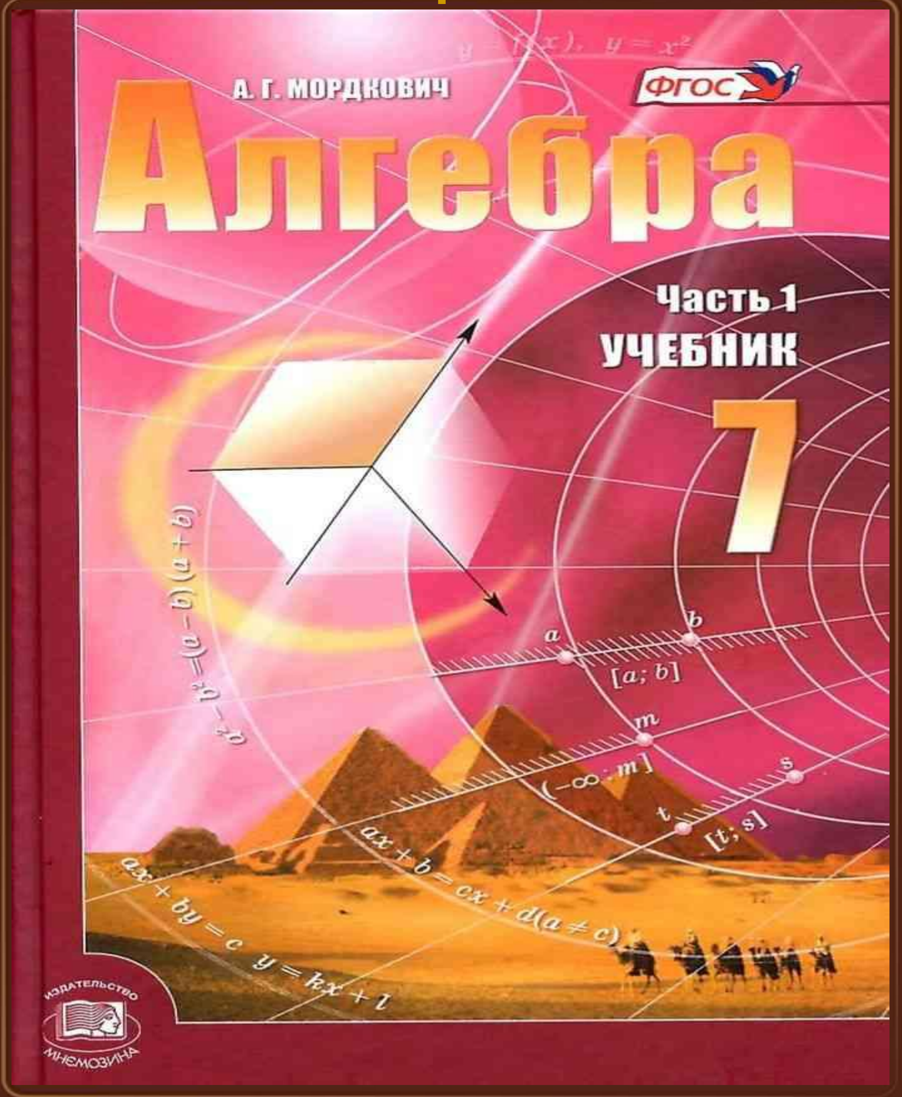
Вопрос №3

Какие задачи в тексте учебников 7-го класса используются для подведения учащихся к понятию функции?

Курбанова Д.М.,
Скамай О.Н.

А.Г. Мордкович



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие для учителя 3

Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЯЗЫК. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

§ 1. Числовые и алгебраические выражения 7
§ 2. Что такое математический язык 14
§ 3. Что такое математическая модель 16
§ 4. Линейное уравнение с одной переменной 22
§ 5. Координатная прямая 27

Глава 2. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 6. Координатная плоскость 33
§ 7. Линейное уравнение с двумя переменными и его график 39
§ 8. Линейная функция и её график 47
§ 9. Линейная функция $y = kx$ 58
§ 10. Взаимное расположение графиков линейных функций 60
Основные результаты 62

Глава 3. СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 11. Основные понятия 65
§ 12. Метод подстановки 70
§ 13. Метод алгебраического сложения 74
§ 14. Системы двух линейных уравнений с двумя переменными как математические модели реальных ситуаций 77
Основные результаты 80

Глава 4. СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЁ СВОЙСТВА

§ 15. Что такое степень с натуральным показателем 81
§ 16. Таблица основных степеней 85
§ 17. Свойства степеней с натуральными показателями 87
§ 18. Умножение и деление степеней с одинаковыми показателями 93
§ 19. Степень с нулевым показателем 95
Основные результаты 97

Глава 5. ОДНОЧЛЕНЫ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ОДНОЧЛЕНАМИ

§ 20. Понятие одночлена. Стандартный вид одночлена 98
§ 21. Сложение и вычитание одночленов 100

§ 22. Умножение одночленов. Возведение одночлена в натуральную степень 105
§ 23. Деление одночлена на одночлен 108
Основные результаты 111

Глава 6. МНОГОЧЛЕНЫ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ

§ 24. Основные понятия 112
§ 25. Сложение и вычитание многочленов 115
§ 26. Умножение многочлена на одночлен 118
§ 27. Умножение многочлена на многочлен 122
§ 28. Формулы сокращённого умножения 123
§ 29. Деление многочлена на одночлен 130
Основные результаты 132

Глава 7. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

§ 30. Что такое разложение многочленов на множители и зачем оно нужно 133
§ 31. Вынесение общего множителя за скобки 136
§ 32. Способ группировки 139
§ 33. Разложение многочленов на множители с помощью формул сокращённого умножения 142
§ 34. Разложение многочленов на множители с помощью комбинации различных приёмов 145
§ 35. Сокращение алгебраических дробей 149
§ 36. Тождества 153
Основные результаты 155

Глава 8. ФУНКЦИЯ $y = x^2$

§ 37. Функция $y = x^2$ и её график 156
§ 38. Графическое решение уравнений 162
§ 39. Что означает в математике запись $y = f(x)$ 165
Основные результаты 172

§ 8. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЁ ГРАФИК

Алгоритм построения графика уравнения $ax + by + c = 0$, который мы сформулировали в § 7, при всей его чёткости и определённости математикам не очень нравится. Обычно они выдвигают претензии к первым двум шагам алгоритма. Зачем, говорят они, дважды решать уравнение относительно переменной y: сначала $ax_1 + by + c = 0$, затем $ax_2 + by + c = 0$? Не лучше ли сразу выразить y из уравнения $ax + by + c = 0$, тогда легче будет проводить вычисления (и, главное, быстрее)? Давайте проверим.

Рассмотрим сначала уравнение $3x - 2y + 6 = 0$ (см. пример 2 из § 7), т. е. $2y = 3x + 6$.

