    | Сложение, умножение  | <p><i>Вычитание</i>, деление, извлечение корней.</p> <p>Например, можно вычислить <math>7 - 5</math>, <math>48 : 4</math>, <math>\sqrt[3]{27}</math>; но, с другой стороны, уравнения</p> $3x + 2000 = 1001, 4x = 3,$ $x^2 = 10$ <p>не имеют корней в <math>N</math></p> |
| Целые числа, $Z$          | Сложение, <i>вычитание</i> , умножение   | <p><i>Деление</i>, извлечение корней.</p> <p>Например, можно вычислить <math>(-48) : (-3)</math>, <math>\sqrt{36}</math>; но, с другой стороны, уравнения</p> $5x - 3 = 2004,$ $x^2 = 999$ <p>не имеют корней в <math>Z</math></p>                                       |
| Рациональные числа, $Q$   | Сложение, <i>вычитание</i> , умножение, <i>деление</i>   | <p><i>Извлечение корней из неотрицательных чисел.</i></p> <p>Например, можно вычислить <math>\sqrt{\frac{81}{169}}</math>; но, с другой стороны, уравнения</p> $x^2 = 2,$ $3x^4 - 5 = 2003$ <p>не имеют корней в <math>Q</math></p>                                      |
| Действительные числа, $R$ | Сложение, <i>вычитание</i> , умножение, <i>деление</i> , <i>извлечение корней из неотрицательных чисел</i> | <p><i>Извлечение корней из произвольных чисел.</i></p> <p>Например, можно вычислить <math>\sqrt[3]{7}</math>; но, с другой стороны, уравнения</p> $x^2 = -1,$ $2x^4 + 5x^2 + 3 = 0$ <p>не имеют корней в <math>R</math></p>  |
| Комплексные числа, $C$    | Все операции   |  |

Переходим к непосредственному построению множества (системы)  $C$  комплексных чисел, но сначала напомним еще раз схему взаимного расположения основных, последовательно расширяющихся числовых систем:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C.$$

Несколько слов по поводу обозначений.  $N$ ,  $R$  и  $C$  — это начальные буквы слов соответственно «natural», «real», «complex». Обозначение  $Z$  для множества целых чисел напоминает об исключительной роли нуля — «zero». Буква  $Q$  для множества рациональных чисел выбрана в связи с тем, что рациональные числа представимы в виде отношения или частного, а слово «quotient» как раз и переводится как «отношение».

Перечислим сначала те минимальные условия, которым должны удовлетворять комплексные числа.

$C_1$ ) Существует комплексное число, квадрат которого равен  $-1$ .

$C_2$ ) Множество комплексных чисел содержит все действительные числа.

$C_3$ ) Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел удовлетворяют обычным законам арифметических действий (сочетательному, переместительному, распределительному).

Оказывается, выполнение этих минимальных условий позволяет определить все множество  $C$  комплексных чисел.

Условия  $C_1$  и  $C_2$  заставляют добавить к множеству  $R$  действительных чисел, как минимум, один новый элемент и по определению считать, что квадрат этого элемента равен  $-1$ . Такой элемент называют *мнимой единицей* и обозначают  $i$ . Это обозначение предложил в XVIII веке Л. Эйлер. Символ  $i$  в данном случае просто сокращение от «imaginary» («imaginaire»), что переводится с английского (с французского) как «мнимый, воображаемый».

$$i^2 = -1, i \text{ — мнимая единица.}$$

Условия  $C_2$  и  $C_3$  позволяют умножать действительные числа на мнимую единицу. Такие произведения называют *чисто мнимыми* числами. Например,  $i$ ,  $2i$ ,  $-0,3i$ ,  $\frac{2}{7}i$ ,  $\sqrt{10} \cdot i$  — чисто мнимые числа. Арифметические операции над чисто мнимыми числами выполняются в соответствии с условием  $C_3$ . Например,

$$3i + 13i = (3 + 13)i = 16i,$$

$$3i \cdot 13i = (3 \cdot 13)(i \cdot i) = 39i^2 = -39,$$

$$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = (-1)^3 i = -i.$$

В общем виде правила арифметических операций с чисто мнимыми числами таковы:

$$\begin{aligned} ai + bi &= (a + b)i; & ai - bi &= (a - b)i; \\ a(bi) &= (ab)i; & (ai)(bi) &= abi^2 = -ab \\ & & (a \text{ и } b &\text{ — действительные числа}). \end{aligned}$$

Кроме того, удобно (и естественно), по определению, считать, что  $0 \cdot i = 0$ . Число 0 — единственное число, являющееся одновременно и действительным, и чисто мнимым.

