Моделирование

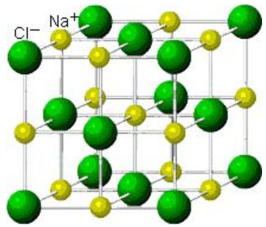
§ 6. Модели и моделирование
§ 7. Системный подход в моделировании
§ 8. Этапы моделирования
§ 9. Моделирование движения
§ 10. Математические модели в биологии
§ 11. Системы массового обслуживания

Моделирование

§ 6. Модели и моделирование

Что такое модель?

модели чего?



автомобиль | Земля | кристаллическая решётка | корабль | дом

оригиналы

! Моделей без оригинала не существует!

Оригиналы:

- **объекты** (самолет, дом, ядро атома, галактика)
- **процессы** (изменение климата, развитие экономики)
- **явления** природы (землетрясения, цунами)

Что такое модель?

? Зачем нужны модели?

Нужно решить **задачу**, связанную с оригиналом, но:

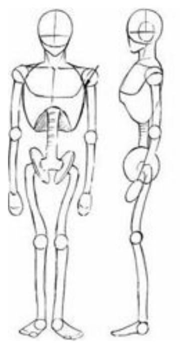
- оригинал **не существует**
  - древний Египет
  - последствия ядерной войны (Н.Н. Моисеев, 1966)
- исследование оригинала **дорого** или **опасно**
  - управление ядерным реактором (Чернобыль, 1986)
  - испытание нового скафандра для космонавтов
  - разработка нового самолета или корабля
- оригинал **сложно** исследовать
  - Солнечная система, галактика (большие размеры)
  - атом, нейтрон (маленькие размеры)
  - процессы в двигателе внутреннего сгорания (очень быстрые)
  - геологические явления (очень медленные)
- интересуют только **отдельные свойства**
  - проверка краски для фюзеляжа самолета

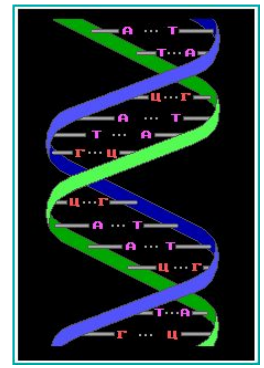
Модели и оригиналы

оригинал

задача

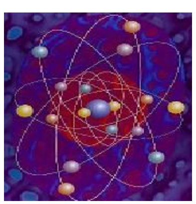
модель




модели человека

материальная точка






Модели и моделирование

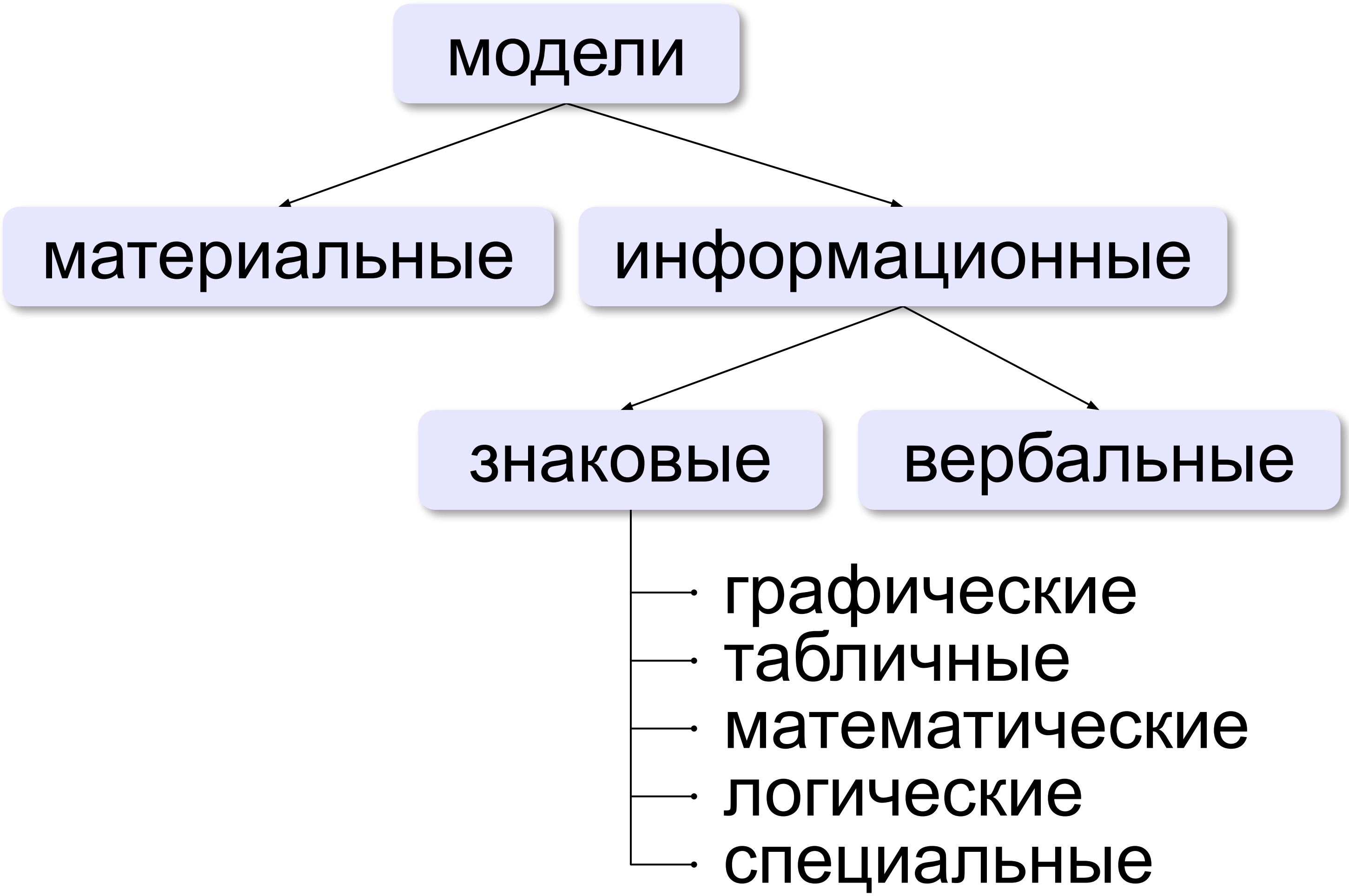
Модель – это объект, который обладает существенными свойствами другого объекта, процесса или явления (*оригинала*) и используется вместо него.

Моделирование – это создание и исследование моделей с целью изучения оригиналов.

Задачи моделирования:

- **исследование** оригинала
- **анализ** («что будет, если …»)
- **синтез** («как сделать, чтобы …»)
- **оптимизация** («как сделать лучше всего …»)

Виды моделей (по природе)



Виды моделей (по фактору времени)

- **статические** – описывают оригинал в заданный момент времени
  - силы, действующие на тело в состоянии покоя
  - результаты осмотра врача
  - фотография
- **динамические**
  - модель движения тела
  - явления природы (молния, землетрясение, цунами)
  - история болезни
  - видеозапись события
  - …

дискретные модели описывают поведение только в отдельные моменты времени

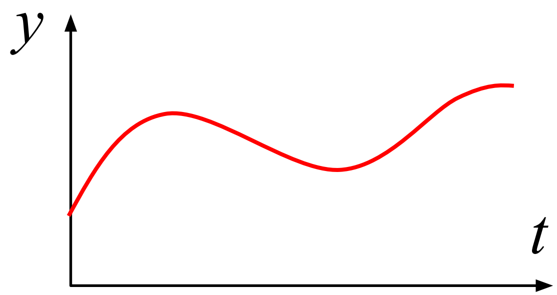
непрерывные модели – в любой момент времени

Виды моделей (по характеру связей)

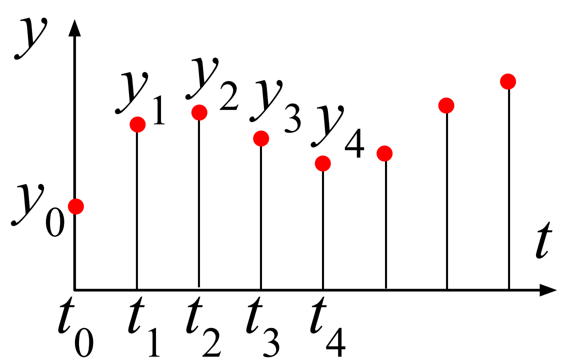
- **детерминированные** – при одинаковых исходных данных всегда получается тот же результат
  - расчёт по формулам
  - движение корабля на спокойной воде
  - …
- **вероятностные** – учитывают случайность событий
  - броуновское движение частиц
  - полета самолёта с учетом ветра
  - движения корабля на волнении
  - поведение человека
  - …

Виды динамических моделей

- **непрерывные** – описывают оригинал в любой момент времени на заданном интервале
  - $y = 2t + 5$



- **дискретные** – описывают оригинал только в отдельные моменты времени (через 1 сек, час, год, …)
  - $y_i = 2t_i + 5$
  - $y_i = 5y_{i-1} + 5$



Имитационные модели

- нельзя заранее вычислить или предсказать поведение системы, но можно имитировать её реакцию на внешние воздействия
- максимальный учет всех факторов
- только численные результаты

! Задача – найти лучшее решение **методом проб и ошибок** (многократные эксперименты)!