Умножив обе части уравнения на $\frac{1}{2}$, получим $\frac{1}{2} \cdot 2y = \frac{1}{2}(3x + 6)$, т. е. $y = \frac{3}{2}x + 3$. Впрочем, тот же результат мы получили бы, если бы обе части исходного уравнения почленно разделили на 2. Обычно предпочитают в подобных случаях говорить не об умножении, а о почленном делении обеих частей уравнения на одно и то же число.

Итак, $y = \frac{3}{2}x + 3$.

Придавая x конкретные значения, легко вычислить соответствующие значения y. Например, при $x = 0$ получаем $y = 3$; при $x = -2$ имеем $y = 0$; при $x = 2$ имеем $y = 6$; при $x = 4$ получаем $y = 9$. Видите, как легко и быстро найдены точки $(0; 3)$, $(-2; 0)$, $(2; 6)$ и $(4; 9)$, которые были выделены в примере 2 из § 7.

Точно так же уравнение $5x - 2y = 0$ (см. пример 4 из § 7) можно было преобразовать к виду $2y = 5x$ и, далее, $y = 2{,}5x$; нетрудно найти точки $(0; 0)$ и $(2; 5)$, удовлетворяющие этому уравнению. Наконец, уравнение $3x + 2y - 16 = 0$ из того же примера можно было преобразовать к виду $2y = 16 - 3x$ и, далее, $y = 8 - \frac{3}{2}x$. Из этого уравнения можно найти точки $(0; 8)$ и $(2; 5)$, которые ему удовлетворяют.

Рассмотрим теперь указанные преобразования в общем виде.

Случаи, когда в уравнении $ax + by + c = 0$ коэффициенты a и b равны нулю, мы рассмотрели в § 7. Там же мы отметили, что в случае, когда $a \ne 0$, $b = 0$, графиком уравнения является прямая, параллельная оси y.

Рассмотрим случай, когда $b \ne 0$.

Имеем

$$ax + by + c = 0; \qquad (1)$$

$$by = -ax - c;$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Введя обозначения $-\frac{a}{b} = k$, $-\frac{c}{b} = m$, получаем

$$y = kx + m.$$

Таким образом, *линейное уравнение (1) с двумя переменными x и y в случае, когда $b \ne 0$, можно преобразовать к виду*

$$y = kx + m, \qquad (2)$$

где k, m — числа (коэффициенты).

Это частный вид линейного уравнения. Зная, чему равен x, по правилу $y = kx + m$ всегда можно найти, чему равен y. Будем называть уравнение (2) **линейной функцией**.

С помощью уравнения (2) легко, указав конкретное значение x, вычислить соответствующее значение y. Пусть, например, $y = 2x + 3$. Тогда

если $x = 0$, то $y = 3$;
если $x = 1$, то $y = 5$;
если $x = -1$, то $y = 1$;
если $x = 3$, то $y = 9$ и т. д.

Обычно эти результаты оформляют в виде таблицы:

x	0	1	−1	3
y	3	5	1	9

Значения y из второй строки таблицы называют *значениями линейной функции* $y = 2x + 3$ соответственно *в точках* $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = 3$.

Л.Г. Петерсон

Л. Г. Петерсон, Д. Л. Абраров, Е. В. Чуткова
Математика
Алгебра · Функции · Анализ данных
7 класс
Часть 3
Учебник для средней школы
ИЗДАТЕЛЬСТВО ЮВЕНТА

Оглавление

Глава 5. Введение в теорию функций ... 3
§ 1. Понятие функции и ее практическое применение ... 3
5.1.1. Функциональная зависимость между величинами ... 3
5.1.2. Способы задания функции ... 11
5.1.3. Функциональная зависимость и кодирование информации ... 20
§ 2. Линейные процессы и линейная функция ... 27
5.2.1. Прямая пропорциональность ... 27
5.2.2. Линейная функция и ее график ... 36
5.2.3. Кусочно-линейные функции ... 46
Задачи для самоконтроля к Главе 5 ... 59

Глава 6. Введение в теорию линейных уравнений и неравенств ... 63
§ 1. Линейные уравнения ... 63
6.1.1. Линейные уравнения и их решение ... 63
6.1.2. Решение уравнений с модулями ... 76
6.1.3. Решение линейных уравнений в целых числах ... 88
§ 2. Линейные неравенства ... 98
6.2.1. Линейные неравенства и их решение ... 98
6.2.2. Линейные неравенства с модулями ... 114
Задачи для самоконтроля к Главе 6 ... 124

Глава 7. Введение в комбинаторику, теорию вероятностей и статистику ... 129
§ 1. Элементы комбинаторики ... 129
7.1.1. Задача подсчета числа вариантов ... 129
7.1.2. Комбинации с повторениями ... 137
§ 2. Сбор и анализ информации ... 144
7.2.1 Способы упорядочивания информации ... 144
7.2.2. Статистические характеристики ... 156
§ 3. Элементы теории вероятностей ... 168
7.3.1 Частота и вероятность случайных событий ... 168
7.3.2. Классическая схема определения вероятности ... 176
Задачи для самоконтроля к Главе 7 ... 184
Задачи для самоконтроля по курсу 7 класса ... 190
Ответы ... 206
Предметный указатель ... 211
Приложения:
Таблица простых чисел ... 212
Таблица квадратов натуральных чисел до 100 ... 213
Таблица кубов натуральных чисел до 60 ... 214
Справочная информация ... 215

Петерсон Людмила Георгиевна
Абраров Дмитрий Леонардович
Чуткова Елена Валериевна

МАТЕМАТИКА
Алгебра. Функции. Анализ данных
Учебник для 7 класса
Часть 3

Ответственный за выпуск *Ю. И. Веславский*
Художники *С. Ю. Гаврилова, П. А. Северцов*
Художественный редактор *Т. С. Шаляпина*
Технический редактор *Е. В. Безунова*
Компьютерная верстка *Р. Ю. Шаповалов*
Корректор *О. Б. Андрюхина*

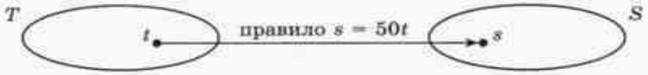
Подписано в печать 11.04.2011. Формат 84x108/16. Объем 13,5 печ. л. 22,68 усл. печ. л.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Школьная.
Тираж 25 000 экз. Заказ № 28564

Издательство «Ювента»
(структурное подразделение ООО «С-инфо»)
125284 Москва, а/я 42 **Тел.:** (495) 796-92-93 **Факс:** (495) 796-92-99
E-mail: booksale@si.ru **Адрес в Интернете:** www.books.si.ru
Приобрести книги можно в магазине по адресу:
Москва, ул. 1905 года, д. 10 А. **Телефон:** (499) 253-93-23
Часы работы: с 10 до 19 часов. **Выходные:** воскресенье, понедельник
Отпечатано в ОАО «Смоленский полиграфический комбинат»,
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

Прежде чем дать определение функции, вспомним предыдущий пример. Как мы определяли длину пути s м, пройденного за данное время t мин со скоростью 50 м/мин? Мы брали некоторое конкретное значение t мин (5 мин, 12 мин, 20 мин и т. д.), затем, пользуясь правилом $s = 50t$, умножали t мин на 50 м/мин и получали искомое значение s м (250 м, 600 м, 1000 м и т. д.).