Условия  $C_2$  и  $C_3$  позволяют не только перемножать, но и складывать действительные числа и чисто мнимые числа, т. е. рассматривать суммы вида  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — любые действительные числа. Если  $a = 0$ , то  $a + bi = 0 + bi = bi$  — чисто мнимое число. Если  $b = 0$ , то  $bi = 0 \cdot i = 0$  и  $a + bi = a + 0 = a$  — действительное число. В остальных случаях суммы  $a + bi$  не являются ни действительными, ни чисто мнимыми числами, они являются новыми, более сложными, «составными» числами. Заметим, что прилагательное «complex» как раз и переводится как «сложный, составной». Оказывается, что такими суммами исчерпываются вообще все комплексные числа.

**Определение 1.** Комплексным числом называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.

$$\begin{aligned} z = a + bi \in C &\Leftrightarrow a \in R, b \in R, \\ &i \text{ — мнимая единица.} \end{aligned}$$

В записи  $z = a + bi$  число  $a$  называют *действительной* частью комплексного числа  $z$ , а число  $b$  — *мнимой* частью комплексного числа  $z$ .

**Определение 2.** Два комплексных числа называют **равными**, если равны их действительные части и равны их мнимые части:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c, b = d.$$

Между комплексным числом  $a + 0 \cdot i$  и действительным числом  $a$  обычно не делают никакой разницы, подобно тому, как, например, говорят о числе 3 на оси абсцисс, хотя, формально, полагалось бы говорить о точке  $(3; 0)$ . Действительные числа — это



комплексные числа с нулевой мнимой частью. Значит, выполняется соотношение  $R \subset C$ .

Арифметические операции над комплексными числами выполняются в соответствии с условием  $C_3$ . Например, найдем сумму комплексных чисел  $z_1 = a + bi$  и  $z_2 = c + di$ :

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (bi + di) = \\ &= (a + c) + (b + d)i. \end{aligned}$$

Аналогично находится разность комплексных чисел:

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Для произведения комплексных чисел формула получается более сложной. Вот она:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

Можно, конечно, выучить ее, но надежнее понимать, как она получена. В соответствии с условием  $C_3$ , следует в произведении  $(a + bi) \cdot (c + di)$  раскрыть скобки и привести подобные члены:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) = ac + (bi)c + a(di) + (bi)(di) = \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i. \end{aligned}$$

**Пример 1.** Даны комплексные числа  $z_1 = 1 - 2i$ ,  $z_2 = 3 + i$ ,  $z_3 = -7i$ . Вычислить:

а)  $z_1 z_2$ ;      б)  $z_1 + z_2 z_3$ ;      в)  $z_1(z_2 - z_3)$ ;      г)  $z_1 + (z_2)^2 + (z_3)^3$ .

**Решение.**

а)  $z_1 z_2 = (1 - 2i)(3 + i) = 3 - 6i + i - 2i^2 = 3 - 5i + 2 = 5 - 5i = 5(1 - i)$ .

б)  $z_1 + z_2 z_3 = (1 - 2i) + (3 + i)(-7i) = 1 - 2i - 21i - 7i^2 = 8 - 23i$ .

в)  $z_1(z_2 - z_3) = (1 - 2i)(3 + i + 7i) = (1 - 2i)(3 + 8i) = 3 - 6i + 8i - 16i^2 = 19 + 2i$ .

г) Найдем отдельно второе и третье слагаемые:

$$(z_2)^2 = (3 + i)(3 + i) = 9 + 3i + 3i + i^2 = 8 + 6i;$$

$$(z_3)^3 = (-7i)(-7i)(-7i) = (-7)^3 i^3 = -343(i^2)i = 343i.$$

$$\text{Значит, } z_1 + (z_2)^2 + (z_3)^3 = (1 - 2i) + (8 + 6i) + 343i = 9 + 347i.$$

Заметим, что  $(z_2)^2$  можно было вычислить изящнее. Ведь мы говорили, что на множестве комплексных чисел действуют привычные правила и законы арифметических действий; в частности, выполняются привычные формулы сокращенного умножения. Поэтому можно было действовать так:

$$(z_2)^2 = (3 + i)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot i + i^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i. \quad \blacksquare$$

Практическая часть.

Вычислите:

32.5. а)  $i^3$ ;      б)  $i^5$ ;      в)  $i^{22}$ ;

32.10. а)  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = 1 - i$ ;

в)  $z_1 = -i$ ,  $z_2 = 1 - i$ ;

б)  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = -1 + 2i$ ;

г)  $z_1 = i^3 + 4i^4$ ,  $z_2 = i^2 - 3(-i)^3$ .

Вычислите:

32.19. а)  $i(1 + i)$ ;

в)  $(4 - 3i)i$ ;

б)  $i(-3 + 2i)$ ;

г)  $i(4 - 3i)i(4 + 3i)$ .

32.20. а)  $(1 - 2i)(1 + i)$ ;

в)  $(4 - 3i)(-4 + 3i)$ ;

б)  $(1 - i)(1 + i)$ ;

г)  $(12 + 5i)(12 - 5i)$ .