Примеры:

- испытания лекарств на мышах, обезьянах, …
- математическое моделирование биологических систем
- модели систем массового обслуживания
- модели процесса обучения
- кросс-программирование
- …

Игровые модели

Игровые модели учитывают действия **противников**.

- экономические ситуации
- военные действия
- спортивные игры
- тренинги персонала

! Задача – найти **лучший вариант действий в самом худшем случае**!

Адекватность

Адекватность – это совпадение существенных свойств модели и оригинала в данной задаче.

- результаты моделирования согласуются с выводами теории (законы сохранения и т.п.)
- … подтверждаются экспериментом (±10%)

! Адекватность модели можно доказать только экспериментом!

Модель всегда отличается от оригинала

↓

! Любая модель адекватна только при определенных условиях!

Моделирование

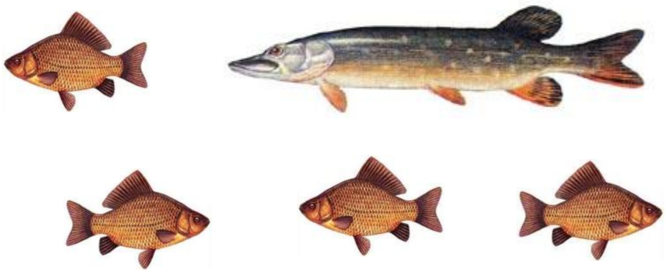
§ 7. Системный подход в моделировании

Модели-системы и модели-«не-системы»

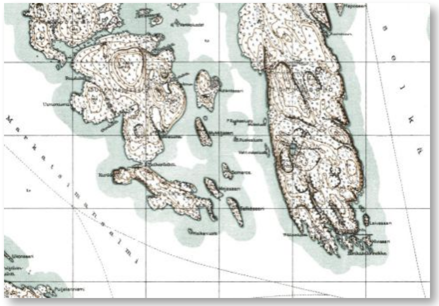
Модель-«не-система»:

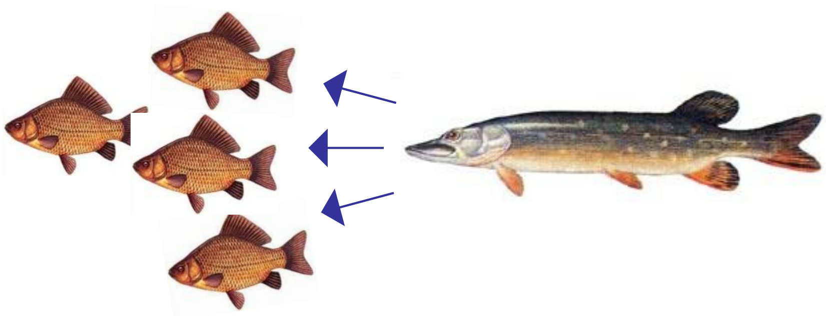

1-я линия:
Пр. Ветеранов
Ленинский пр.
Автово
Кировский завод
Нарвская
…

2-я линия:
Купчино
Звездная
Московская
Парк Победы
Электросила
…



Модель-система:





Таблицы

Свойства объектов:

Фамилия	Имя	Год рождения	Место отдыха
Иванов	Кузьма	1955	о. Валаам
Кузьмин	Сидор	1978	о. Ольхон
Сидоров	Иван	1990	о. Кипр

Связи между объектами:

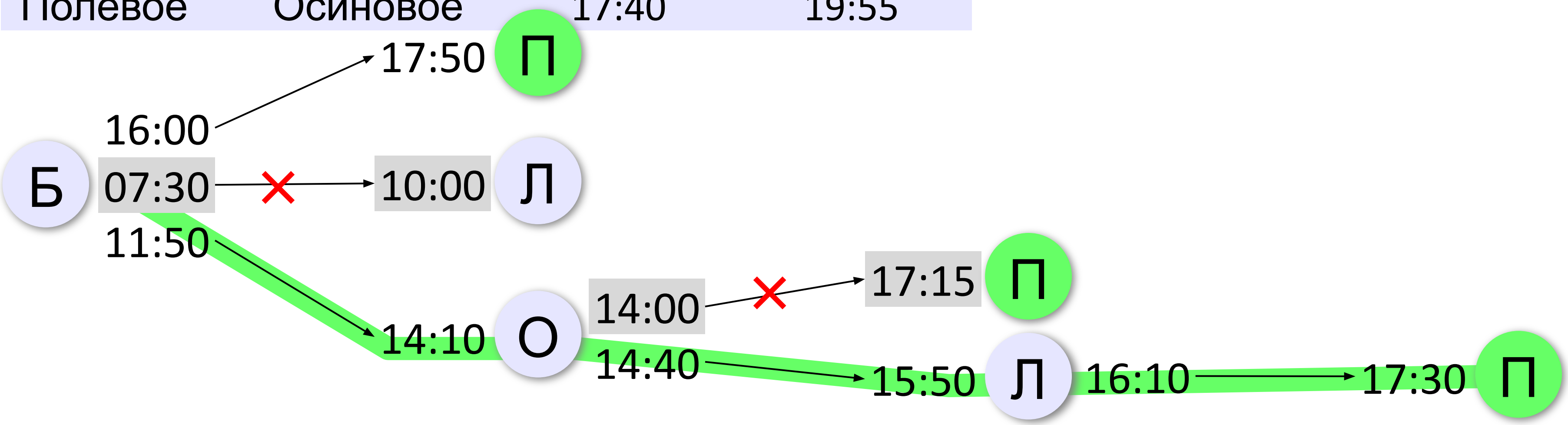
	Вася	Петя	Коля	Маша	Даша	Глаша
Москва	√				√	
Санкт-Петербург		√		√		
Пермь			√			√

Задача

Из	В	Отправл.	Прибытие
Березовое	Лесное	07:30	10:00
Березовое	Осиновое	11:50	14:10
Лесное	Березовое	12:50	15:20
Полевое	Лесное	13:20	14:40
Осиновое	Полевое	14:00	17:15
Лесное	Осиновое	14:20	15:30
Осиновое	Лесное	14:40	15:50
Березовое	Полевое	16:00	17:50
Лесное	Полевое	16:10	17:30
Полевое	Осиновое	17:40	19:55

Березовое: 8:00

Полевое



Задачи

Луковое (00:00) → **Васильево**

Из	В	Отправл.	Прибытие
Васильево	Панино	05:10	07:20
Панино	Луковое	09:15	11:20
Луковое	Панино	10:35	12:15
Санино	Васильево	11:05	13:10
Васильево	Луковое	11:35	15:20
Панино	Васильево	12:05	14:25
Луковое	Васильево	12:30	16:10
Луковое	Санино	14:20	16:00
Васильево	Санино	16:25	17:15
Санино	Луковое	18:30	20:40

Задачи

Сычёво (10:00) → **Рогатое**

Из	В	Отправл.	Прибытие
Сычево	Грибное	09:00	10:15
Мухино	Сычево	09:15	10:25
Рогатое	Сычево	10:10	12:25
Рогатое	Мухино	10:25	11:25
Сычево	Рогатое	10:30	13:00
Грибное	Рогатое	10:40	11:45
Сычево	Мухино	10:35	11:30
Грибное	Сычево	10:55	11:25
Мухино	Рогатое	11:50	12:50
Рогатое	Грибное	12:00	13:20