Возможные значения переменной t в мин образуют некоторое множество T. При этом t не может принимать любые значения. Так, например, прогулка не может длиться 1 000 000 мин или (−24) мин. Если же она длилась, например, 30 мин, то множество T можно задать следующим образом: $T = \{t \in Q: 0 \leq t \leq 30\}$. Переменная s в метрах при этом принимает значения из некоторого множества S: $S = \{s \in Q: 0 \leq s \leq 1500\}$.

Данную зависимость можно схематически представить следующим образом:



где, согласно правилу $s = 50t$, каждому элементу t из множества T ставится в соответствие *единственный* элемент s из множества S.

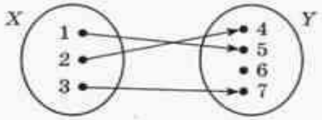
Таким образом, мы приходим к следующему определению понятия функции, где независимая переменная обозначается буквой x, зависимая – буквой y, а правило соответствия – буквой f.

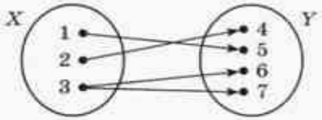
Определение. Функцией называется правило f, по которому *каждому* элементу x из некоторого множества X ставится в соответствие *единственный* элемент y из множества Y. Множество X при этом называется областью определения, а множество Y – областью значений данной функции.

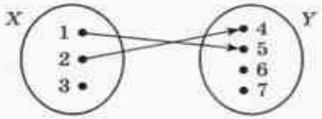
Итак, отличительной особенностью функциональной зависимости (функции) является то, что для каждого элемента из ее области определения 1) *существует* и 2) *единственный* соответствующий элемент из области ее значений. Если хотя бы одно из этих двух требований не выполняется, то зависимость не является функциональной.

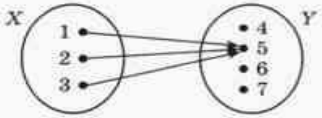
Разберемся в этом на конкретных примерах.

Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6, 7\}$ и зависимость между ними задается следующими схемами, описывающими, какой элемент множества Y соответствует тому или иному элементу множества X.

а)


в)


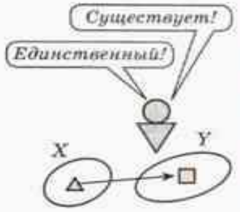
б)


г)


Исходя из определения понятия функции, мы можем заключить, что зависимости, заданные схемами *а* и *г*, являются функциональными, а схемами *б* и *в* – нет. Действительно, в случаях *а* и *г* для каждого элемента из множества X *существует* и *единственный* соответствующий элемент из множества Y. В случае же *б* числу 3 из множества X не сопоставлено ни одного элемента из множества Y (то есть нарушено требование *существования* соответствующего элемента), а в случае *в* числу 3 соответствуют сразу два элемента, 6 и 7, из множества Y (то есть нарушено требование *единственности* соответствующего элемента).

Таким образом, **для того, чтобы определить, является ли данная зависимость функцией**, надо:

1. Указать множество X, являющееся областью определения.
2. Указать множество Y, являющееся областью значений.
3. Убедиться в том, что каждому элементу из области определения X поставлен в соответствие некоторый элемент из области значений Y (*существование*).
4. Убедиться в том, что в области определения X нет элементов, которым поставлено в соответствие более одного элемента из области значений Y (*единственность*).



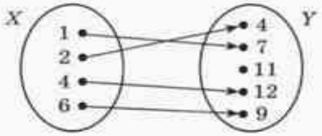
1 Используя данную формулу зависимости между p и q, вычислите значения p для данных q:

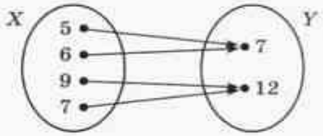
а) $p = 3q$, где $q = 1; 3; 5; 3;$ б) $p = \frac{1}{2}q$, где $q = 1; 4; 0; -4;$

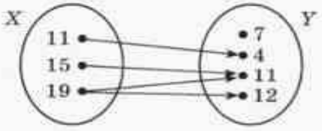
в) $p = \frac{4}{q}$, где $q = 1; -1; 2; -2;$ г) $p = 5q^2$, где $q = 1; -1; 0; 2;$

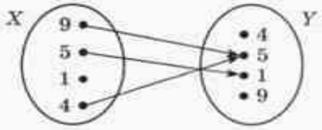
д) $p = 3 + q$, где $q = 0; -3; 1; 3;$ е) $p = 7$, где $q = 1; -5; 7; -8.$

2 1) Зависимости между множествами X и Y заданы приведенными ниже схемами. Определите, какие из указанных зависимостей позволяют для *каждого* элемента из множества X находить *единственный* соответствующий элемент из множества Y. Обоснуйте свой ответ.

а)


