Διδακτική Ενότητα Β: Δειγματικός Χώρος - Ενδεχόμενα - Σύνολα

Ποσοτικές Μέθοδοι στην Οικονομία και Διοίκηση Ι

Εμμανουήλ Ζαχαριάδης
Επίκουρος Καθηγητής ΟΠΑ
email: ezach@aueb.gr

Ακαδημαϊκό Έτος 2017-2018

Πείραμα

- Εκτέλεση ενός Πειράματος
- Αδυναμία πρόβλεψης αποτελέσματος
- Βεβαιότητα για το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων

Ο *δειγματικός χώρος* Ω είναι το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος

Δειγματικός Χώρος - Παραδείγματα

- Αποτέλεσμα πειράματος: Πλευρά του νομίσματος

  $\Omega = \{K, \Gamma\}$

- Αποτέλεσμα πειράματος: Έκβαση Ποδοσφαιρικού Αγώνα

  $\Omega = \{1, 2, X\}$

- Αποτέλεσμα Πειράματος: Κατάταξη τερματισμού σε έναν αγώνα δρόμου 8 δρομέων

  $\Omega = \{Οι\ 8!\ διατάξεις\ των\ \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\}$

Δειγματικός Χώρος - Παραδείγματα

- Αποτέλεσμα πειράματος: Νικητής αγώνα δρόμου 8 αθλητών

  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

- Αποτέλεσμα πειράματος: Πλευρές σε δύο ρίψεις νομισμάτων

  $\Omega = \{(K, K), (K, \Gamma), (\Gamma, K), (\Gamma, \Gamma)\}$

- Αποτέλεσμα Πειράματος: Αριθμοί κατά τη ρίψη τριών ζαριών

  $\Omega = \{(i, j, k)\colon\ i, j, k = \ 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Αποτέλεσμα Πειράματος: Διάρκεια ζωής ενός λαμπτήρα

  $\Omega = \{x\colon\ 0 \leq x \leq \infty\}$

Ενδεχόμενα

- Κάθε υποσύνολο E του δειγματικού χώρου ονομάζεται ενδεχόμενο
  - Στο παράδειγμα ρίψης νομίσματος $E = \{K\}$ είναι το ενδεχόμενο η ρίψη να “φέρει” κορώνα.
  - Στο παράδειγμα του ποδοσφαιρικού αγώνα το ενδεχόμενο $E = \{X\}$ εναι ο αγώνας να λήξει ισόπαλος, ενώ το ενδεχόμενο $E = \{1, X\}$ είναι να μην κερδίσει η φιλοξενούμενη ομάδα
  - Στο παράδειγμα κατάταξης του αγώνα δρόμου, το ενδεχόμενο $E = \{\text{Οι μεταθέσεις που δεν ξεκινούν με 7}\}$ αντιστοιχεί στο να μην κερδίσει ο δρομέας 7

Ενδεχόμενα

- Κάθε υποσύνολο E του δειγματικού χώρου ονομάζεται ενδεχόμενο
  - Στο παράδειγμα των δύο νομισμάτων το ενδεχόμενο $E = \{(K, K), (\Gamma, \Gamma)\}$ αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο τα δύο ζάρια να φέρουν το ίδιο αποτέλεσμα
  - Στο παράδειγμα του λαμπτήρα, το ενδεχόμενο $E = \{x\colon\ 0\ \leq\ x\ \leq\ 365\}$ αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο, ο λαμπτήρας να πάψει να λειτουργεί εντός ενός έτους
- Αν το Αποτέλεσμα ενός πειράματος περιέχεται στο Ενδεχόμενο E, το Ενδεχόμενο E έχει συμβεί!

Απλά Ενδεχόμενα

- Απλό Ενδεχόμενο είναι κάθε ενδεχόμενο που περιέχει ένα και μόνο ένα αποτέλεσμα ενός πειράματος
  - Στο παράδειγμα του ζαριού, τα $E1 = \{3\}$ και $\mathrm{E2} = \{6\}$ είναι απλά ενδεχόμενα, ενώ το $\mathrm{E3} = \{4, 5, 6\}$ δεν είναι απλό ενδεχόμενο καθώς περιέχει τρία δυνατά αποτελέσματα του πειράματος
  - Στο παράδειγμα των δύο νομισμάτων το $E1 = \{(K, K)\}$ είναι ένα απλό ενδεχόμενο, ενώ το $E2 = \{(K, K)\}\ (\Gamma, \Gamma)\}$ δεν είναι ένα απλό ενδεχόμενο καθώς περιέχει δύο δυνατά αποτελέσματα του πειράματος

Ενδεχόμενα

- <u>Προβλήματα πιθανοτήτων</u>: Μελετούν το πόσο πιθανό είναι να συμβεί ένα ενδεχόμενο ενός πειράματος
- Τα ενδεχόμενα αποτελούν σύνολα αποτελεσμάτων του πειράματος
- Απαραίτητη η εισαγωγή βασικής ορολογίας και εννοιών της θεωρίας συνόλων

Σύνολα

- Ένα σύνολο αποτελεί μια ομάδα ομοειδών αντικειμένων, τα οποία ονομάζονται αντικείμενα/στοιχεία του συνόλου
  - Οι φυσικοί αριθμοί είναι ένα σύνολο & κάθε αριθμός ένα στοιχείο του
  - Οι φοιτητές μιας τάξης είναι ένα σύνολο & κάθε φοιτητής είναι ένα αντικείμενο του συνόλου αυτού
- Αν ένα στοιχείο *a* είναι αντικείμενο ενός συνόλου *A*, γράφουμε $a \in A$

Σύνολα

- Τα στοιχεία ενός συνόλου γράφονται μέσα σε αγκύλες
  - Το σύνολο των πλευρών του ζαριού $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - Το σύνολο των στοιχείων A που ικανοποιούν μια συνθήκη C, $A = \{x \mid x$ ικανοποιεί $C\}$ ή $A = \{x \colon x$ ικανοποιεί $C\}$

    π.χ. Το σύνολο A των φυσικών αριθμών μικρότερων του 3, $A = \{x \mid x < 3, x \in N\}$ ή $A = \{x : x < 3, x \in N\}$

Σύνολα

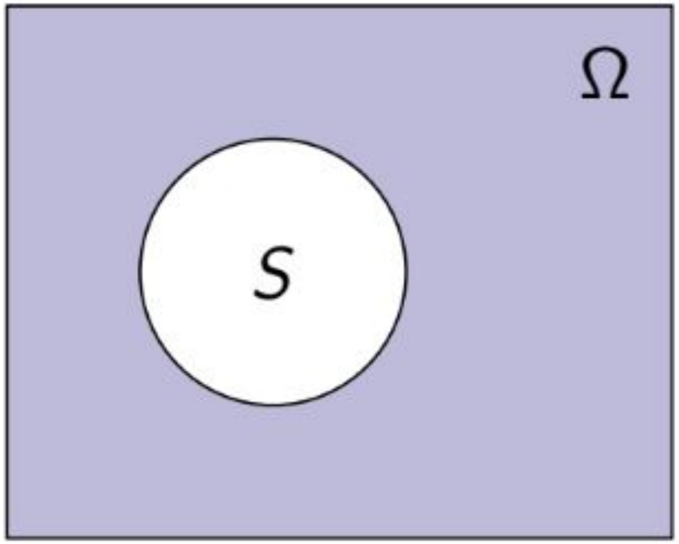
- Αν ένα σύνολο A δεν περιέχει κανένα στοιχείο, το ονομάζουμε **κενό** σύνολο $A = \emptyset$
- Ένα σύνολο μπορεί να είναι **πεπερασμένο** (π.χ. οι άνθρωποι που βρίσκονται αυτή τη στιγμή στην αίθουσα) ή **μη πεπερασμένο** (το σύνολο των πραγματικών αριθμών μεταξύ του 0 και του 1)
- Αν μπορούμε να απαριθμήσουμε τα αντικείμενα του συνόλου (σχέση 1 προς 1 με τους φυσικούς αριθμούς), το σύνολο ονομάζεται **αριθμίσημο**
- Αν δεν μπορούμε να τα απαριθμίσουμε το σύνολο ονομάζεται **μη αριθμίσιμο**

Σύνολα

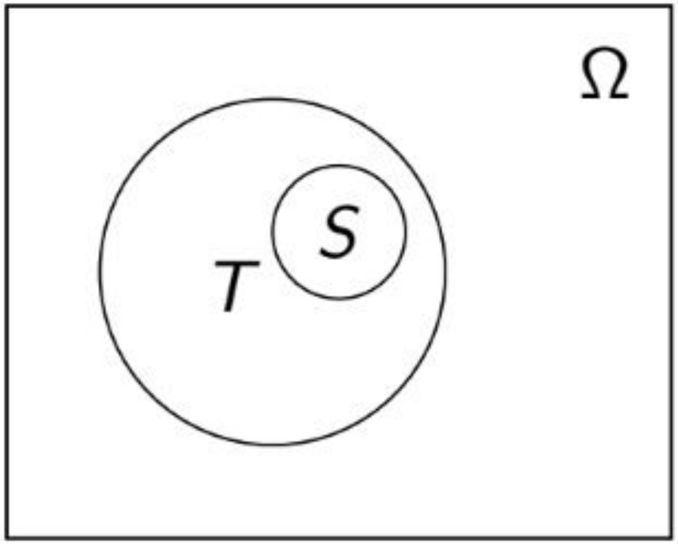
- Αν ένα σύνολο πέριέχει όλα τα δυνατά στοιχεία, το ονομάζουμε ***παγκόσμιο σύνολο Ω***
- Τα σύνολο των στοιχείων που δεν περιέχονται σε ένα σύνολο A, ονομάζεται **συμπλήρωμα** του Α και συμβολίζεται A^C, Προφανώς $\Omega^C = \emptyset$
- Ένα σύνολο A είναι **υποσύνολο** του B, όταν κάθε στοιχείο του B περιέχεται στο σύνολο A, $A \subseteq B$

Σύνολα

Διαγράμματα Venn: Γραφική Απεικόνιση συνόλων



Σκιασμένη περιοχή S^C

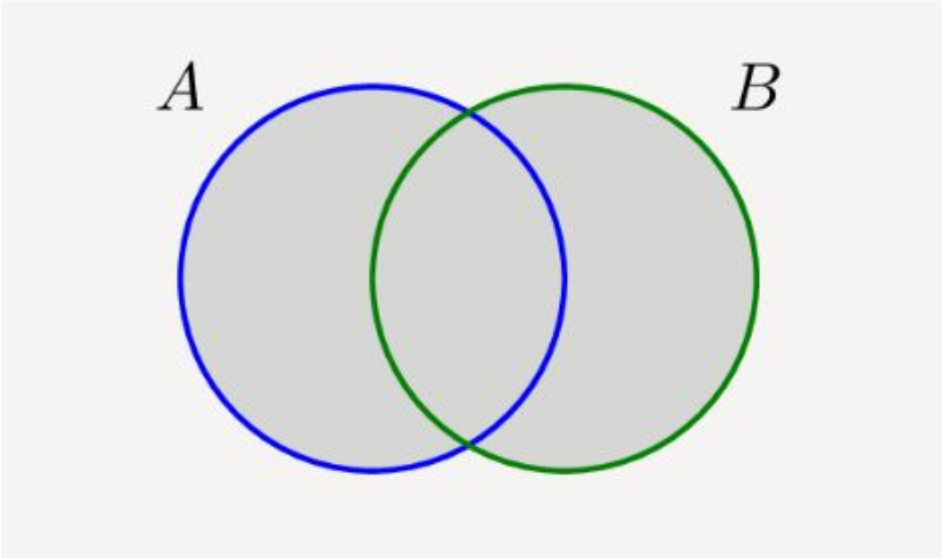


S υποσύνολο του T
$S \subseteq T$

Σύνολα

- Η ένωση των συνόλων A και B είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία που περιέχονται στο A ή στο B ή και στα δύο.