Задачи

Кунцево (00:00) → **Ручьи**

Из	В	Отправл.	Прибытие
Марьино	Кунцево	09:00	09:50
Кунцево	Борисово	09:55	11:00
Ручьи	Марьино	10:45	11:55
Ручьи	Кунцево	10:50	13:10
Ручьи	Борисово	10:55	12:00
Кунцево	Ручьи	11:00	13:20
Кунцево	Марьино	11:05	12:00
Борисово	Кунцево	11:20	12:25
Марьино	Ручьи	12:10	13:15
Борисово	Ручьи	12:25	13:25

Задачи

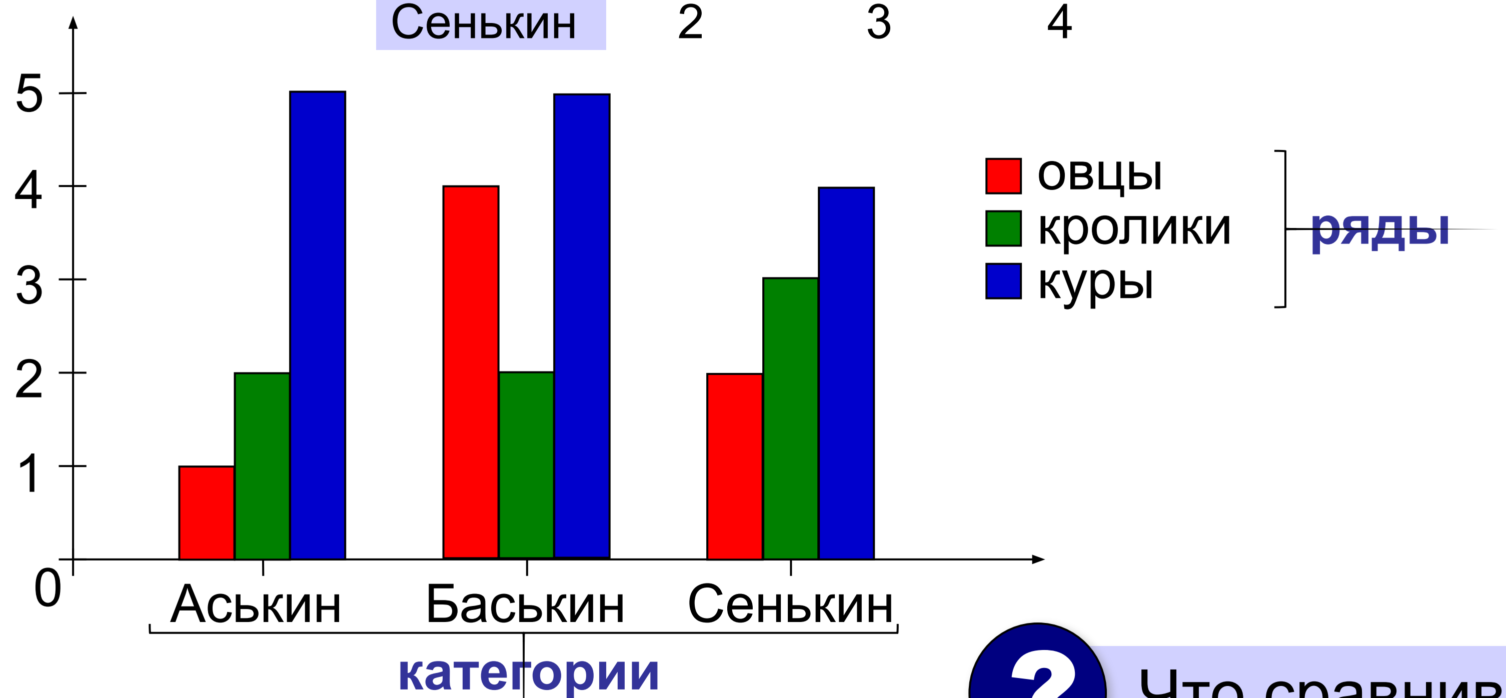
Моховое (00:00) → **Лесное**

Из	В	Отправл.	Прибытие
Моховое	Лесное	07:40	08:50
Озерное	Моховое	07:50	09:05
Лесное	Грибное	08:00	09:10
Лесное	Озерное	09:15	10:25
Моховое	Грибное	09:25	10:30
Моховое	Озерное	09:30	10:30
Лесное	Моховое	09:45	10:45
Грибное	Лесное	10:15	11:25
Озерное	Лесное	11:15	12:25
Грибное	Моховое	11:50	12:55

Диаграммы

Диаграмма – графическая модель, построенная по числовым данным.

	овцы	кролики	куры
Аськин	1	2	5
Баськин	4	2	5
Сенькин	2	3	4

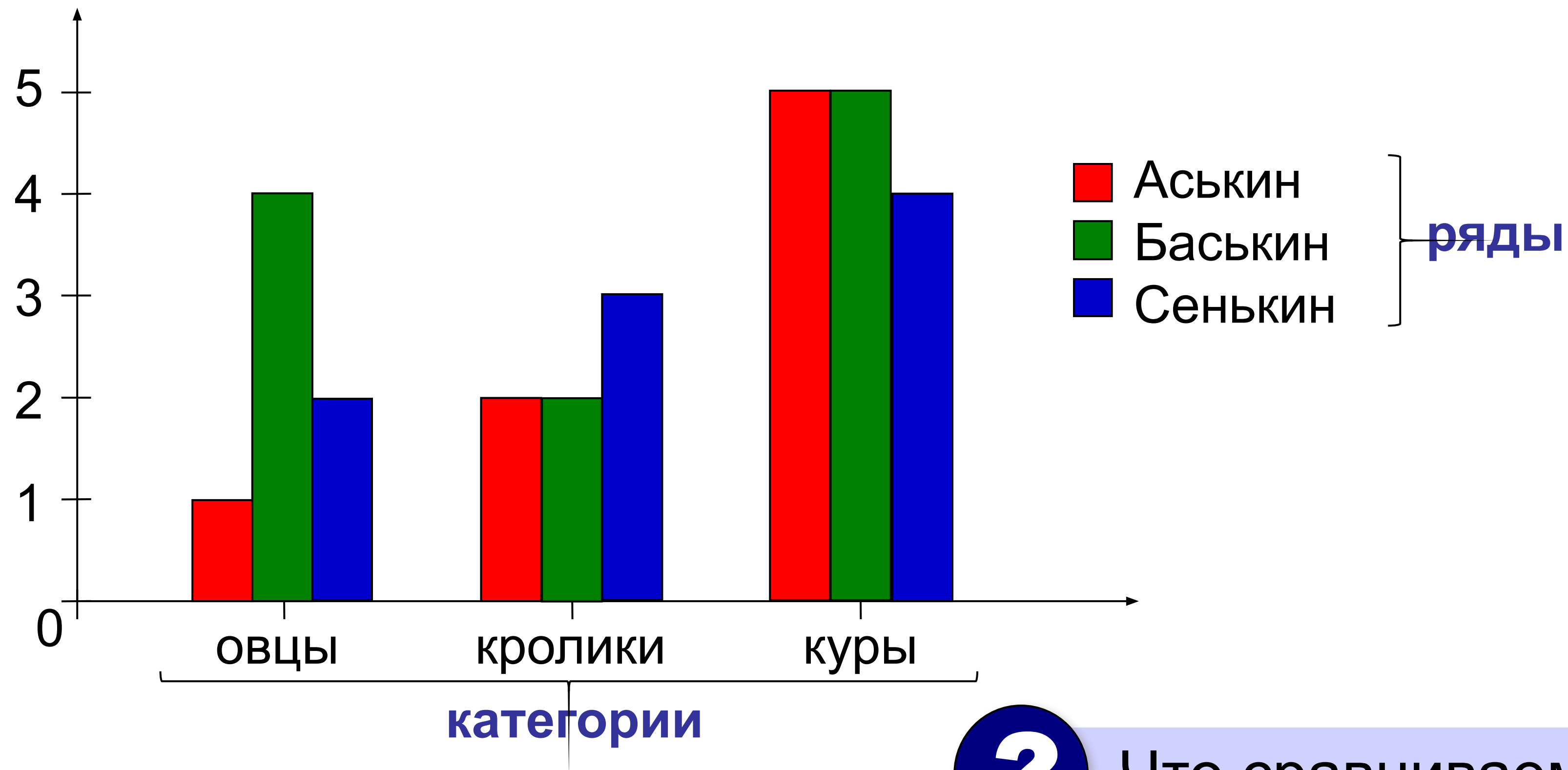


? Что сравниваем?