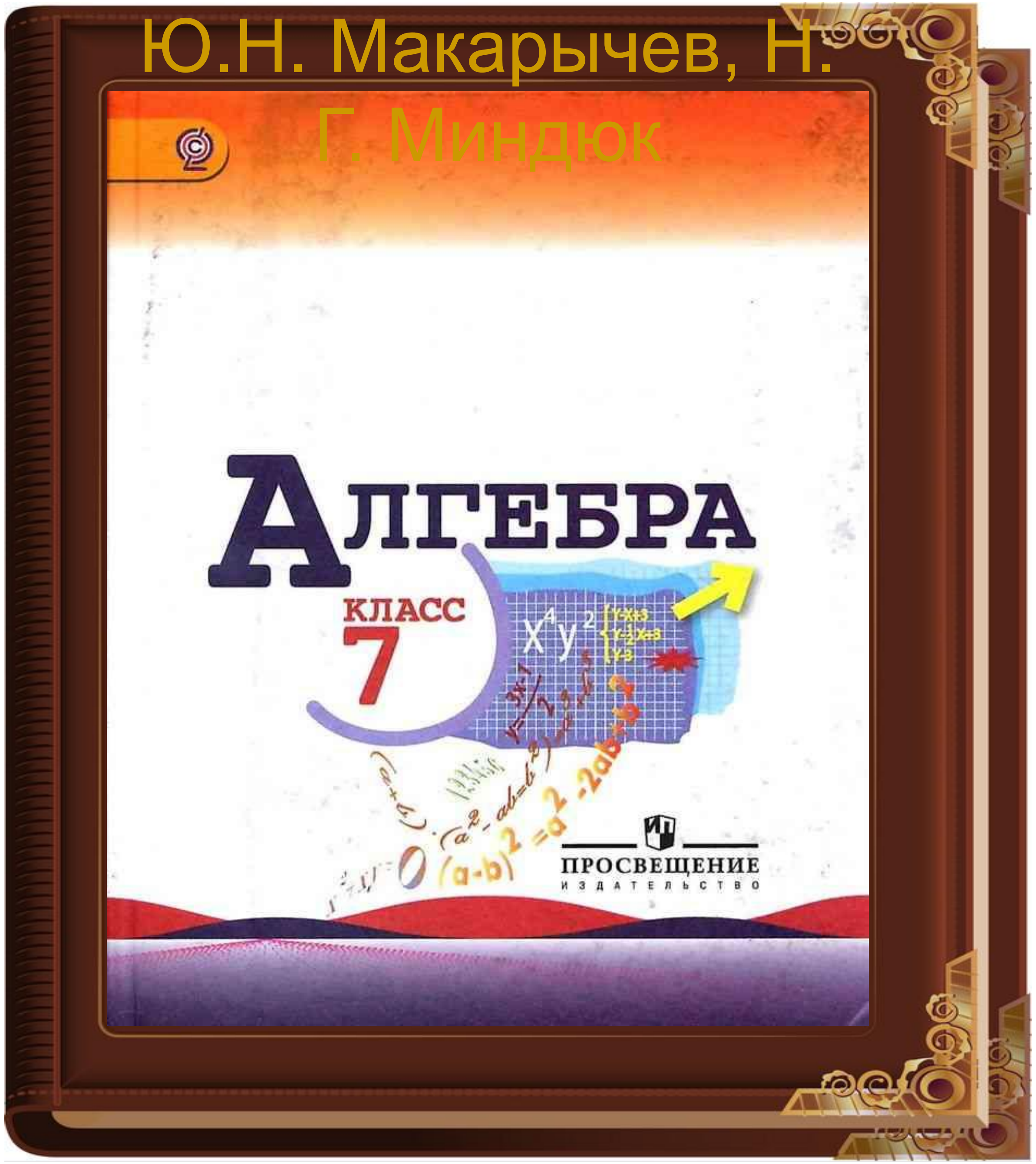
в)


б)


г)


2) Как вы думаете, где используются такие зависимости? Почему важно выделять и специально изучать подобные зависимости? Сравните свой вывод с выводом на стр. 3 учебника.

Ю.Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк



ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I. ВЫРАЖЕНИЯ, ТОЖДЕСТВА, УРАВНЕНИЯ

§ 1. ВЫРАЖЕНИЯ . . . 5
1. Числовые выражения . . . —
2. Выражения с переменными . . . 8
3. Сравнение значений выражений . . . 12

§ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ . . . 17
4. Свойства действий над числами . . . —
5. Тождества. Тождественные преобразования выражений . . . 20

§ 3. УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ . . . 25
6. Уравнение и его корни . . . —
7. Линейное уравнение с одной переменной . . . 28
8. Решение задач с помощью уравнений . . . 32

§ 4. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ . . . 36
9. Среднее арифметическое, размах и мода . . . —
10. Медиана как статистическая характеристика . . . 42

Для тех, кто хочет знать больше
11. Формулы . . . 46

Дополнительные упражнения к главе I . . . 49

ГЛАВА II. ФУНКЦИИ

§ 5. ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ . . . 55
12. Что такое функция . . . —
13. Вычисление значений функции по формуле . . . 59
14. График функции . . . 62

§ 6. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ . . . 69
15. Прямая пропорциональность и её график . . . —
16. Линейная функция и её график . . . 75

Для тех, кто хочет знать больше
17. Задание функции несколькими формулами . . . 84

Дополнительные упражнения к главе II . . . 88

ГЛАВА III. СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

§ 7. СТЕПЕНЬ И ЕЁ СВОЙСТВА . . . 93
18. Определение степени с натуральным показателем . . . —
19. Умножение и деление степеней . . . 99
20. Возведение в степень произведения и степени . . . 103

§ 8. ОДНОЧЛЕНЫ . . . 108
21. Одночлен и его стандартный вид . . . —
22. Умножение одночленов. Возведение одночлена в степень . . . 110
23. Функции $y = x^2$ и $y = x^3$ и их графики . . . 112

Для тех, кто хочет знать больше
24. О простых и составных числах . . . 119

Дополнительные упражнения к главе III . . . 121

ГЛАВА IV. МНОГОЧЛЕНЫ

§ 9. СУММА И РАЗНОСТЬ МНОГОЧЛЕНОВ . . . 127
25. Многочлен и его стандартный вид . . . —
26. Сложение и вычитание многочленов . . . 130

§ 10. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ОДНОЧЛЕНА И МНОГОЧЛЕНА . . . 135
27. Умножение одночлена на многочлен . . . —
28. Вынесение общего множителя за скобки . . . 140

§ 11. ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ . . . 145
29. Умножение многочлена на многочлен . . . —
30. Разложение многочлена на множители способом группировки . . . 150

Для тех, кто хочет знать больше
31. Деление с остатком . . . 152

Дополнительные упражнения к главе IV . . . 155

ГЛАВА V. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

§ 12. КВАДРАТ СУММЫ И КВАДРАТ РАЗНОСТИ . . . 163
32. Возведение в квадрат и в куб суммы и разности двух выражений . . . —
33. Разложение на множители с помощью формул квадрата суммы и квадрата разности . . . 169

§ 13. РАЗНОСТЬ КВАДРАТОВ. СУММА И РАЗНОСТЬ КУБОВ . . . 172
34. Умножение разности двух выражений на их сумму . . . —
35. Разложение разности квадратов на множители . . . 177
36. Разложение на множители суммы и разности кубов . . . 180

§ 14. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЦЕЛЫХ ВЫРАЖЕНИЙ . . . 183
37. Преобразование целого выражения в многочлен . . . —
38. Применение различных способов для разложения на множители . . . 186

Для тех, кто хочет знать больше
39. Возведение двучлена в степень . . . 190

Дополнительные упражнения к главе V . . . 193

ГЛАВА VI. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
§ 15. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ 199
40. Линейное уравнение с двумя переменными . . . . —
41. График линейного уравнения с двумя переменными . . . 204
42. Системы линейных уравнений с двумя переменными . . . 207
§ 16. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 211
43. Способ подстановки . . . . —
44. Способ сложения 215
45. Решение задач с помощью систем уравнений 219
Для тех, кто хочет знать больше
46. Линейные неравенства с двумя переменными и их системы 223
Дополнительные упражнения к главе VI 226
Задачи повышенной трудности 232
Исторические сведения 236
Сведения из курса математики 5—6 классов 240
Список дополнительной литературы 245
Предметный указатель 246
Ответы 247