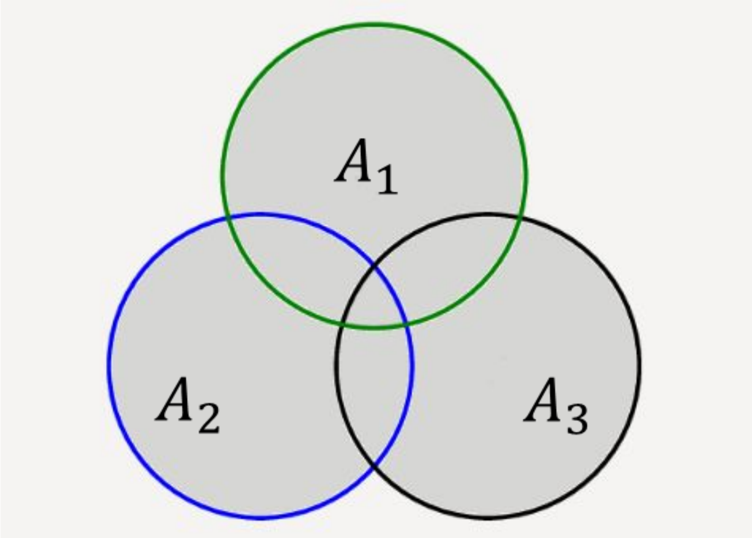
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$$



Σύνολα

- Η ένωση ορίζεται και για περισσότερα από δύο σύνολα. Στη γενική περίπτωση, η ένωση των συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n$ συμβολίζεται ως

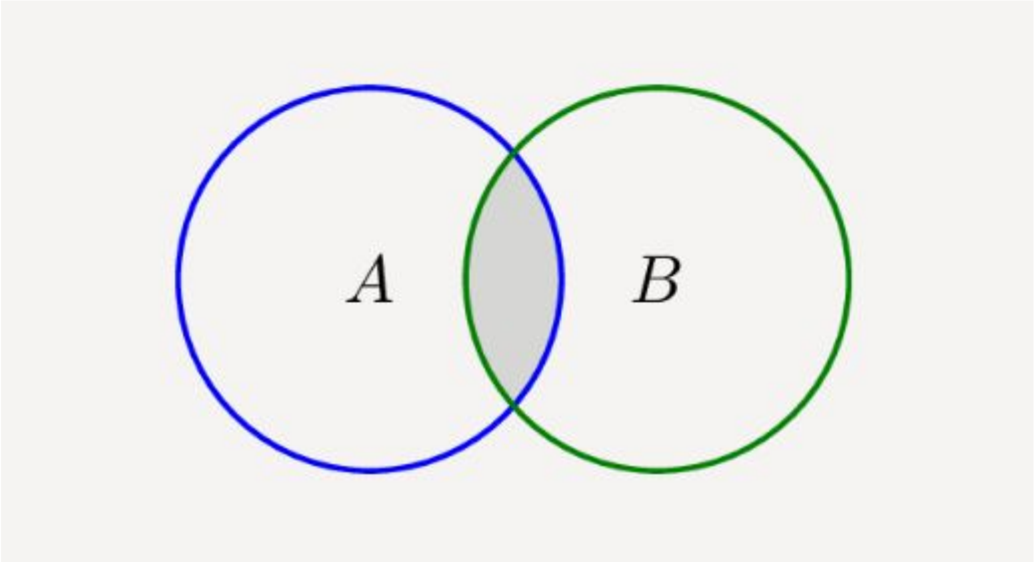
$$\cup_{i=1}^{n} A_i$$



Σύνολα

- Η τομή των συνόλων A και B είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία που περιέχονται αθροιστικά και στο σύνολο A και στο σύνολο B.

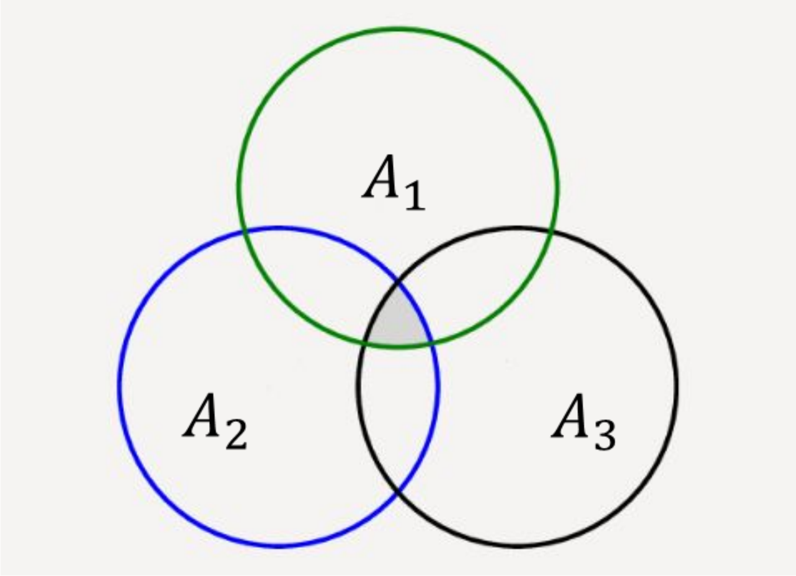
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \; and \; x \in B\}$$



Σύνολα

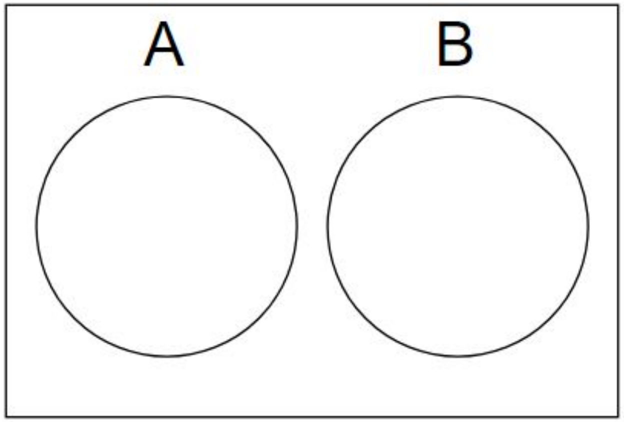
- Η τομή των συνόλων ορίζεται και για περισσότερα από δύο σύνολα. Στη γενική περίπτωση, η τομή των συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n$ συμβολίζεται ως

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$



Ξένα Σύνολα

- Δύο σύνολα A και B ονομάζονται ξένα (αλληλοαποκλειόμενα – disjoint, mutually exclusive), όταν η τομή τους είναι το κενό σύνολο $A \cap B = \emptyset$
- Δεν περιέχουν κανένα κοινό στοιχείο
  - $A = \{\, x \mid x$: Οι φοιτητές με τελικό βαθμό μεγαλύτερο του 8$\}$
  - $B = \{\, x \mid x$: Οι φοιτητές οι οποίοι δεν πέρασαν το μάθημα$\}$



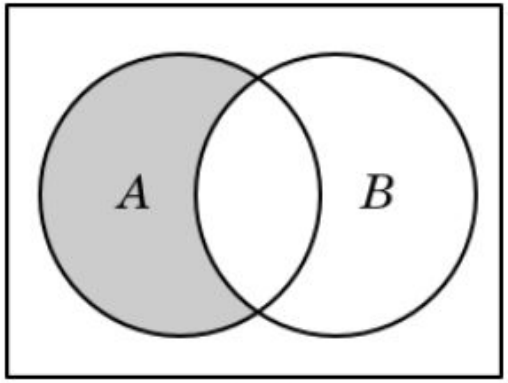
Διαφορά Συνόλων

- Η διαφορά του συνόλου A και B ορίζει ένα συνολο με όλα τα στοιχεία του A τα οποία δεν ανήκουν στο B

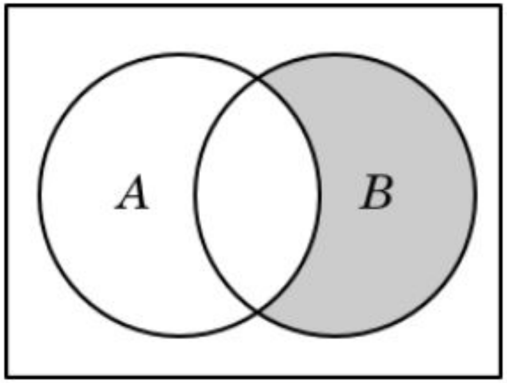
$$A - B = \{x \mid x \in A \; \kappa\alpha\iota \; x \in B^C\}$$

$$(\text{ή } A - B = \{x \mid x \in A \cap B^C\})$$

  - $A = \{1, 2, 3, 4\}, \;\; B = \{2, 4\ , 9, 10, 20\}$
  - $A - B = \{1, 3\}$
  - Προσοχή: $A - B \neq B - A, \;\; B - A = \{9, 10, 20\}$



$A \setminus B$



$B \setminus A$

Πληθάριθμος

- Το πλήθος των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου ονομάζεται πληθάριθμος του συνόλου ή πληθικός αριθμός (cardinality)

$$A = \{1, 2, 6, 8\} \Rightarrow card(A) = 4, |A| = 4$$

Πράξεις Συνόλων – Παράδειγμα 1

- $$A = \{1, 5, 7, 9\}, B = \{3, 5, 8\}, \Gamma = \{7, 10, 20\}$$

    - $A \cap (B \cup \Gamma) = \ldots$
    - $(A \cap B) \cup \Gamma = \ldots$
    - $(A - B) \cap \Gamma = \ldots$
    - $(A - B) - \Gamma = \ldots$
    - $(A - B) \cup \Gamma = \ldots$
    - $(B \cap \Gamma) \cap A = \ldots$