Диаграммы

	овцы	кролики	куры
Аськин	1	2	5
Баськин	4	2	5
Сенькин	2	3	4

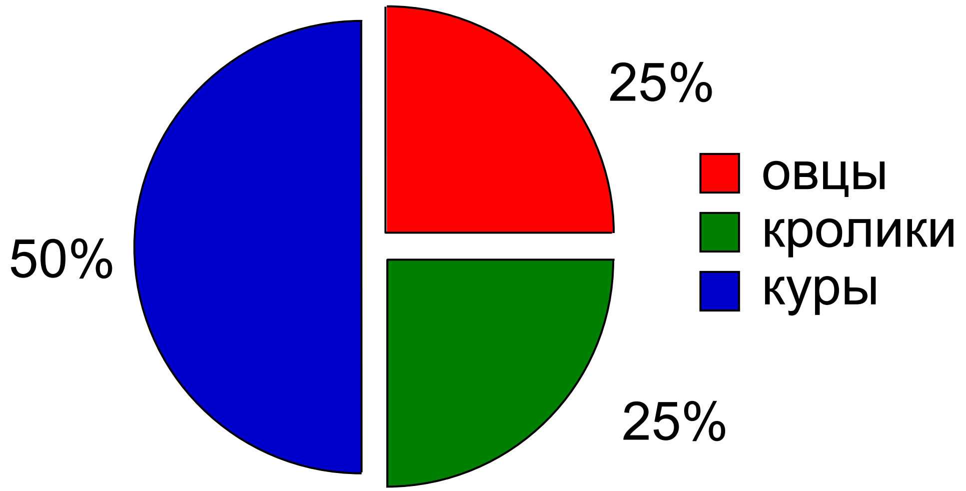
Какую диаграмму можно еще построить?



Что сравниваем?

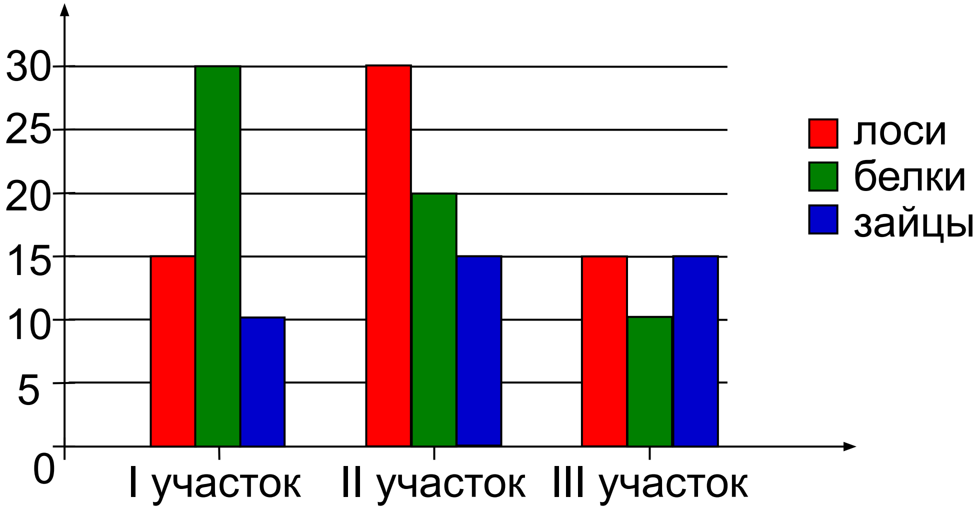
Круговые диаграммы

	овцы	кролики	куры
Аськин	1	2	5
Баськин	4	2	5
Сенькин	2	3	4
всего	**7**	**7**	**14**



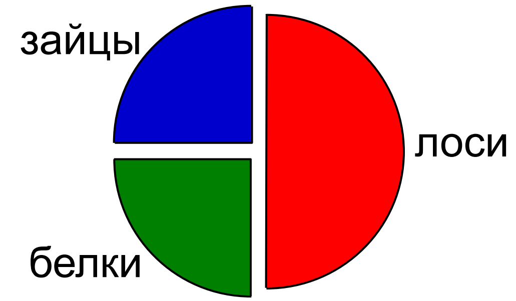
! Только итоги, исходные данные восстановить нельзя!

Задача

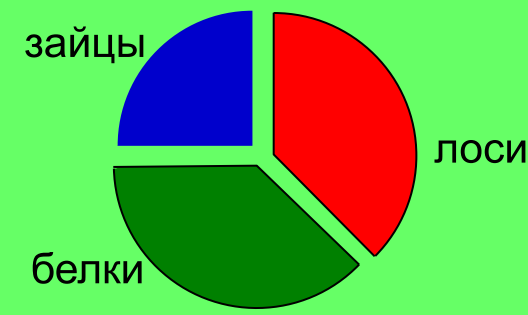


	I участок	II участок	III участок	всего
лоси	15	30	15	60
белки	30	20	10	60
зайцы	10	15	15	40
всего				160

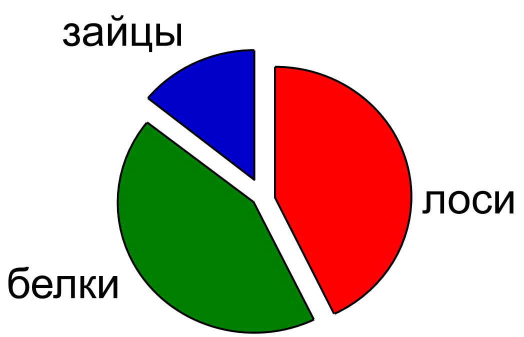
а)



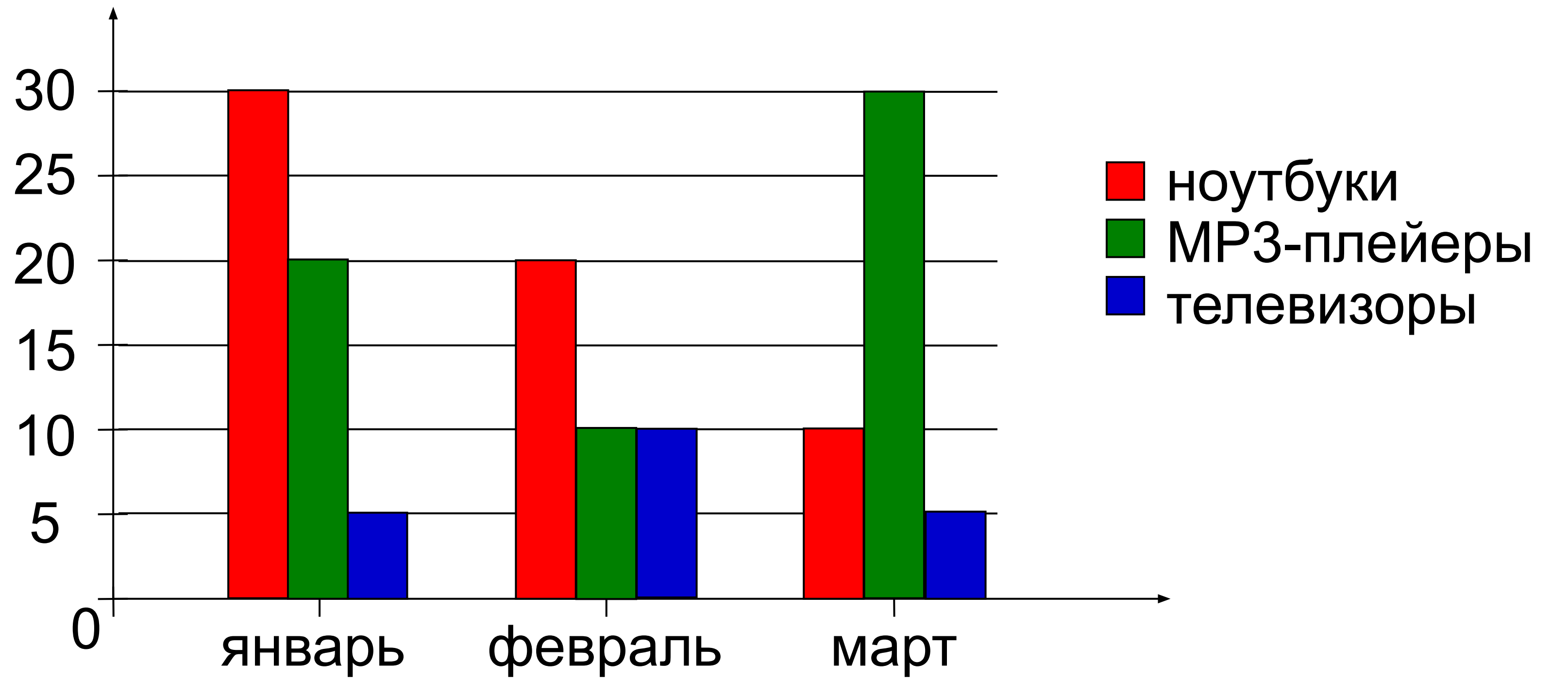
б)