Учебное издание

Макарычев Юрий Николаевич
Миндюк Нора Григорьевна
Нешков Константин Иванович
Суворова Светлана Борисовна

АЛГЕБРА

7 класс

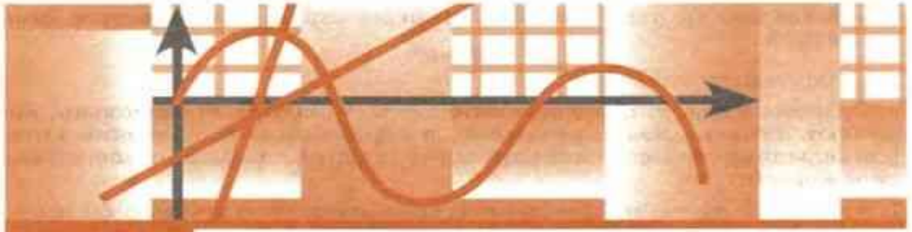
УЧЕБНИК ДЛЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЙ

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*. Редактор *Т. Г. Войлокова*.
Младший редактор *Е. В. Трошко*. Художники *В. А. Коршунов, В. В. Костин*.
Художественный редактор *О. П. Богомолова*. Компьютерная графика *И. В. Губиной*.
Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*.
Корректор *Л. С. Александрова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93 — 953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 12.07.12. Формат $70 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 14,30 + 0,47 форз. Тираж 80 000 экз. Заказ № 32710

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных материалов в ОАО «Смоленский полиграфический комбинат».
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, д. 1.



Глава II ФУНКЦИИ

В этой главе вы узнаете, что называется функцией и графиком функции. С этими понятиями вы постоянно будете встречаться не только на уроках математики, но и на уроках физики, химии, информатики. Вы узнаете, что с помощью графиков можно получить наглядные представления о свойствах функций, познакомитесь со свойствами линейной функции и её частного вида, прямой пропорциональности. Вас, безусловно, заинтересует возможность использования компьютера при решении некоторых задач, связанных с понятиями функции и графика функции. Вы узнаете, что на практике для вычерчивания графиков различных функций часто используются специальные приборы. Например, с помощью кардиографа получают графическое описание работы сердца, а с помощью сейсмографа — графическое описание колебаний земной поверхности.

§ 5 ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

12. Что такое функция

На практике мы часто встречаемся с зависимостями между различными величинами. Например, площадь круга зависит от его радиуса, масса металлического бруска зависит от его объёма и плотности металла, объём прямоугольного параллелепипеда зависит от его длины, ширины и высоты.

В дальнейшем мы будем изучать зависимость между двумя величинами.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Площадь квадрата зависит от длины его стороны. Пусть сторона квадрата равна a см, а его площадь равна S см^2. Для каждого значения переменной a можно найти соответствующее ему значение переменной S. Так, например:
если $a = 3$, то $S = 3^2 = 9$;
если $a = 15$, то $S = 15^2 = 225$;
если $a = 0{,}08$, то $S = 0{,}08^2 = 0{,}0064$.

Зависимость переменной S от переменной a выражается формулой

$$S = a^2$$

(по смыслу задачи $a > 0$).

Переменную a, значения которой выбираются произвольно, называют *независимой переменной*, а переменную S, значения которой определяются выбранными значениями a, называют *зависимой переменной*.

Пример 2. Путь, пройденный автомобилем со скоростью 50 км/ч, зависит от времени движения.

Обозначим время движения автомобиля (в часах) буквой t, а пройденный путь (в километрах) буквой s. Для каждого значения переменной t, где $t \geqslant 0$, можно найти соответствующее значение переменной s. Например:

если $t = 0{,}5$, то $s = 50 \cdot 0{,}5 = 25$;
если $t = 2$, то $s = 50 \cdot 2 = 100$;
если $t = 3{,}5$, то $s = 50 \cdot 3{,}5 = 175$.

Зависимость переменной s от переменной t выражается формулой

$$s = 50t.$$

В этом примере t является независимой переменной, а s — зависимой переменной.

Пример 3. На рисунке 8 изображён график температуры воздуха в течение суток.

С помощью этого графика для каждого момента времени t (в часах), где $0 \leqslant t \leqslant 24$, можно найти соответствующую температуру p (в градусах Цельсия). Например:

если $t = 7$, то $p = -4$;
если $t = 12$, то $p = 2$;
если $t = 17$, то $p = 3$;
если $t = 22$, то $p = 0$.

Здесь t является независимой переменной, а p — зависимой переменной.

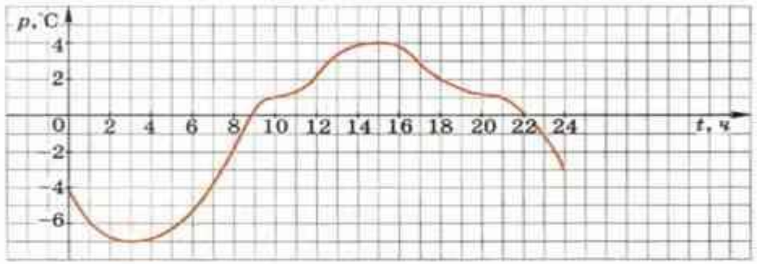


Рис. 8

Пример 4. Стоимость проезда в пригородном поезде зависит от номера зоны, к которой относится станция. Эта зависимость для некоторого региона показана в таблице (буквой n обозначен номер зоны, а буквой m — соответствующая стоимость проезда в рублях):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	10	10	18	24	30	36	42	48	54

По этой таблице для каждого значения n, где $n = 1, 2, \ldots, 9$, можно найти соответствующее значение m. Так,

если $n = 2$, то $m = 10$;
если $n = 6$, то $m = 36$;
если $n = 9$, то $m = 54$.

В этом случае n является независимой переменной, а m — зависимой переменной.

В рассмотренных примерах каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной. Такую зависимость одной переменной от другой называют *функциональной зависимостью* или *функцией*.

Независимую переменную иначе называют *аргументом*, а о зависимой переменной говорят, что она является *функцией* от этого аргумента. Так, площадь квадрата является функцией от длины его стороны; путь, пройденный автомобилем с постоянной скоростью, является функцией от времени движения. Значения зависимой переменной называют *значениями функции*.

Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют *область определения функции*.