Πράξεις Συνόλων – Παράδειγμα 1

- $\mathrm{A} = \{1, 5, 7, 9\}, \mathrm{B} = \{3, 5, 8\}, \Gamma = \{7, 10, 20\}$
  - $A \cap (B \cup \Gamma) = A \cap \{3, 5, 8, 7, 10, 20\} = \{5, 7\}$
  - $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup \Gamma = \{5\} \cup \Gamma = \{5, 7, 10, 20\}$
  - $(A - B) \cap \Gamma = \{1, 7, 9\} \cap \Gamma = 7$
  - $(A - B) - \Gamma = \{1, 7, 9\} - \Gamma = \{1, 9\}$
  - $(A - B) \cup \Gamma = \{1, 7, 9\} \cup \Gamma = \{1, 7, 9, 10, 20\}$
  - $(B \cap \Gamma) \cap A = \emptyset$

Κανόνες στις Πράξεις Συνόλων

- Αντίστοιχοι με τους κανόνες της Άλγεβρας
  - Αντιμεταθετικοί νόμοι:
    - $A \cup B = B \cup A$
    - $A \cap B = B \cap A$
  - Προσεταιριστικοί Νόμοι:
    - $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$
    - $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$
  - Επιμεριστικοί Νόμοι:
    - $(A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$
    - $(A \cap B) \cup \Gamma = (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma)$

Νόμοι DeMorgan

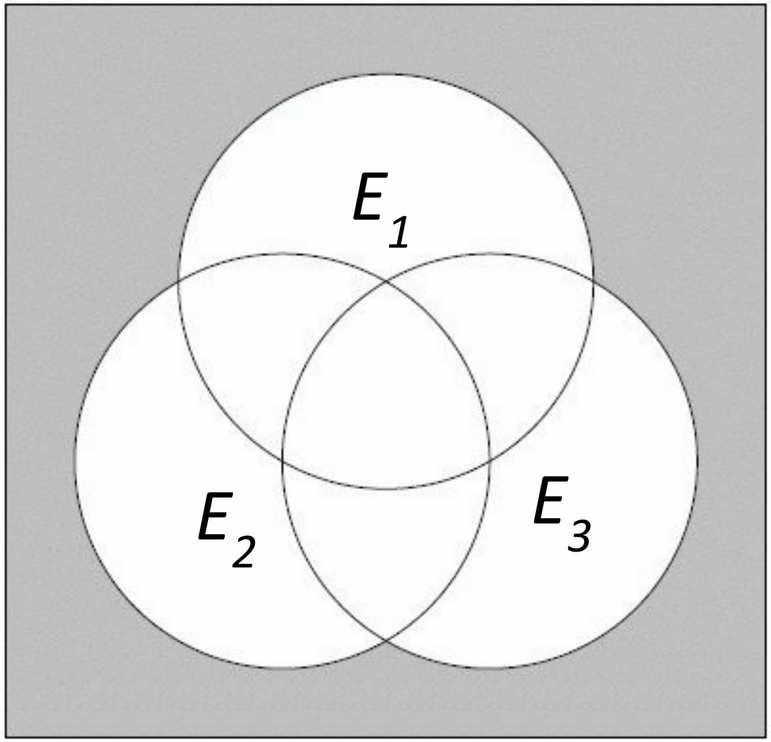
Προκύπτουν άμεσα με χρήση των πράξεων συνόλων

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c$$

Νόμοι DeMorgan

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$$



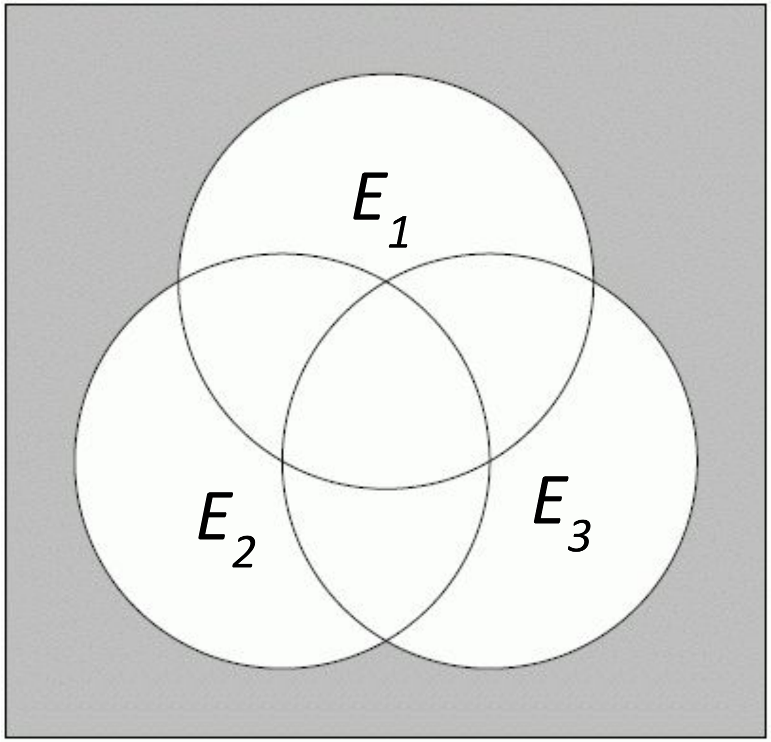
Νόμοι DeMorgan

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$$

Όχι άτομα κάτω των πέντε ετών ή πάνω των ογδόντα ετών

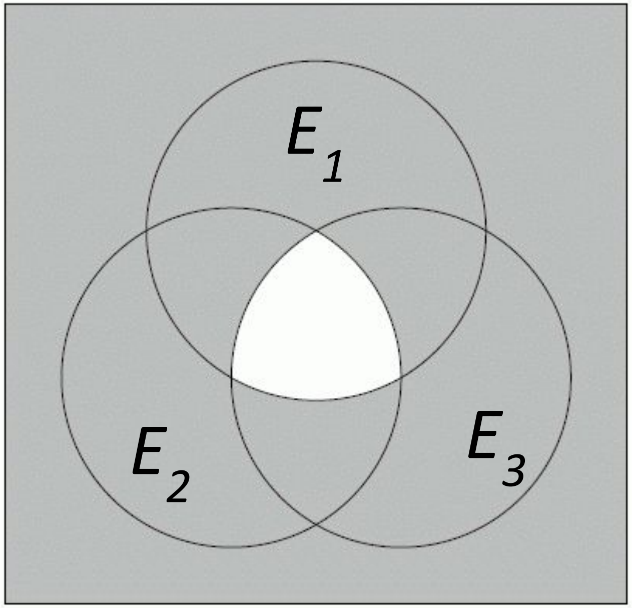
=

Ισχύει για ανθρώπους πάνω των πέντε ετών και κάτω των ογδόντα ετών



Νόμοι DeMorgan

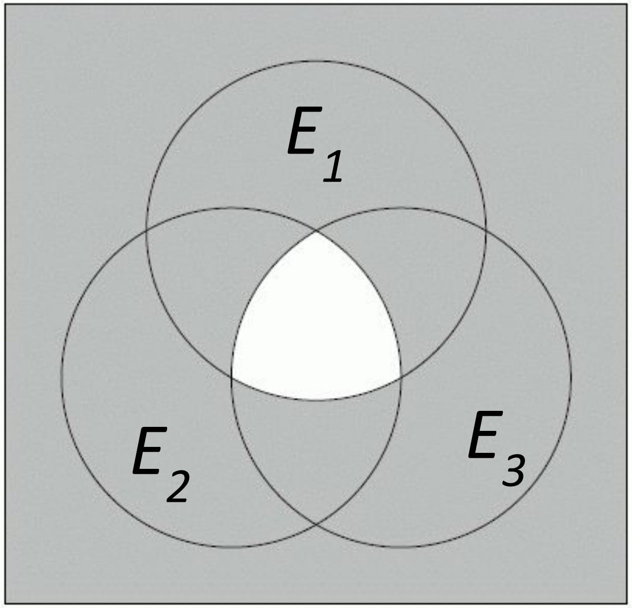
$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c$$



Νόμοι DeMorgan

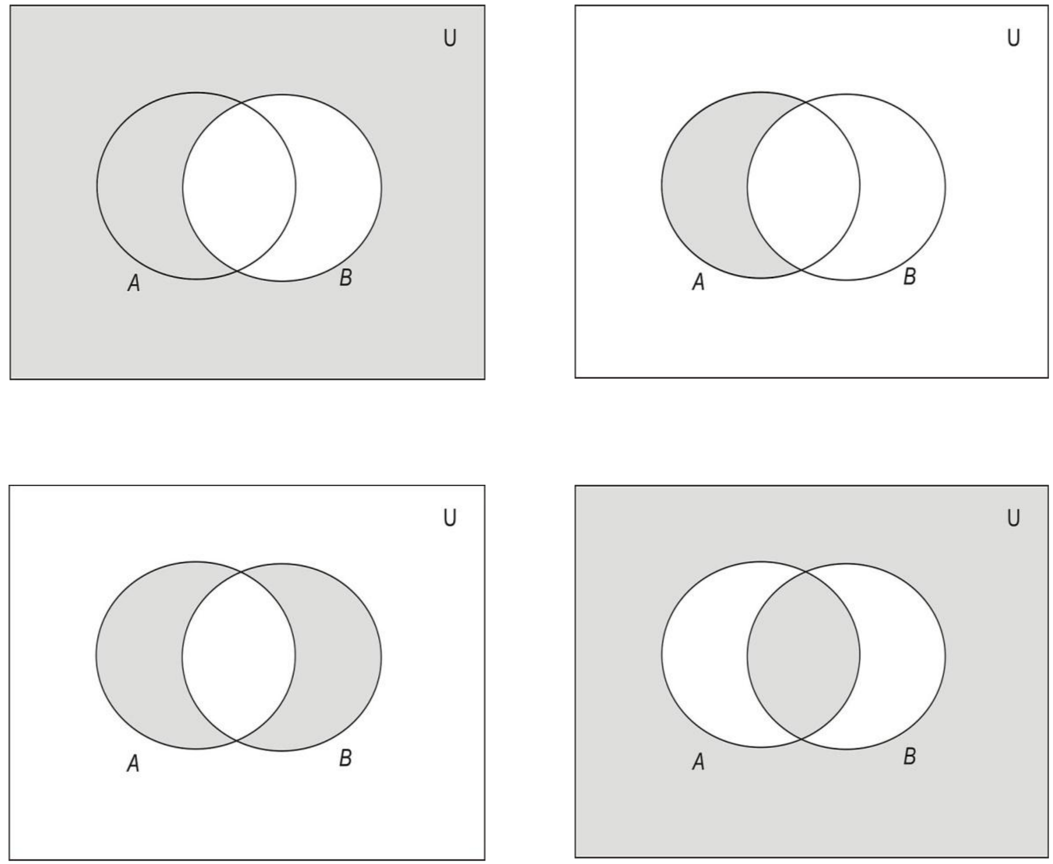
$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c$$

Όχι άτομα πάνω των 60 με καρδιακά προβλήματα
=
Άτομα που είναι κάτω από 60 ή άτομα χωρίς καρδιακά προβλήματα