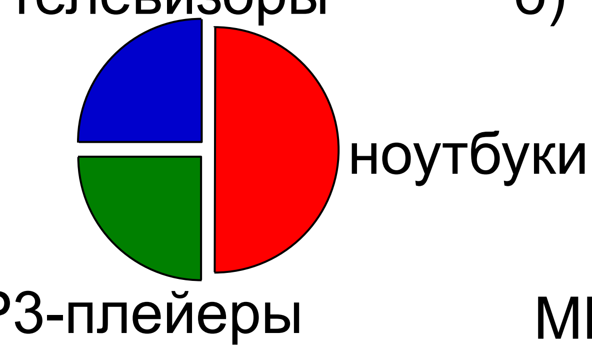
в)



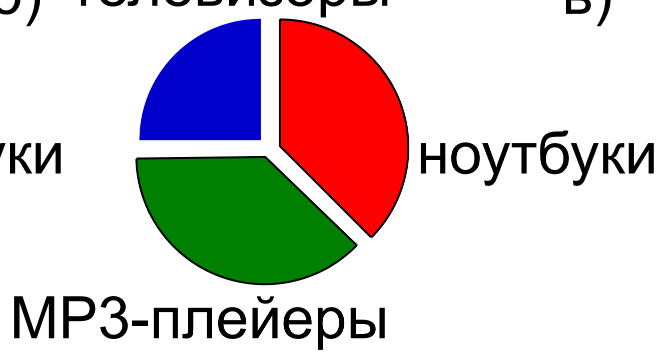
Задачи


30
25
20
15
10
5
0
январь
февраль
март
ноутбуки
MP3-плейеры
телевизоры

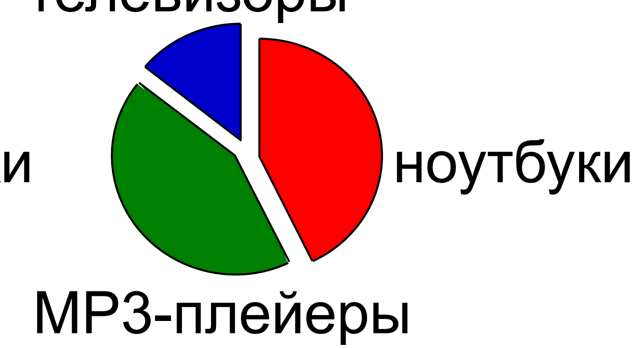
а)


телевизоры
ноутбуки
MP3-плейеры

б)

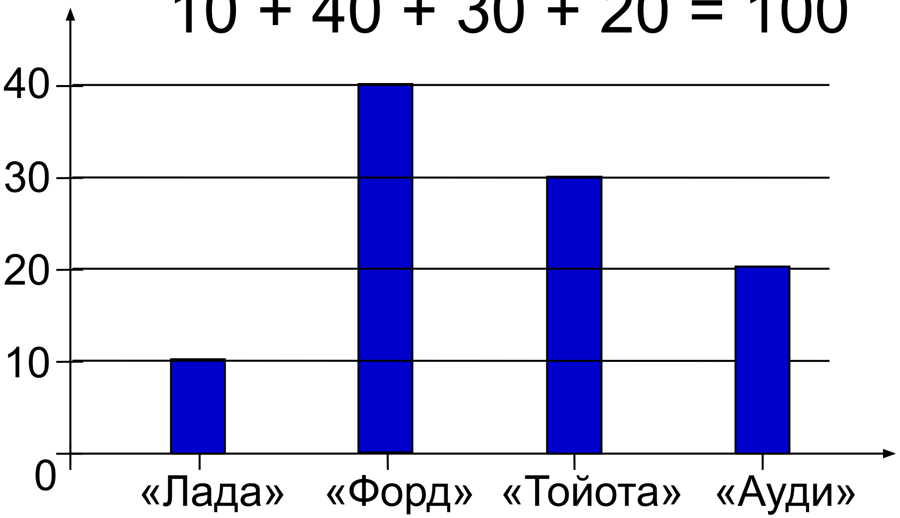

телевизоры
ноутбуки
MP3-плейеры

в)

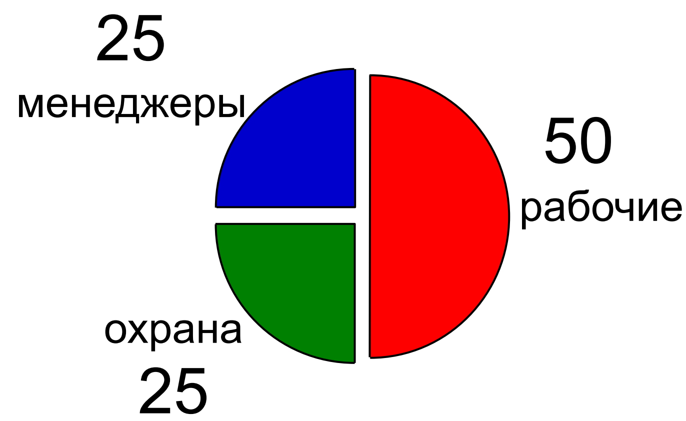

телевизоры
ноутбуки
MP3-плейеры

Задача

1) $10 + 40 + 30 + 20 = 100$



2)



а) ~~все «Форды» могут принадлежать менеджерам~~

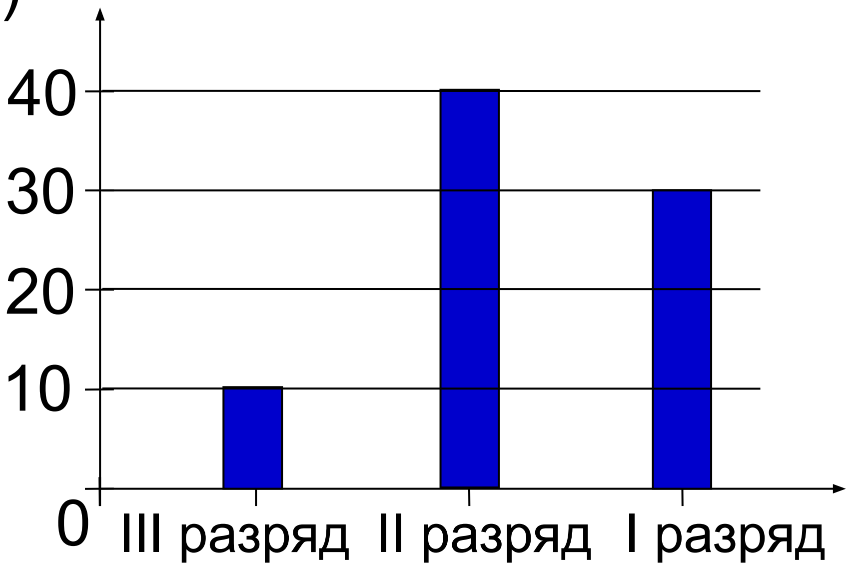
б) ~~все охранники могут ездить на «Ауди»~~