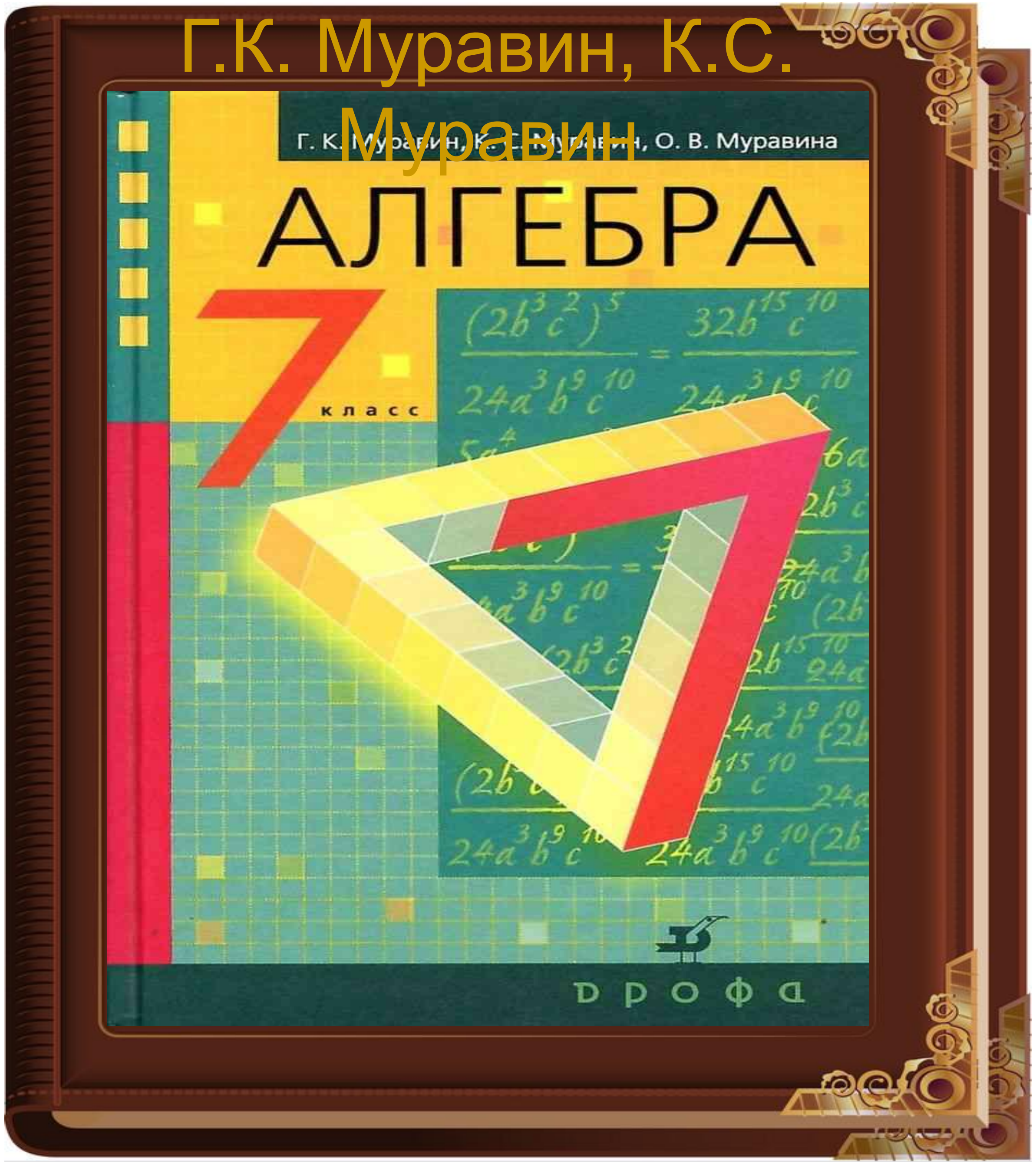
Например, область определения функции в примере 1 состоит из всех положительных чисел, а в примере 3 — из всех чисел от 0 до 24.

Упражнения

258. Площадь прямоугольника со сторонами 9 см и x см равна S см^2. Выразите формулой зависимость S от x. Для значения аргумента $x = 4$; 6,5; 15 найдите соответствующее значение функции S.

259. Поезд, двигаясь со скоростью 70 км/ч, проходит за t ч расстояние s км. Задайте формулой зависимость s от t. Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 2,4; 3,8.

Г.К. Муравин, К.С. Муравин



Оглавление

Глава 1. Математический язык

§ 1. **Выражения** 7
1. Числовые выражения 7
2. Сравнение чисел 14
3. Выражения с переменными 19

§ 2. **Уравнения** 28
4. Математическая модель текстовой задачи 28
5. Решение уравнений 36
6. Уравнения с двумя переменными и их системы 44

Глава 2. Функция

§ 3. **Функции и способы их задания** 52
7. Понятие функции 52
8. Таблица значений и график функции 56

§ 4. **Функция $y = kx$** 65
9. Пропорциональные переменные 65
10. График функции $y = kx$ 71

§ 5. **Линейная функция** 76
11. Определение линейной функции 76
12. График линейной функции 79
13. График линейного уравнения с двумя переменными 86

Глава 3. Степень с натуральным показателем

§ 6. **Степень и ее свойства** 93
14. Тождества и тождественные преобразования 93
15. Определение степени с натуральным показателем 98
16. Свойства степени 103

§ 7. **Действия со степенями** 108
17. Одночлены 108
18. Сокращение дробей 111

Глава 4. Многочлены

§ 8. **Произведение одночлена и многочлена** 116
19. Понятие многочлена 116
20. Преобразование произведения одночлена и многочлена 122
21. Вынесение общего множителя за скобки 126

§ 9. **Произведение многочленов** 131
22. Преобразование произведения двух многочленов 131
23. Разложение на множители способом группировки 135

§ 10. **Формулы сокращенного умножения** 139
24. Квадраты суммы, разности и разность квадратов 139
25. Разложение на множители с помощью формул сокращенного умножения 150

Глава 5. Вероятность

26. Равновероятные возможности 155
27. Вероятность события 158
28. Число вариантов 163

Глава 6. Повторение

29. Выражения 175
30. Функции и графики 182
31. Тождества 194
32. Уравнения и системы уравнений 199

Исследовательские работы 210
Практикум по решению текстовых задач 214
Проверь себя! Домашние контрольные работы 228
Ответы 234
Советы и решения 248
Справочные материалы 277
Список дополнительной литературы 283
Предметный указатель 285

Глава 2

ФУНКЦИЯ

§ 3. Функции и способы их задания

7. Понятие функции

Задача 1. В аквариум, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 10), наливают воду. Сколько воды в аквариуме, если высота ее столба в нем равна h (см)?