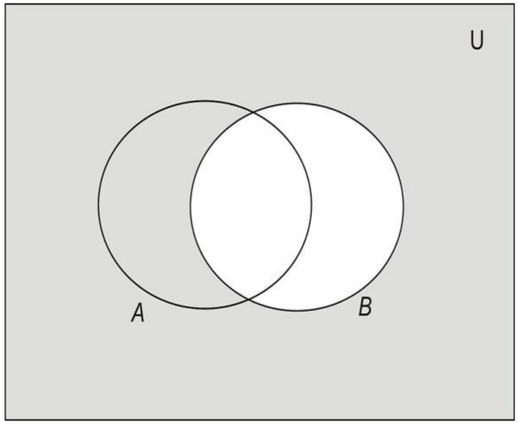


Παράδειγμα 2

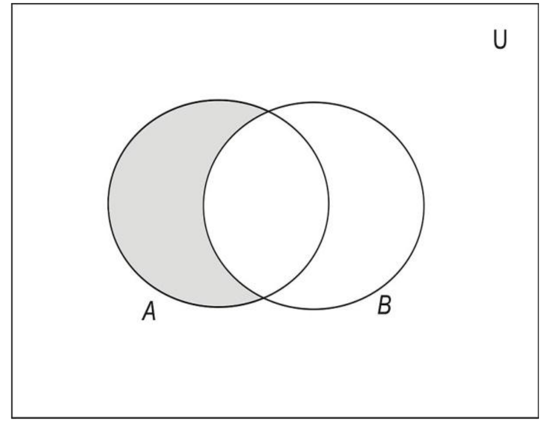
Χρησιμοποιώντας μόνο την ένωση, την τομή και το συμπλήρωμα, περιγράψτε τα γραμμοσκιασμένα τμήματα του δειγματικού χώρου



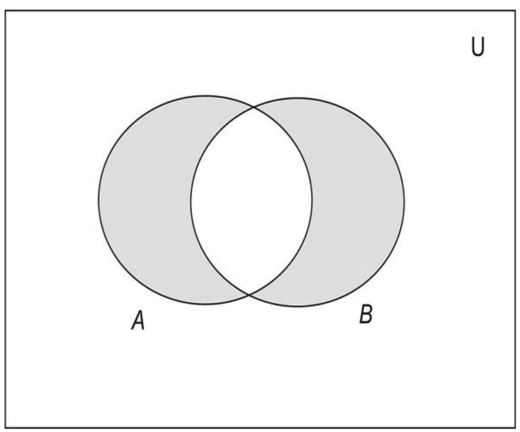
Παράδειγμα 2



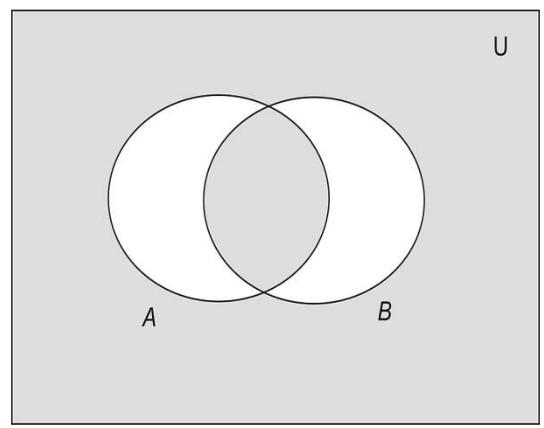
B^C



$A \cap B^C$



$(A \cup B) \cap (A \cap B)^C$



$(A \cap B) \cup (A \cup B)^C$

Παράδειγμα 3

- Ζωγραφική!
- Χρησιμοποιώντας το παρακάτω διάγραμμα γραμμοσκίαση των έξι παρακάτω συνόλων:

a) $A^C \cup B$

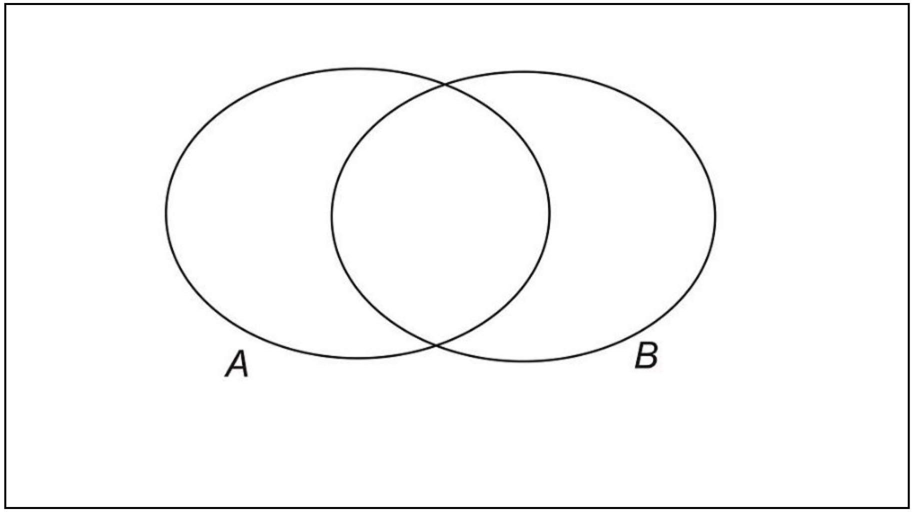
b) $A \cap B^C$

c) $(A \cap B)^C$

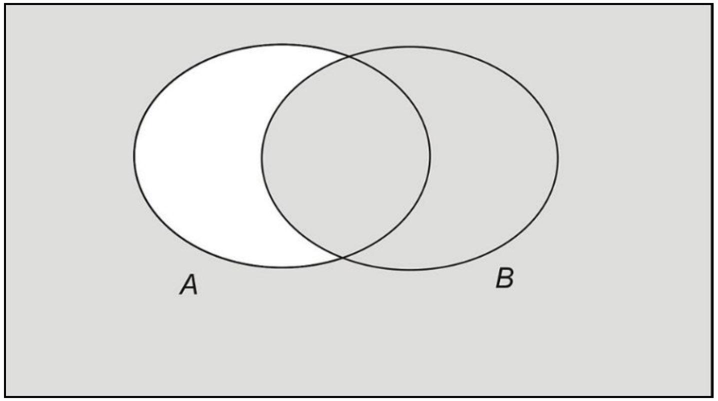
d) $A^C \cup B^C$

e) $(A \cup B)^C$

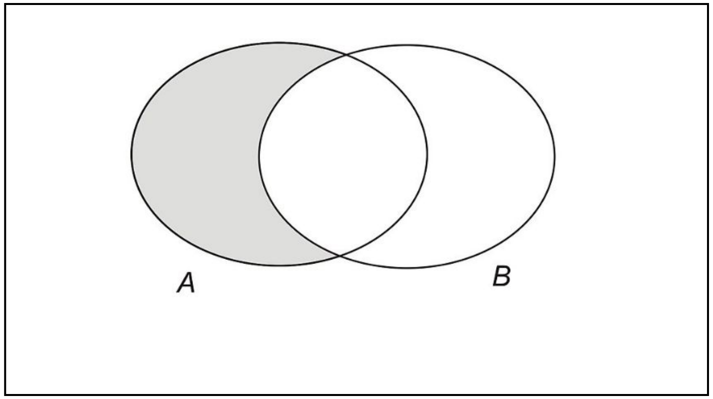
f) $A^C \cap B^C$



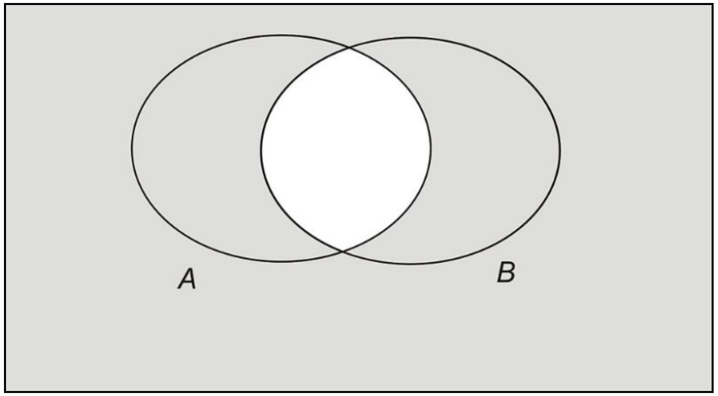
Παράδειγμα 3



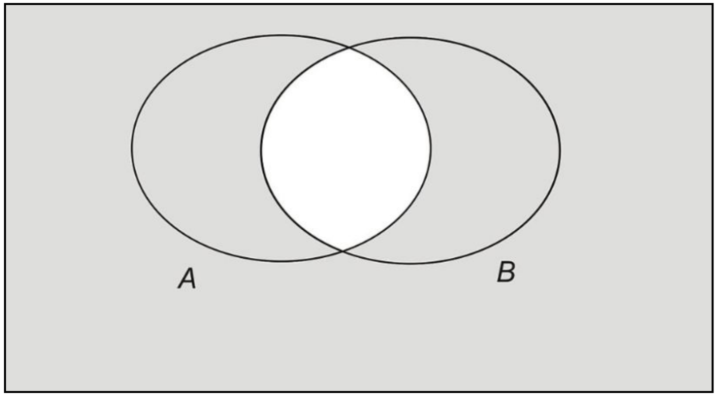
$A^C \cup B$



$A \cap B^C$

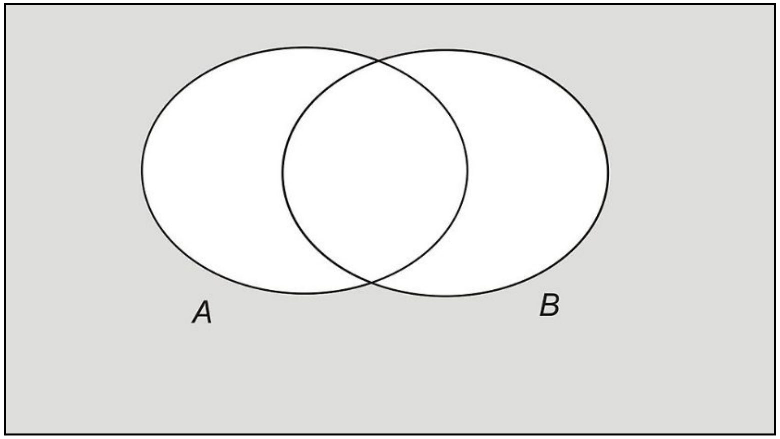


$(A \cap B)^C$

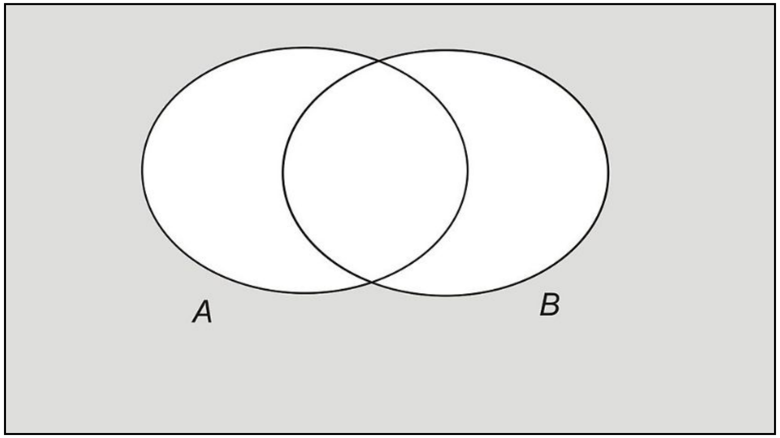


$A^C \cup B^C$

Παράδειγμα 3



$(A \cup B)^C$



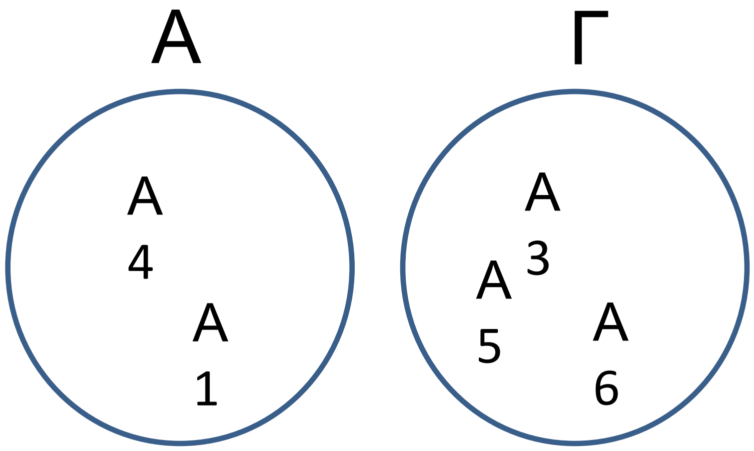
$A^C \cap B^C$

Διαγράμματα Venn

- Έχουμε κάνει χρήση των διαγράμματων Venn για τη γραφική απεικόνιση των πράξεων μεταξύ συνόλων
- Χρήσιμος τρόπος απεικόνισης των συνόλων και των σχέσεων τους

Διαγράμματα Venn

- Πληθυσμός 5 ατόμων $\{A1, A2, A3, A4, A5\}$
- Ανδρες $A1$ και $A4$, Γυναίκες $A2, A3, A5$
- Συνολο ανδρών A & σύνολο γυναικών Γ

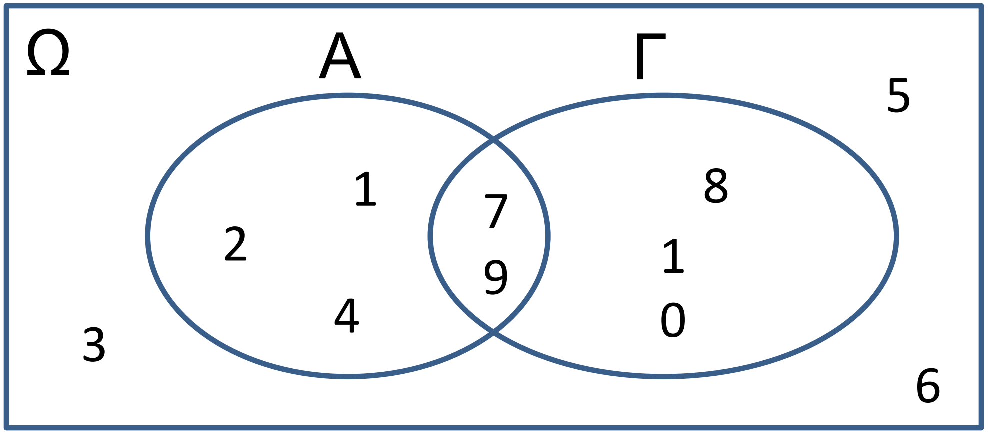


Διαγράμματα Venn

- Τάξη 10 παιδιών $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- Τα παιδιά $A = \{1, 2, 4, 7, 9\}$ κάνουν Αγγλικά
- Τα παιδιά $\Gamma = \{7, 8, 9, 10\}$ κάνουν Γερμανικά
- Τα υπόλοιπα παιδιά δεν κάνουν κάποια ξένη γλώσσα

Διαγράμματα Venn

- Τάξη 10 παιδιών $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- Τα παιδιά $A = \{1, 2, 4, 7, 9\}$ κάνουν Αγγλικά
- Τα παιδιά $\Gamma = \{7, 8, 9, 10\}$ κάνουν Γερμανικά
- Τα υπόλοιπα παιδιά δεν κάνουν κάποια ξένη γλώσσα

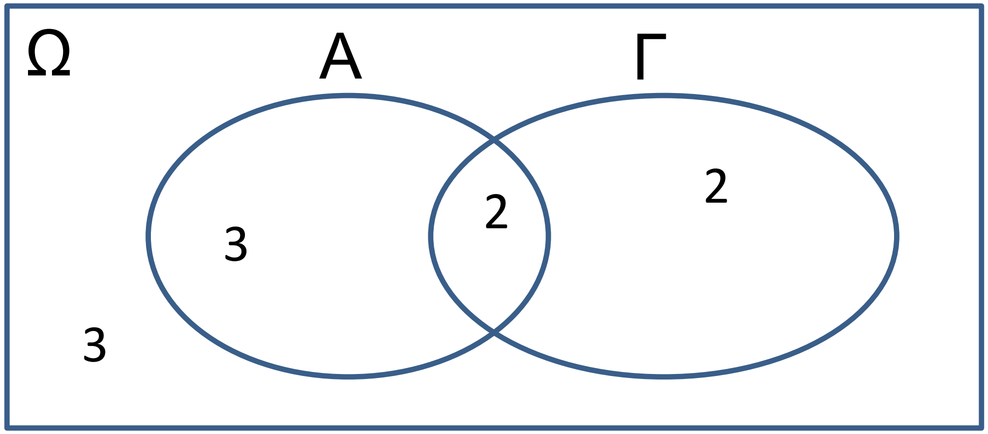


Διαγράμματα Venn

Τάξη 10 παιδιών $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

- Τα παιδιά $A = \{1, 2, 4, 7, 9\}$ κάνουν Αγγλικά
- Τα παιδιά $\Gamma = \{7, 8, 9, 10\}$ κάνουν Γερμανικά
- Τα υπόλοιπα παιδιά δεν κάνουν κάποια ξένη γλώσσα

Καθορισμός πληθικών αριθμών



Παράδειγμα 4

- $\boldsymbol{\Omega} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
- $B = \{1, 3, 6, 7, 8\}$
- $\Gamma = \{3, 7\}$
- Κατασκευή ενός διαγράμματος Venn και κατάλληλη τοποθέτηση των στοιχείων των τεσσάρων συνόλων
- Με χρήση των διαγραμμάτων, προσδιορισμός των συνόλων

  α) $A \cap B$, β) $A \cup C$, γ) A^C, δ) B^C, ε) $B \cap A^C$, στ) $B \cap \Gamma^C$,

  ζ) $A - B$

Παράδειγμα 4

$A \cap B = \{6, 8\}$

$A \cup \Gamma = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10$

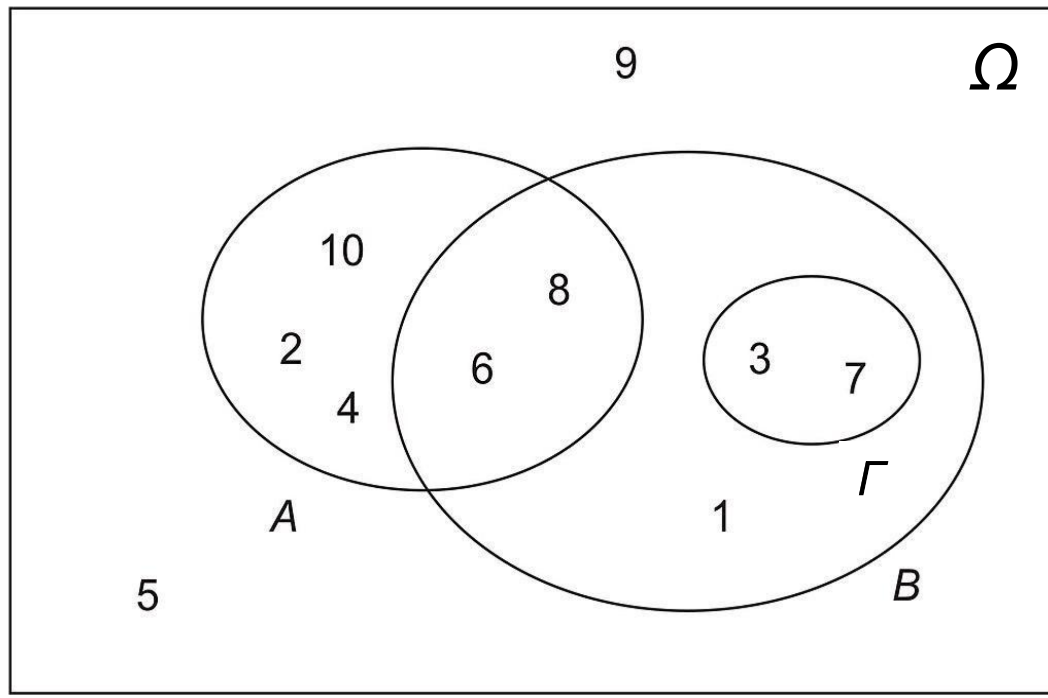
$A^C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B^C = \{2, 4, 5, 9, 10\}$