в) все «Тойоты» могут принадлежать рабочим

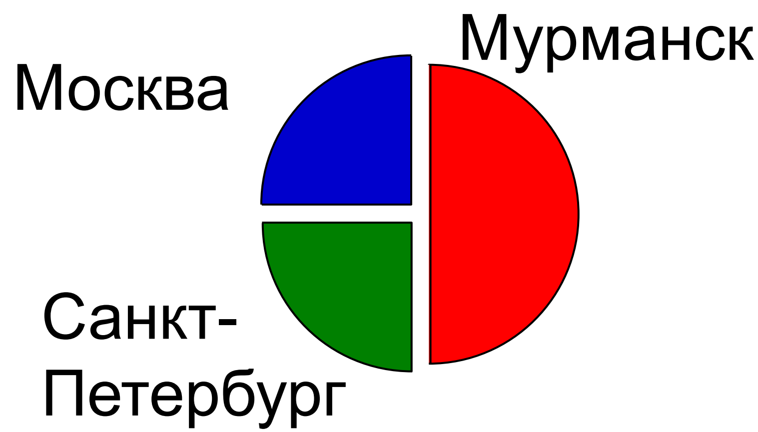
г) ~~все рабочие могут ездить на «Фордах»~~

Задачи

1)



2)



Какие утверждения следуют из анализа диаграмм:

а) все спортсмены, имеющие II разряд, могут быть москвичами

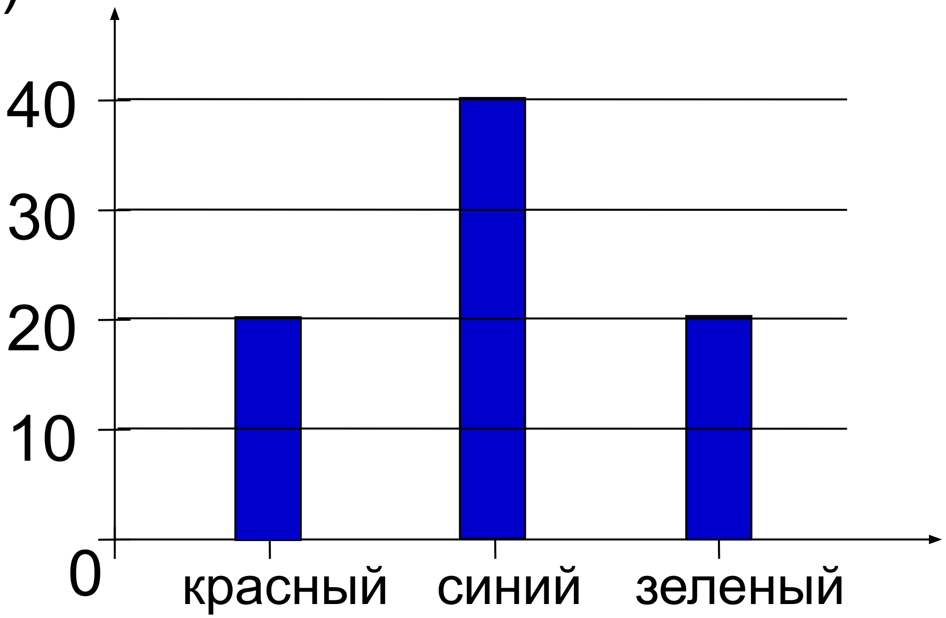
б) все спортсмены из Мурманска могут иметь II разряд

в) все спортсмены из Санкт-Петербурга могут иметь I разряд;

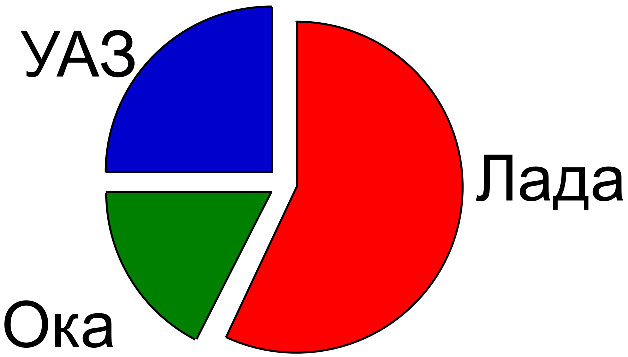
г) все спортсмены III разряда могут быть из Москвы

Задачи

1)



2)



Какие утверждения следуют из анализа диаграмм:

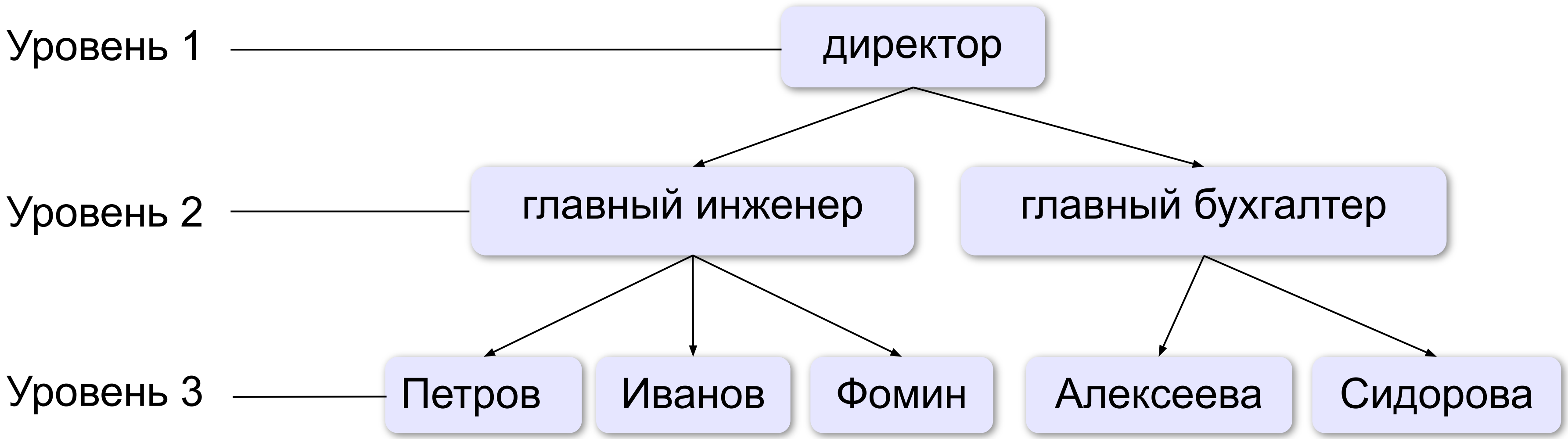
а) все автомобили «УАЗ» – зеленые

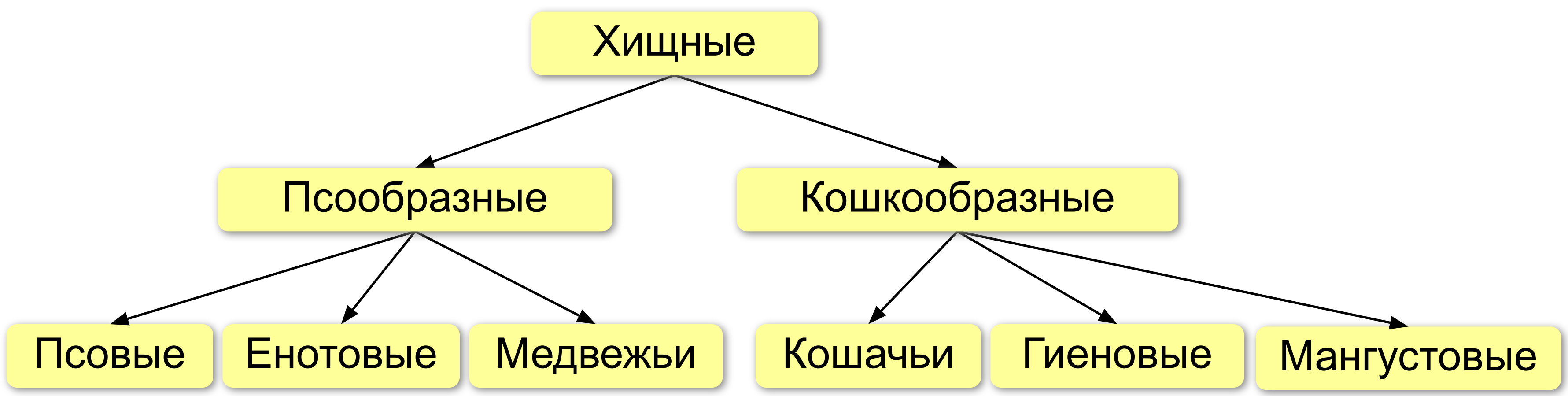
б) среди автомобилей «Ока» нет красных

в) все автомобили «Ока» – синие

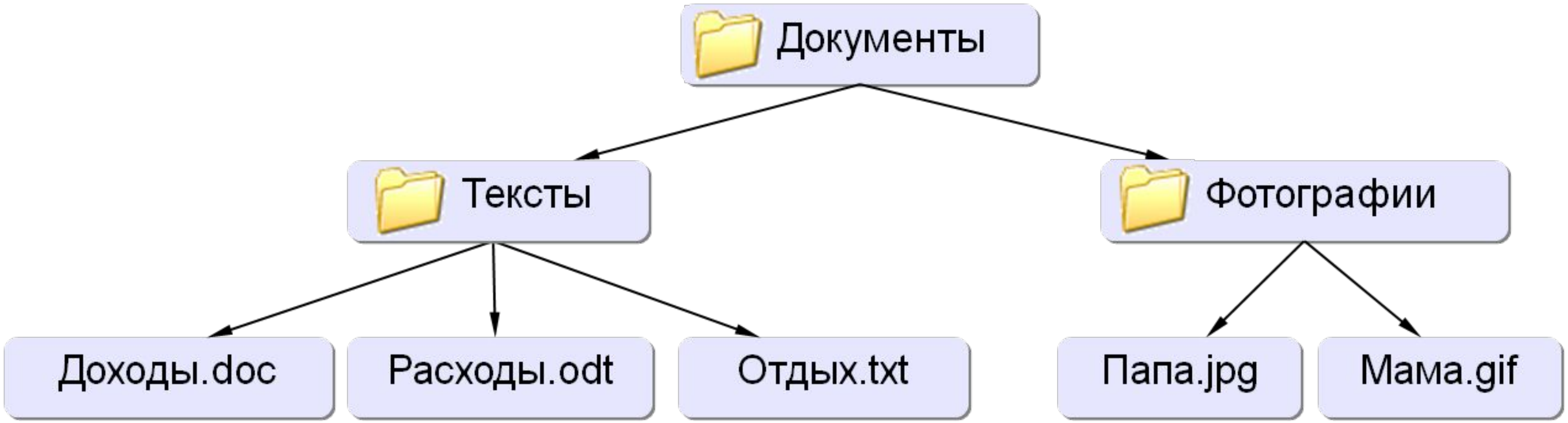
г) среди автомобилей «Лада» есть синие

Иерархические модели

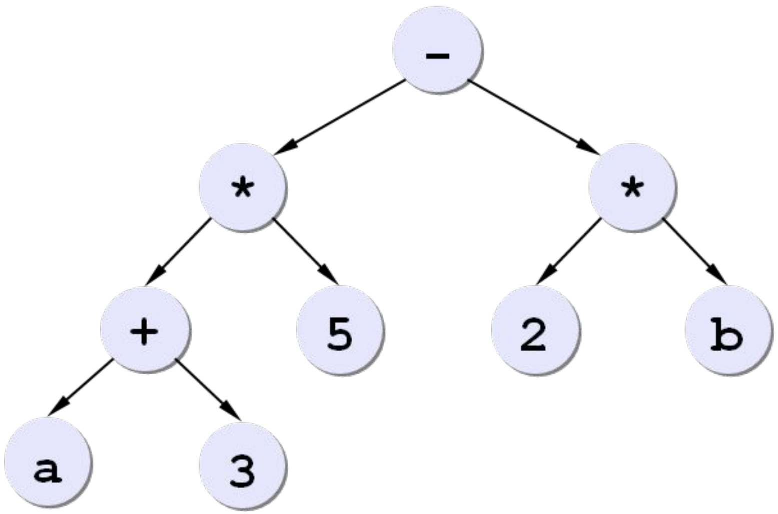




Иерархические модели

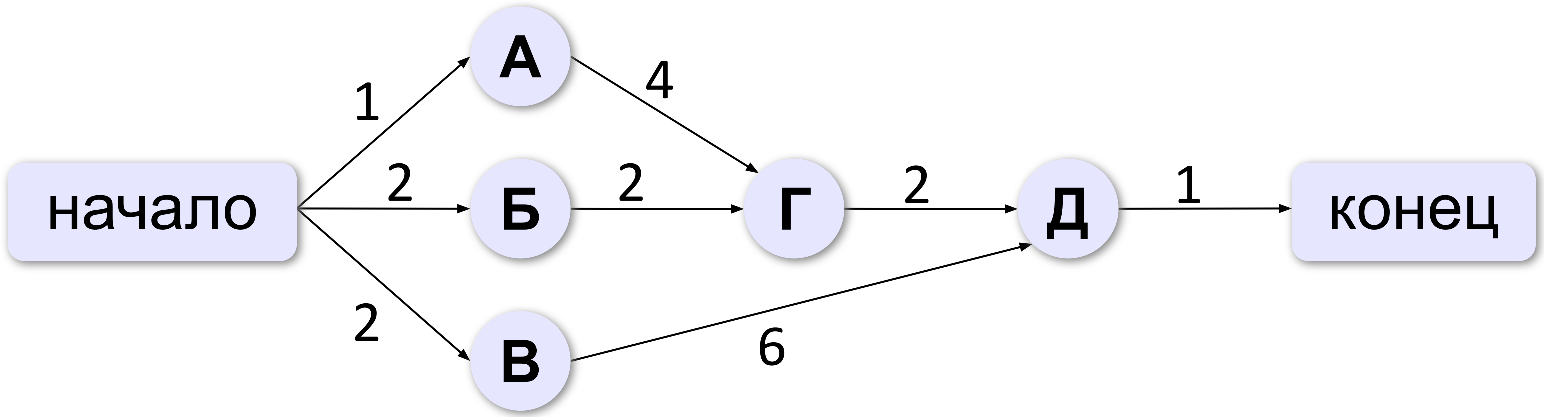


(a+3)*5-2*b

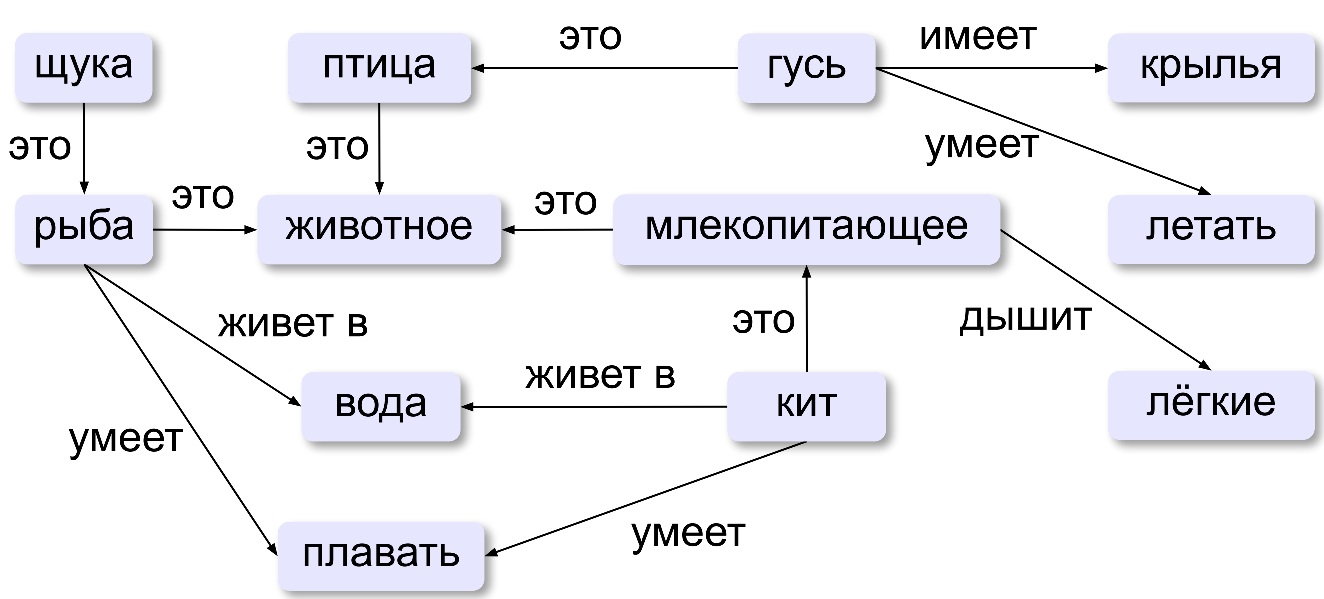


Сетевые модели

Сетевое планирование

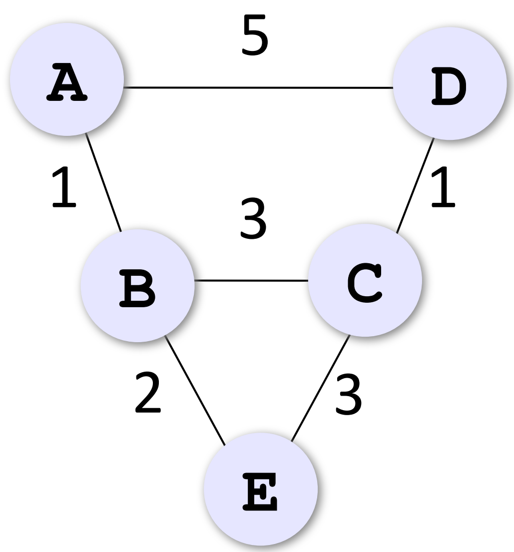


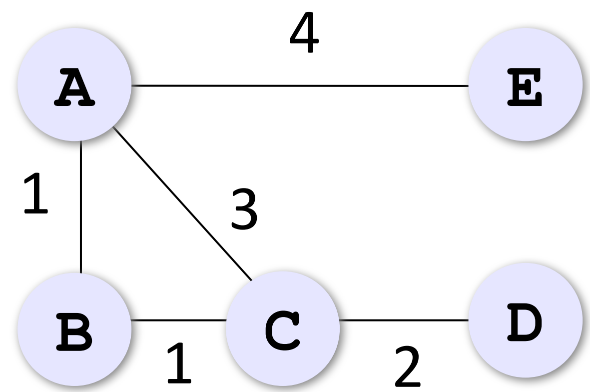
Семантические сети

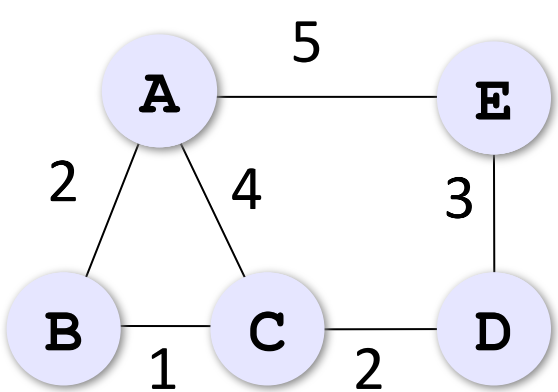


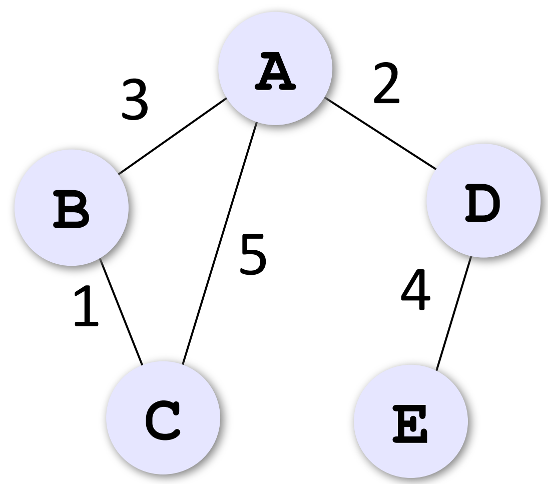
Задачи

Построить матрицы смежности и весовые матрицы.

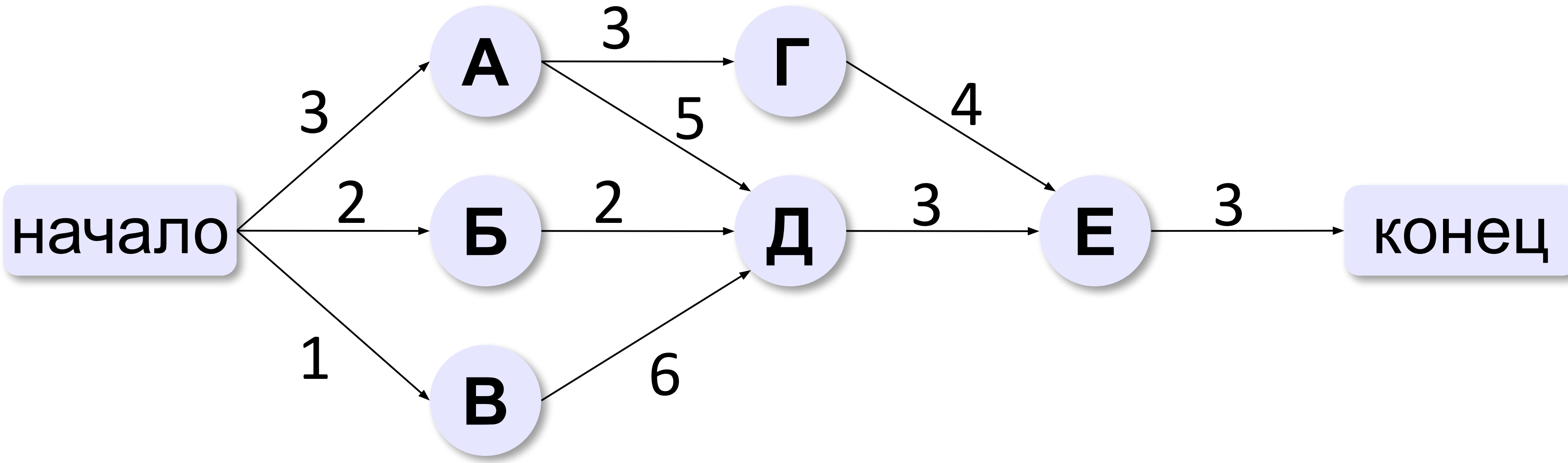