Решение. Пространство, заполненное водой, — прямоугольный параллелепипед с измерениями 60 см, 40 см и h см. Объем его равен $60 \cdot 40 \cdot h$ (см³). Обозначив объем воды в литрах буквой V и учитывая, что 1000 см³ $= 1$ л, получим:

$$V = 2400h \text{ см}^3 = 2{,}4h \text{ л}.$$

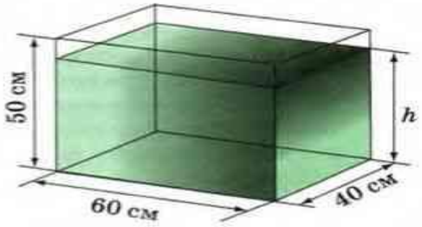


Рис. 10

Эта формула выражает зависимость объема воды в аквариуме от высоты ее столба. Будем рассматривать теперь V и h в формуле $V = 2{,}4h$ как переменные. Допустимые значения переменной h — все положительные числа, не превышающие 50 (высота аквариума равна 50 см). Обратим внимание на то, что каждому допустимому значению переменной h соответствует единственное значение переменной V.

Так, например:
$V = 2{,}4 \cdot 20 = 48$ при $h = 20$, $V = 2{,}4 \cdot 25 = 60$ при $h = 25$.

Задача 2. Площадь прямоугольника равна 60 см², а одно из его измерений a см. Каково второе измерение прямоугольника?

Решение. Обозначим искомое измерение буквой b (см), тогда $b = \dfrac{60}{a}$.

Рассматривая в этой формуле b и a как переменные, заметим, что и в данном случае каждому допустимому значению переменной a (допустимы любые положительные значения) соответствует единственное значение переменной b. Например, при $a = 2$ имеем $b = \dfrac{60}{2} = 30$, при $a = 12$ соответствующее значение $b = \dfrac{60}{12} = 5$.

В рассмотренных задачах с изменением значения одной переменной изменяется и значение другой, причем каждому допустимому значению первой переменной соответствует единственное значение второй. Такие пары переменных встречаются довольно часто, и у них есть специальные названия.

> Переменную y называют **функцией** переменной x, если каждому допустимому значению x соответствует единственное значение y.
> Переменную x называют **аргументом** функции y.

Правило, по которому для каждого допустимого значения аргумента находят соответствующее ему значение функции, обычно обозначают какой-либо буквой. Чтобы указать, что значения функции y получают из значений аргумента x по правилу f, пишут: $y = f(x)$.

Читается: *игрек равен эф от икс*.

Значение функции, соответствующее значению аргумента, равному, например, 5, обозначается: $f(5)$.

Читается: *эф от пяти*.

Пример 1. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$. Найти $f(5)$.

Решение. Правило f задано с помощью формулы, но не сказано, какая задача к ней привела.

> Условились считать *допустимыми* все значения аргумента функции, при которых записанное в правой части формулы выражение имеет смысл.

Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. Алгебраические выражения

§ 1. Числовые выражения . . . 3
§ 2. Алгебраические выражения . . . 8
§ 3. Алгебраические равенства. Формулы . . . 10
§ 4. Свойства арифметических действий . . . 14
§ 5. Правила раскрытия скобок . . . 19
Упражнения к главе I . . . 23

Глава II. Уравнения с одним неизвестным

§ 6. Уравнение и его корни . . . 27
§ 7. Решение уравнений с одним неизвестным, сводящихся к линейным . . . 30
§ 8. Решение задач с помощью уравнений . . . 35
Упражнения к главе II . . . 41

Глава III. Одночлены и многочлены

§ 9. Степень с натуральным показателем . . . 44
§ 10. Свойства степени с натуральным показателем . . . 48
§ 11. Одночлен. Стандартный вид одночлена . . . 55
§ 12. Умножение одночленов . . . 58
§ 13. Многочлены . . . 61
§ 14. Приведение подобных членов . . . 63
§ 15. Сложение и вычитание многочленов . . . 67
§ 16. Умножение многочлена на одночлен . . . 69
§ 17. Умножение многочлена на многочлен . . . 71
§ 18. Деление одночлена и многочлена на одночлен . . . 75
Упражнения к главе III . . . 78

Глава IV. Разложение многочленов на множители

§ 19. Вынесение общего множителя за скобки . . . 81
§ 20. Способ группировки . . . 85
§ 21. Формула разности квадратов . . . 88
§ 22. Квадрат суммы. Квадрат разности . . . 90
§ 23. Применение нескольких способов разложения многочлена на множители . . . 94
Упражнения к главе IV . . . 97

Глава V. Алгебраические дроби

§ 24. Алгебраическая дробь. Сокращение дробей . . . 99
§ 25. Приведение дробей к общему знаменателю . . . 104
§ 26. Сложение и вычитание алгебраических дробей . . . 108
§ 27. Умножение и деление алгебраических дробей . . . 112
§ 28. Совместные действия над алгебраическими дробями . . . 114
Упражнения к главе V . . . 118

Глава VI. Линейная функция и ее график

§ 29. Прямоугольная система координат на плоскости . . . 121
§ 30. Функция . . . 124
§ 31. Функция $y = kx$ и ее график . . . 132
§ 32. Линейная функция и ее график . . . 138
Упражнения к главе VI . . . 143

Глава VII. Системы двух уравнений с двумя неизвестными

§ 33. Уравнения первой степени с двумя неизвестными. Системы уравнений . . . 147
§ 34. Способ подстановки . . . 152
§ 35. Способ сложения . . . 156
§ 36. Графический способ решения систем уравнений . . . 160
§ 37. Решение задач с помощью систем уравнений . . . 165
Упражнения к главе VII . . . 170

Глава VIII. Элементы комбинаторики

§ 38. Различные комбинации из трех элементов . . . 173
§ 39. Таблица вариантов и правило произведения . . . 177
§ 40. Подсчет вариантов с помощью графов . . . 181
Упражнения к главе VIII . . . 187

Упражнения для повторения курса алгебры VII класса . . . 188
Задачи для внеклассной работы . . . 198
Краткое содержание курса алгебры VII класса . . . 202
Ответы . . . 209
Предметный указатель . . . 222

§ 30 Функция

Задача 1 Поезд движется из Москвы в Санкт-Петербург со скоростью 120 км/ч. Какой путь пройдет поезд за t часов?

▶ Если обозначить искомый путь буквой s (в км), то ответ можно записать формулой

$$s = 120t. \quad (1)$$

При движении поезда путь s и время t изменяются. Поэтому их называют *переменными*.

Например, если $t = \frac{1}{2}$, то $s = 120 \cdot \frac{1}{2} = 60$; если $t = 2$, то $s = 240$; если $t = 2{,}5$, то $s = 300$ и т. д.

Так как значения s зависят от значений t, то t называют *независимой переменной*, а s — *зависимой переменной* или *функцией*. Зависимость переменной s от переменной t называют *функциональной зависимостью*.