$B \cap A^C = \{1, 3, 7\}$

$B \cap \Gamma^C = \{1, 6, 8\}$

$A - B = \{2, 4, 10\}$



Παράδειγμα 5

- Σύνολο Ω: Θετικοί ακέραιοι μικρότεροι του 13

A, B και Γ υποσύνολα του Ω

A: πρώτοι αριθμοί

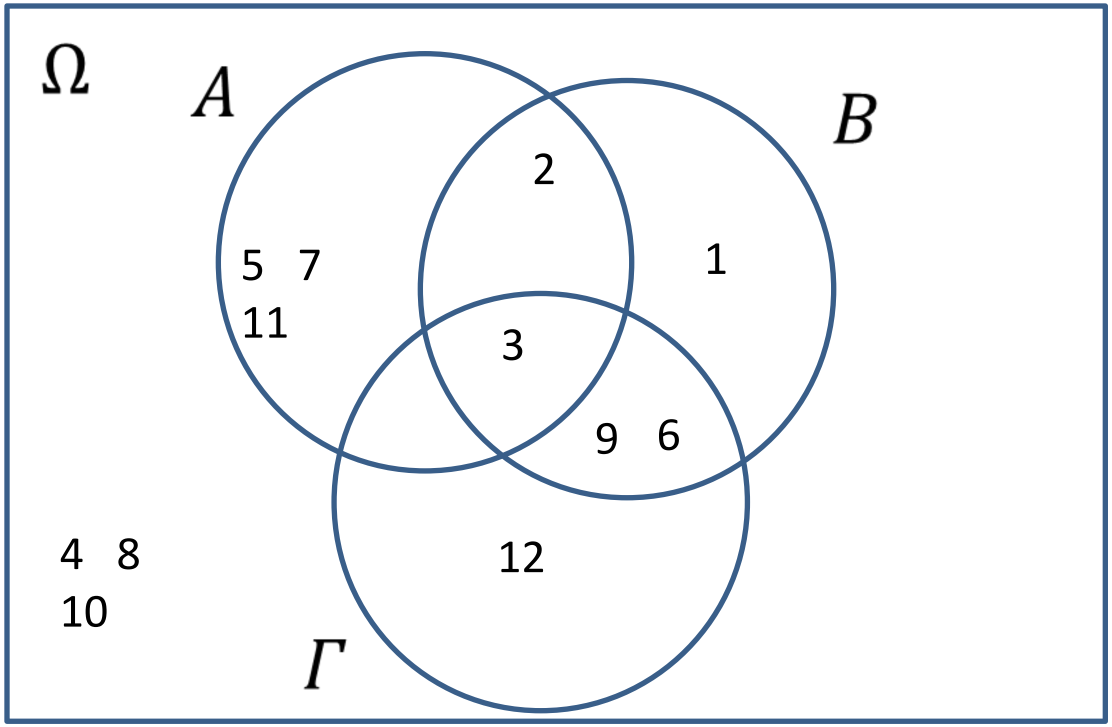
B: Διαιρέτες του 18

Γ: Πολλαπλάσια του 3

- Ποια τα στοιχεία των A, B, Γ και $A \cap B \cap \Gamma$
- Κατασκευάστε διαγράμματα Venn των συνόλων A, B και Γ και τοποθετήστε κατάλληλα τα στοιχεία τους

Παράδειγμα 5

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
$A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$
$B = \{1, 2, 3, 6, 9\}$
$\Gamma = \{3, 6, 9, 12\}$
$A \cap B \cap \Gamma = \{3\}$



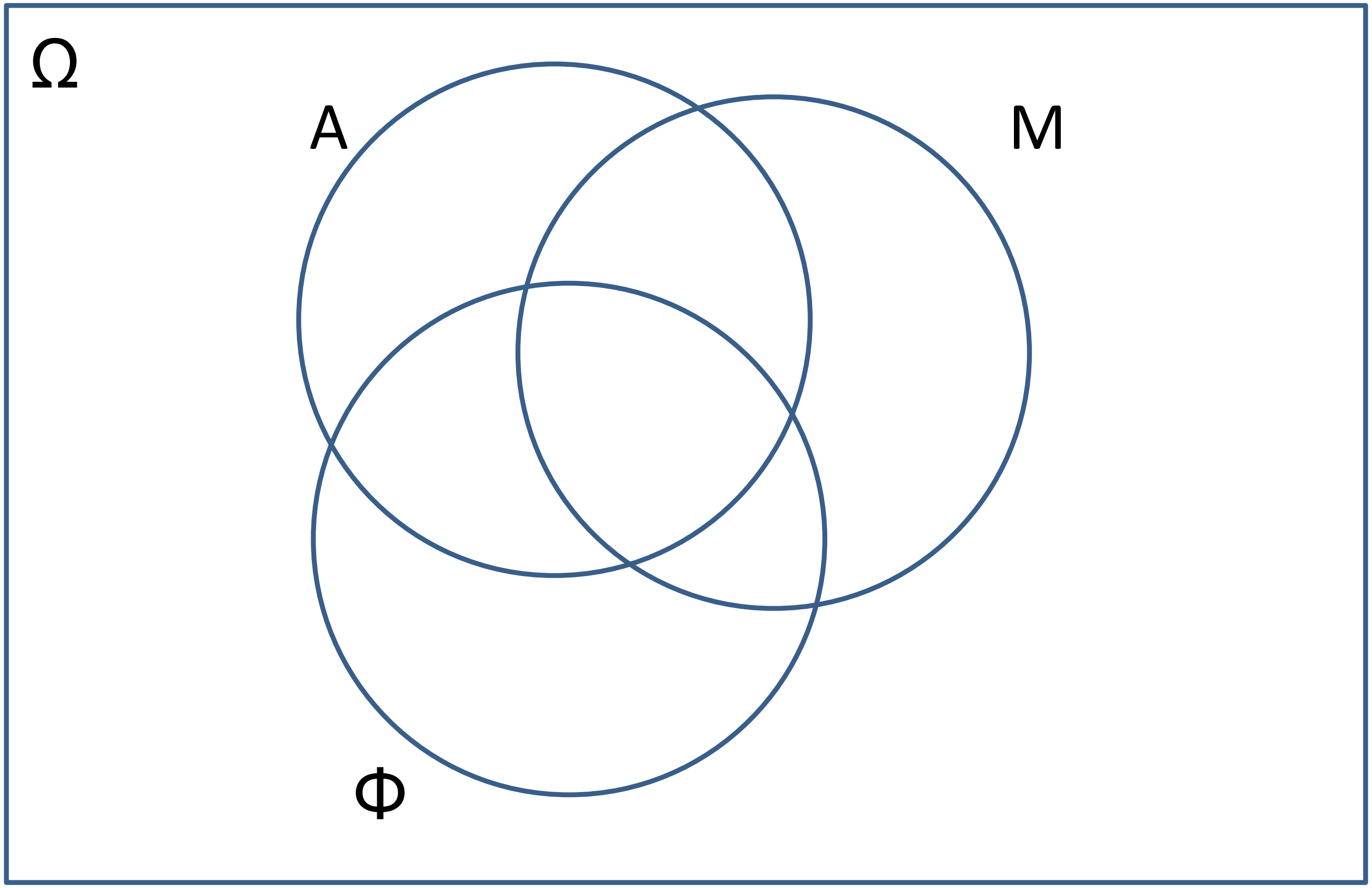
Παράδειγμα 6

- Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα
- Για μια τάξη 260 φοιτητών γνωρίζουμε τα παρακάτω:
  – 93 σπουδάζουν Αγγλικά
  – 95 σπουδάζουν Φυσική
  – 165 σπουδάζουν Μαθηματικά
  – 18 σπουδάζουν Αγγλικά και Φυσική
  – 75 σπουδάζουν Φυσική και Μαθηματικά
  – 20 σπουδάζουν Μαθηματικά ακι Αγγλικά
  – 15 φοιτητές σπουδάζουν Αγγλικά, Φυσική και Μαθηματικά

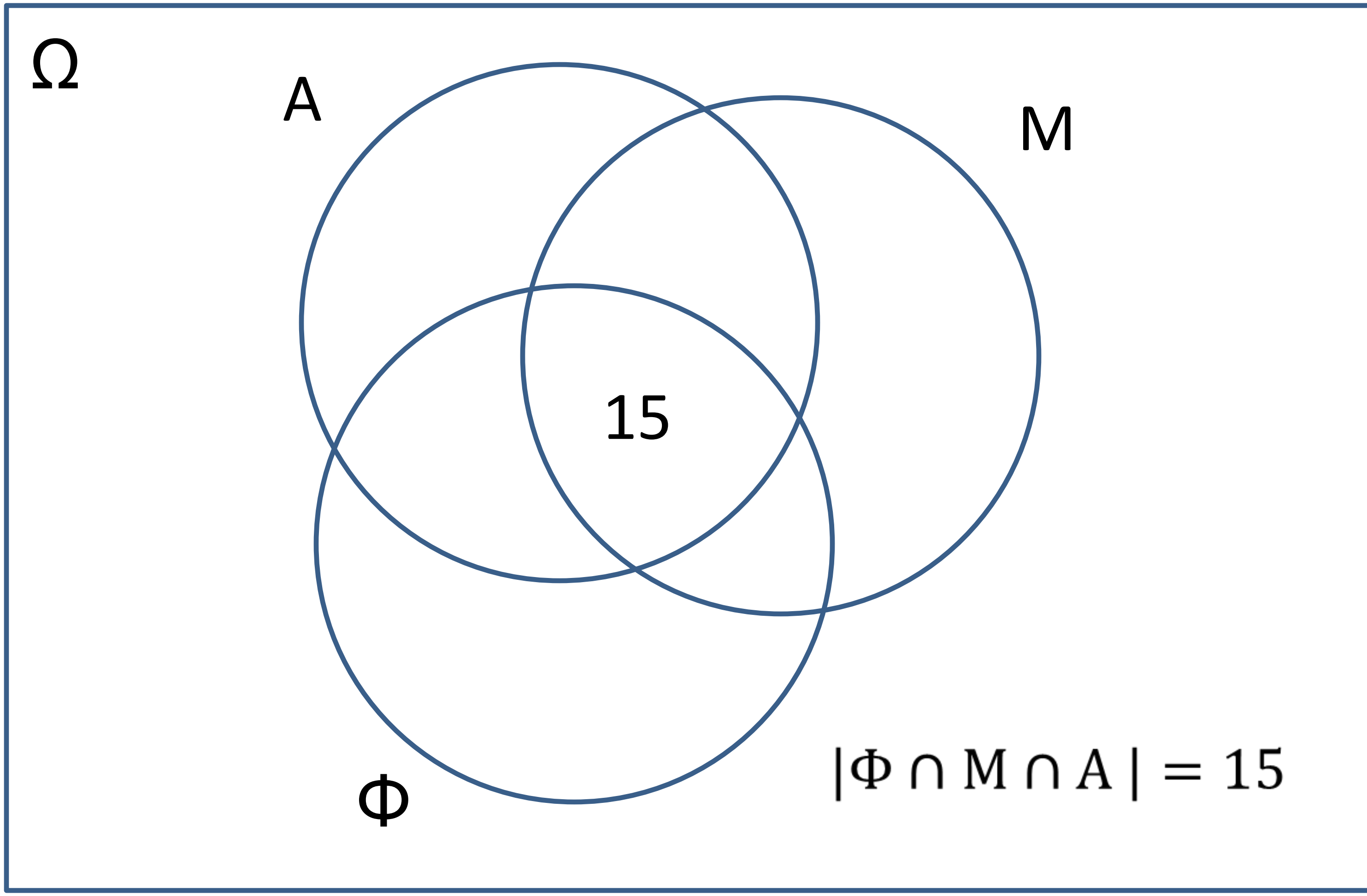
Παράδειγμα 6

- Ορισμός Συνόλων:
  - A: οι φοιτητές που σπουδάζουν Αγγλικά
  - M: οι φοιτητές που σπουδάζουν Μαθηματικά
  - Φ: οι φοιτητές που σπουδάζουν Φυσική
  - 93 σπουδάζουν Αγγλικά $\Rightarrow |A| = 93$
  - 95 σπουδάζουν Φυσική $\Rightarrow |\Phi| = 95$
  - 165 σπουδάζουν Μαθηματικά $\Rightarrow |M| = 165$
  - 18 σπουδάζουν Αγγλικά και Φυσική $\Rightarrow |A \cap \Phi| = 18$
  - 75 σπουδάζουν Φυσική και Μαθηματικά $\Rightarrow |\Phi \cap M| = 75$
  - 20 σπουδάζουν Μαθηματικά και Αγγλικά $\Rightarrow |M \cap A| = 20$
  - 15 σπουδάζουν Μαθηματικά, Αγγλικά και Φυσική $\Rightarrow$ $|\Phi \cap M \cap A| = 15$

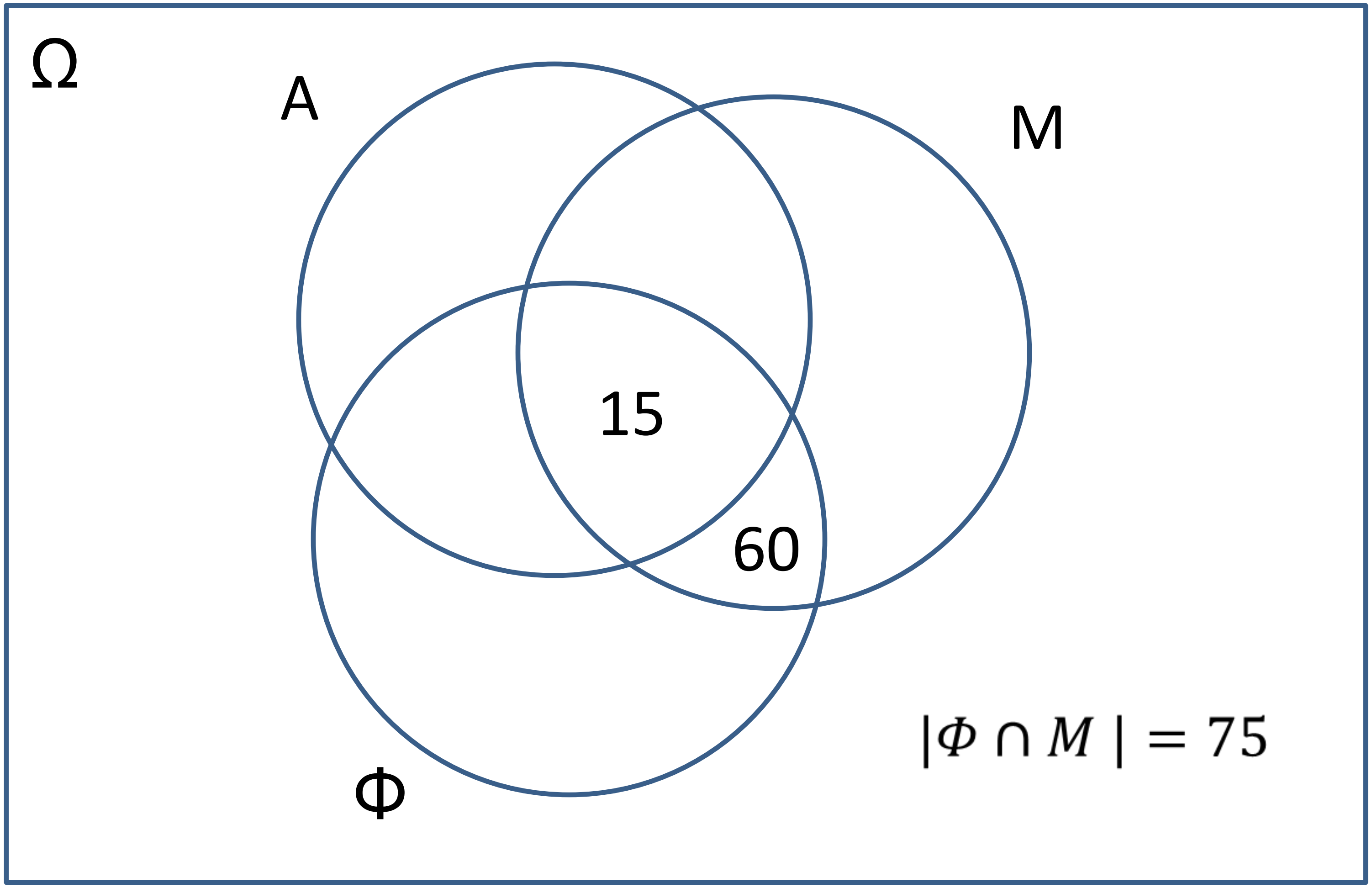
Παράδειγμα 6



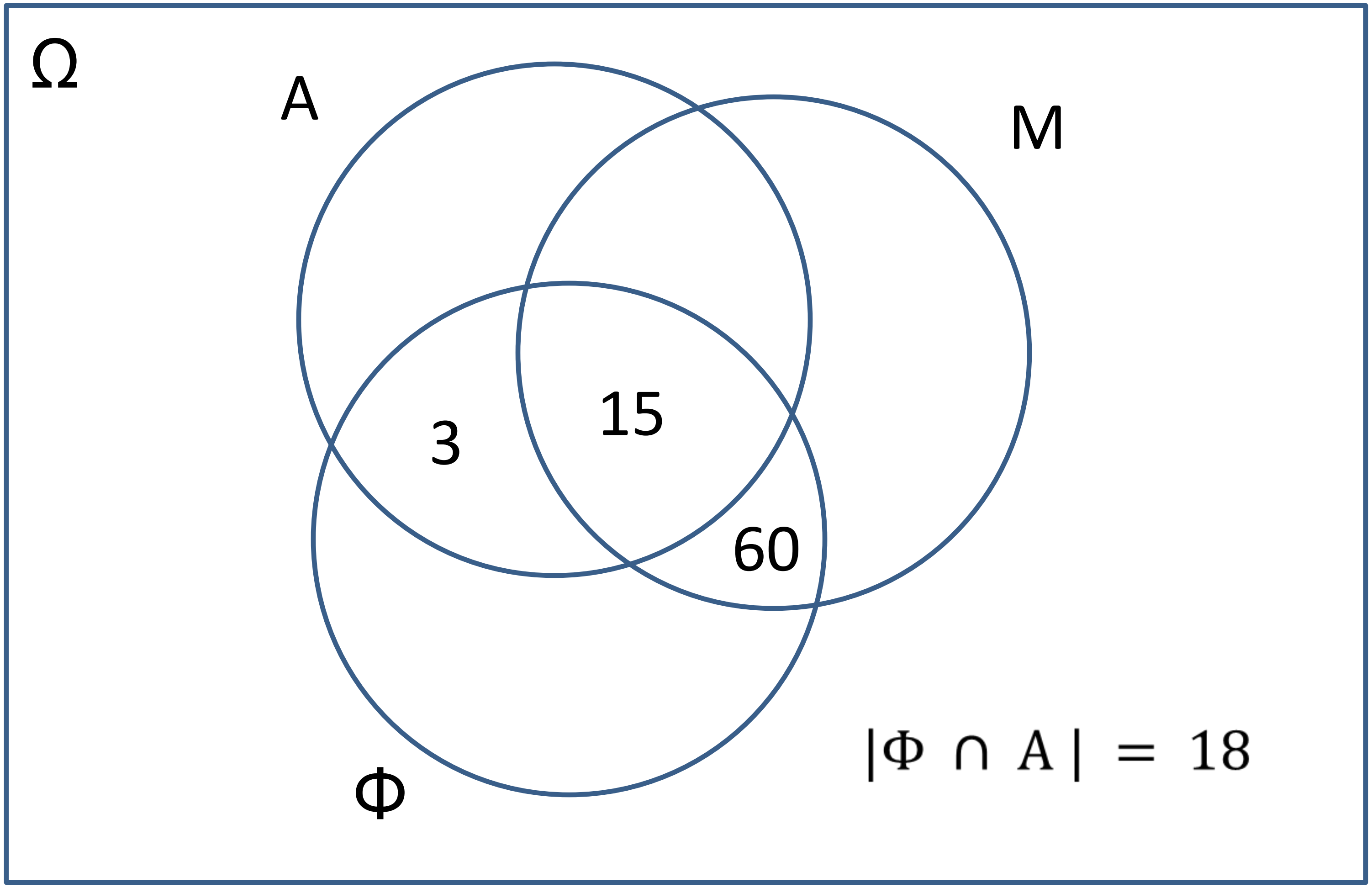
Παράδειγμα 6



Παράδειγμα 6

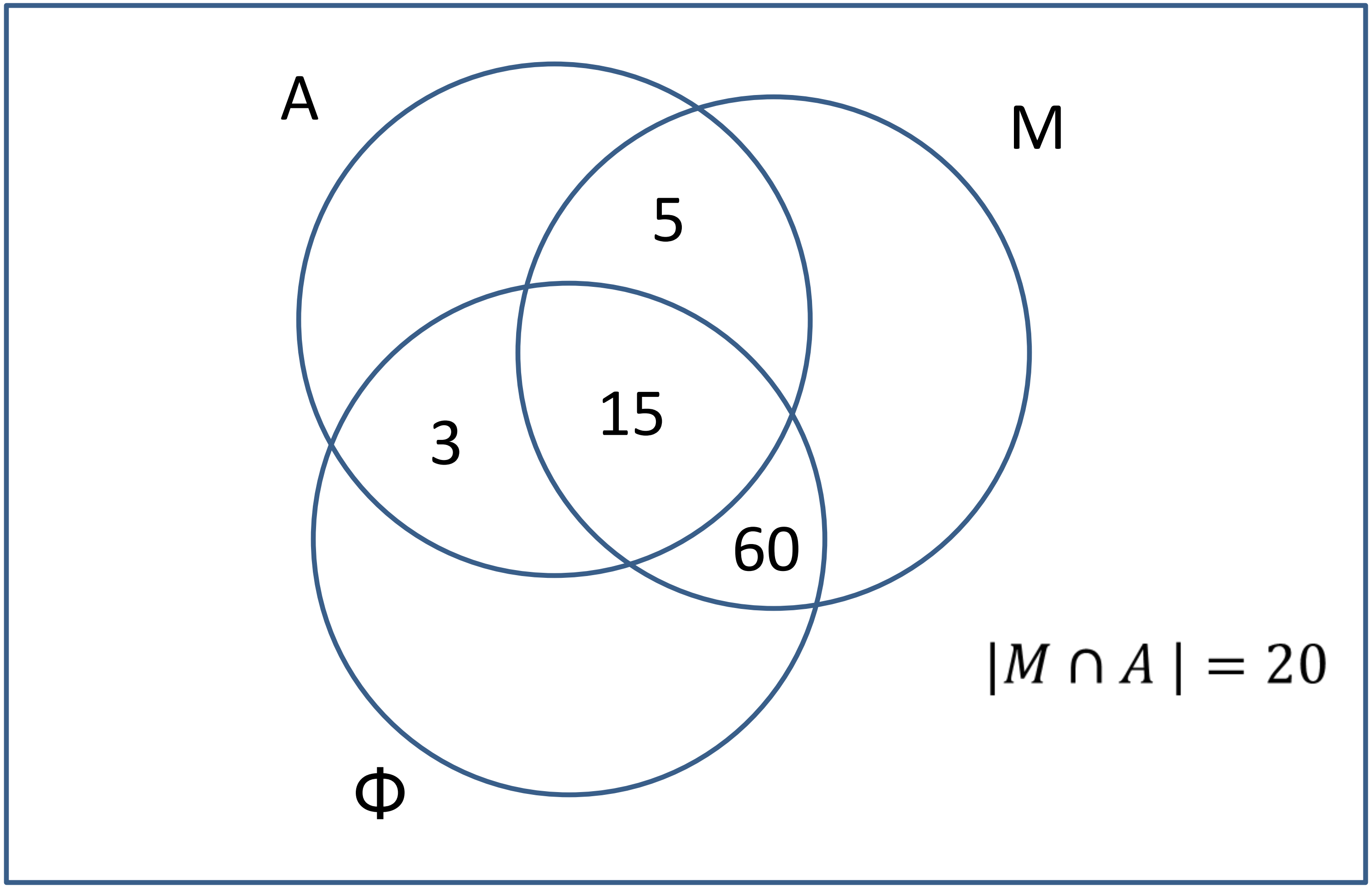


Παράδειγμα 6

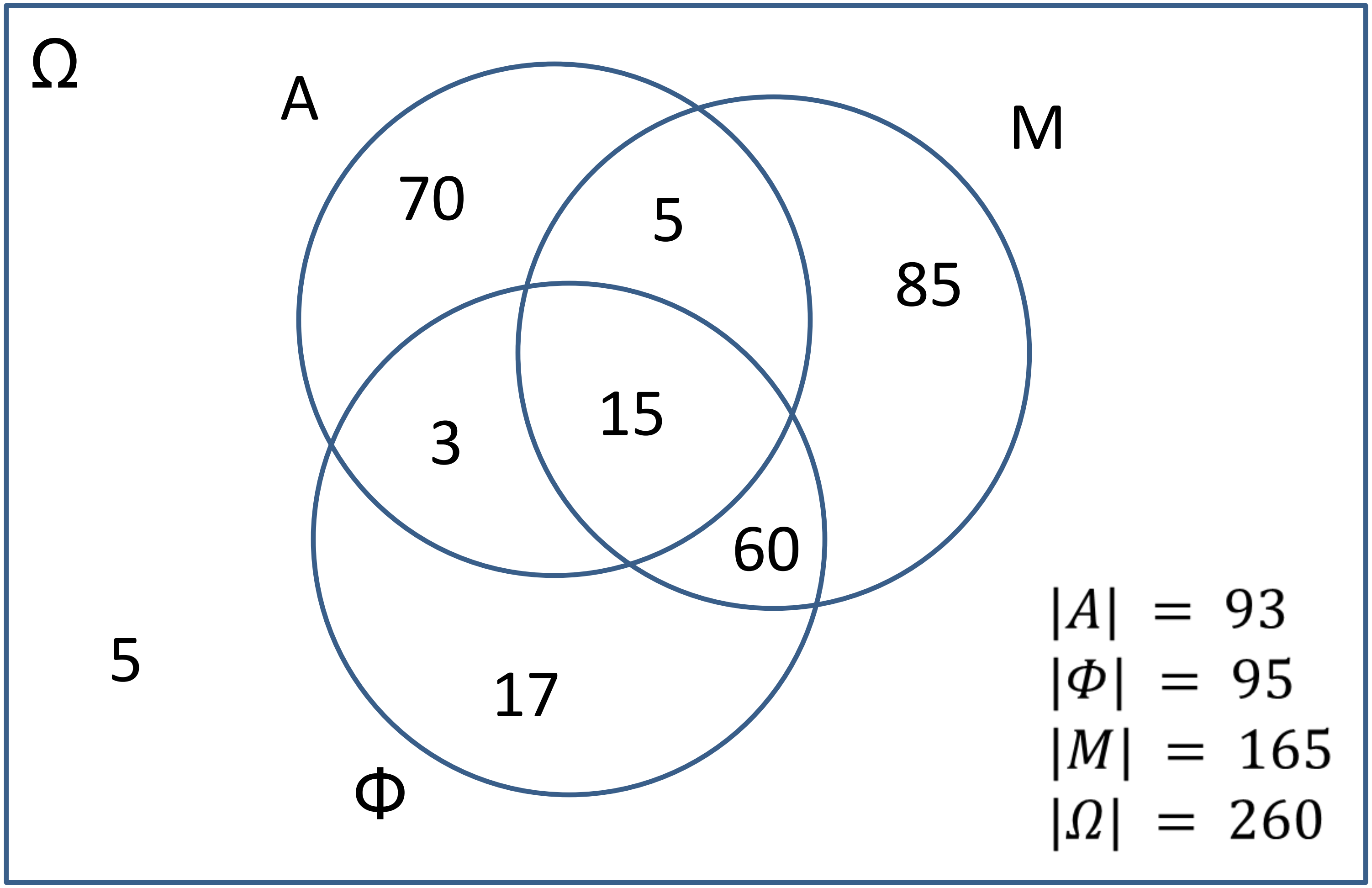


$|Φ \cap Α| = 18$

Παράδειγμα 6



Παράδειγμα 6



Στρίψιμο 2 Νομισμάτων

- Δειγματικός Χώρος $\Omega = \{(\mathrm{K},\mathrm{K}), (\mathrm{K},\Gamma), (\Gamma,\Gamma), (\Gamma,\mathrm{K})\}$
  - Ενδεχόμενο $E1$: Πρώτη ρίψη γράμματα

    $E1 = \{(\Gamma, K), (\Gamma, \Gamma)\}$
  - Ενδεχόμενο $\mathrm{E}2$: Δεύτερη ρίψη γράμματα

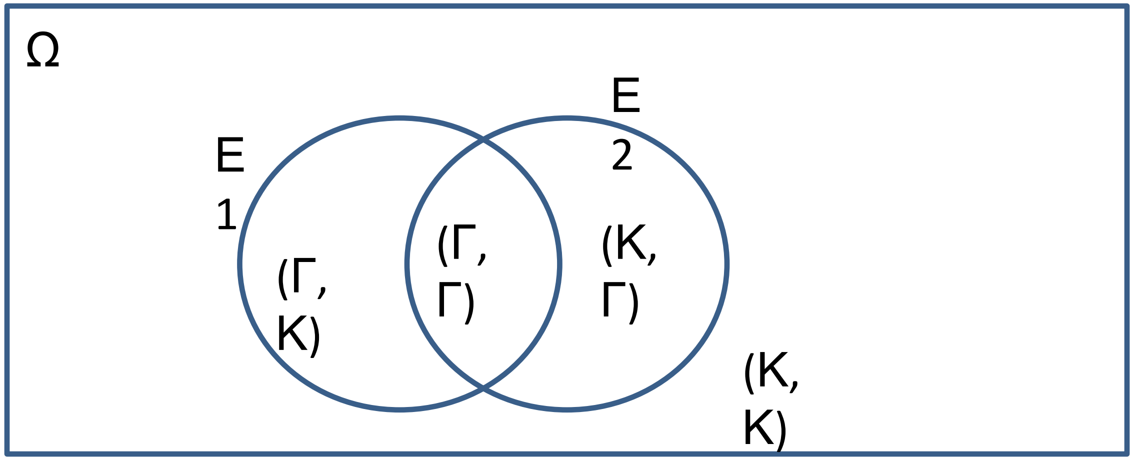
    $E2 = \{(K, \Gamma), (\Gamma, \Gamma)\}$

Στρίψιμο 2 Νομισμάτων

- Δειγματικός Χώρος $\Omega \;=\; \{(\mathrm{K},\mathrm{K}),(\mathrm{K},\Gamma),(\Gamma,\Gamma),(\Gamma,\mathrm{K})\}$
  - Ενδεχόμενο $E1$: Πρώτη ρίψη γράμματα

    $E1 = \{(\Gamma,K),(\Gamma,\Gamma)\}$
  - Ενδεχόμενο $E2$: Δεύτερη ρίψη γράμματα