Для того чтобы подчеркнуть, что s зависит от t, пишут $s(t)$ (читается: «s от t»). Например,

$$s\left(\frac{1}{2}\right) = 60, \quad s(2) = 240, \quad s(2{,}5) = 300.$$

Таким образом, формула (1) устанавливает правило вычисления пути s по заданному значению времени t. В этой задаче время t положительно и не может быть больше времени движения поезда от Москвы до Санкт-Петербурга.

Задача 2 Поезд движется из Москвы в Санкт-Петербург со скоростью 120 км/ч. За какое время он пройдет путь, равный s километрам?

▶ Если обозначить искомое время буквой t (в часах), то ответ можно записать формулой

$$t = \frac{s}{120}. \quad (2)$$

Например, если $s = 180$, то $t = 1{,}5$; если $s = 300$, то $t = 2{,}5$. Таким образом, в этой задаче s является

независимой переменной, а t — зависимой переменной, т. е. функцией $t(s)$. Например, $t(180) = 1{,}5$; $t(300) = 2{,}5$.

Формула (2) устанавливает правило вычисления времени по заданному значению пути s. Здесь s может принимать положительные значения, не большие чем расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга.

Обычно в математике независимая переменная обозначается буквой x, а зависимая переменная — буквой y. В этом случае пишут $y(x)$. Но такое обозначение не является обязательным.

Например, в задаче 1 путь s является функцией времени t; при этом пишут $s(t) = 120t$. В задаче 2 время t является функцией пути s, и поэтому пишут $t(s) = \frac{s}{120}$.

Функция может быть задана различными способами.

1. Ф у н к ц и я м о ж е т б ы т ь з а д а н а ф о р м у л о й. Например, формула $y = 2x$ показывает, как по данному значению x вычислить соответствующее значение функции y.

Задача 3 Функция задана формулой $y = x^2 + x + 1$. Найти $y(-2)$, $y(0)$ и $y(1)$.

▶ 1) Подставляя в эту формулу $x = -2$, получаем $y(-2) = (-2)^2 + (-2) + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$,

2) $y(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$;

3) $y(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$.

Ответ $y(-2) = 3$, $y(0) = 1$, $y(1) = 3$. ◁

Задача 4 Функция задана формулой $y = -3x + 5$. Найти значение x, при котором значение y равно -1.

▶ Подставляя в формулу вместо y число -1, получаем $-1 = -3x + 5$. Решая это уравнение, находим $3x = 5 + 1$, $x = 2$.

Ответ $x = 2$. ◁

Задачу 4 можно также решить, выразив из формулы $y = -3x + 5$ переменную x через y, т. е. по формуле $x = \frac{5 - y}{3}$ найти x при $y = -1$.

2. Функция может быть задана таблицей, например:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	4	9	16	25	36	49	64

Согласно этой таблице значению $x=3$ соответствует $y=9$, а значению $x=5$ соответствует $y=25$. Примеры табличного способа задания функции: таблица квадратов натуральных чисел, таблица кубов натуральных чисел, таблица прироста вклада в сберегательном банке в зависимости от суммы вклада.

3. Функция может быть задана графиком. Для того чтобы наглядно представить функциональную зависимость, используют специальные рисунки (чертежи), которые называют *графиками*. Графики функций широко применяются в практике. С помощью графика часто изображают, например, зависимость температуры от времени (рис. 11); железнодорожники пользуются графиками движения; экономисты графически изображают рост производительности труда. При построении графиков в научных исследованиях и в современном производстве используются самопишущие приборы и компьютеры.

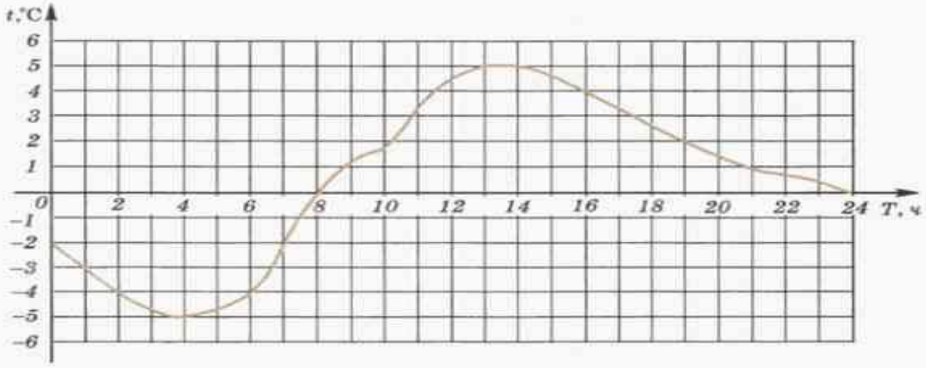


Рис. 11

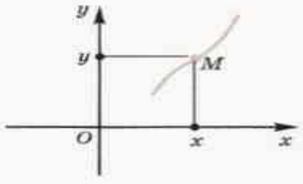


Рис. 12

Допустим, что на координатной плоскости изображен график некоторой функции $y(x)$ (рис. 12). Для того чтобы по заданному графику найти значение функции $y(x)$ при каком-то определенном значении x, проведем через точку оси абсцисс с координатой x перпендикуляр к этой оси и найдем точку M пересечения его с графиком данной функции. Ордината точки пересечения и даст соответствующее значение функции.

Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям независимой переменной, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Задача 1 Дана функция $y=x^2+2$. Выяснить, принадлежит ли графику этой функции точка с координатами: 1) (1; 3); 2) (2; 2).

▶ 1) Найдем значение y при $x=1$: $y(1)=1^2+2=3$. Так как $y(1)=3$, то точка (1; 3) принадлежит графику данной функции.
2) $y(2)=2^2+2=6$. Точка графика с абсциссой $x=2$ имеет ординату $y=6$, поэтому точка (2; 2) не принадлежит графику данной функции. ◁

Упражнения

536 (Устно.) Прочитать следующие выражения, назвать независимую и зависимую переменную:
$s(t)=120t$, $p(x)=17{,}8x$, $C(R)=2\pi R$, $m(V)=7{,}8V$, $y(x)=\frac{1}{7}x+3$, $t(s)=\frac{s}{120}$, $x(y)=7y-21$, $f(x)=2-5x^2$.

537 Вычислить значение y при x, равном −2; −1; 0; 1; 2:
1) $y=3x$; 2) $y=-2x$; 3) $y=-x-3$; 4) $y=20x+4$.

538 Функция задана формулой $s=60t$, где s — путь (в км) и t — время (в ч).
1) Определить $s(2)$, $s(3{,}5)$, $s(5)$.
2) Определить t, если $s=240$.

539 Функция задана формулой $y=2x-1$.
1) Вычислить значение y при x, равном 10; −4,5; 15; −21.
2) Найти значение x, при котором значение y равно −19; 205; $-3\frac{1}{2}$.

Проверь себя:

1. Какие-то вопросы, наверное
2.

Конец