    $E2 = \{(K,\Gamma),(\Gamma,\Gamma)\}$



Ρίψη 2 Ζαριών

- Δειγματικός Χώρος

$$\Omega = \{(i,j), i = 1,..,6, j = 1,...,6\}$$

  - Ενδεχόμενο $\mathrm{E}1$: Πρώτο Ζάρι 6

$$E1 = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

  - Ενδεχόμενο Ε2: Πρώτο Ζάρι 6

$$E2 = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\}$$

Πως ορίζουμε το ενδεχόμενο να φέρουμε 6άρες;

Ρίψη 2 Ζαριών

- – Ενδεχόμενο $E1$: Πρώτο Ζάρι 6

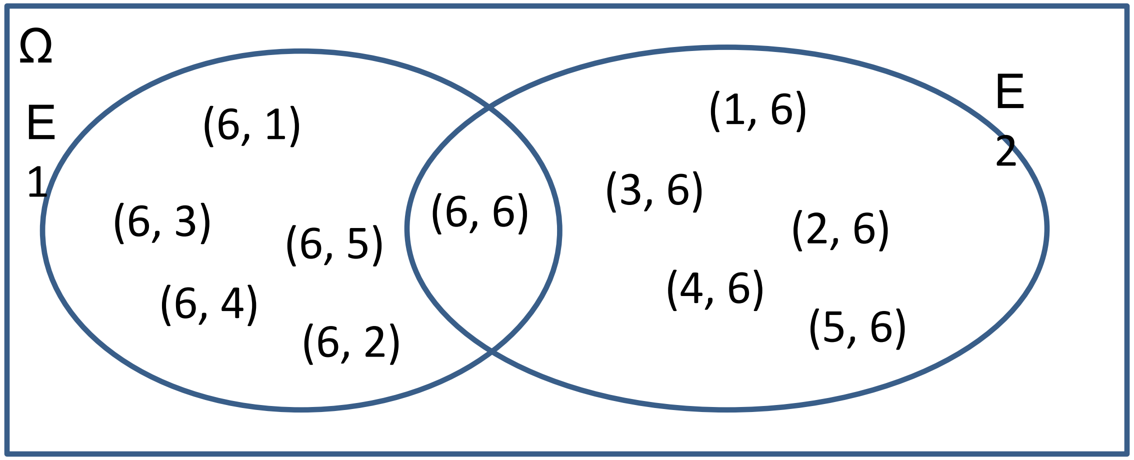
$$E1 = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

– Ενδεχόμενο E2: Πρώτο Ζάρι 6

$$E2 = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\}$$

Πως ορίζουμε το ενδεχόμενο να φέρουμε 6άρες;

$$E1 \cap E2 = \{(6,6)\}$$



Ρίψη 2 Ζαριών

- Δειγματικός Χώρος

$$\Omega = \{(i,j), i = 1,..,6, j = 1,\ldots,6\}$$

Πως ορίζουμε το ενδεχόμενο να φέρουμε διπλές;

$$E3 = \{(i,j) \mid i = j, 0 \leq i,j \leq 6\} =$$
$$= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$