Задачи



Задача: определить срок изготовления прибора.

Игровые стратегии

? Какая задача?

Задача: найти **стратегию** (алгоритм игры), который позволит получить лучший результат, если соперники играют безошибочно.

Игры с полной информацией: можно определить, кто должен выиграть, по начальной позиции.

Позиции:

- **проигрышные** – все возможные ходы ведут в выигрышные позиции
- **выигрышные** – хотя бы один ход ведёт в проигрышную позицию

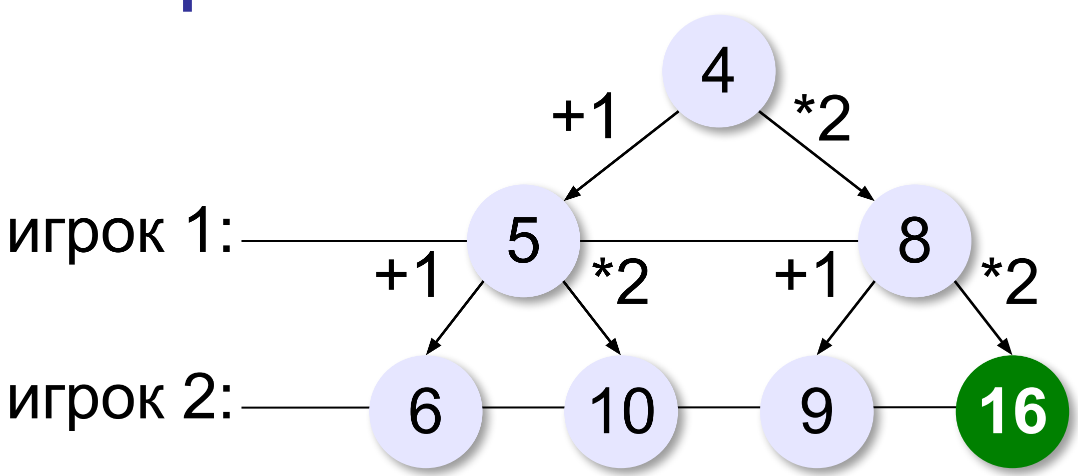
Задача

В начале игры S камней. Ходы: «+1» (добавить 1) и «*2» (удвоить). Выигрыш: получить ≥ 14 камней.

выигрыш за 1 ход

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	х$_3$	В$_3$	В$_2$	х$_2$	В$_2$	х$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$

Дерево игры:



Неполное дерево игры

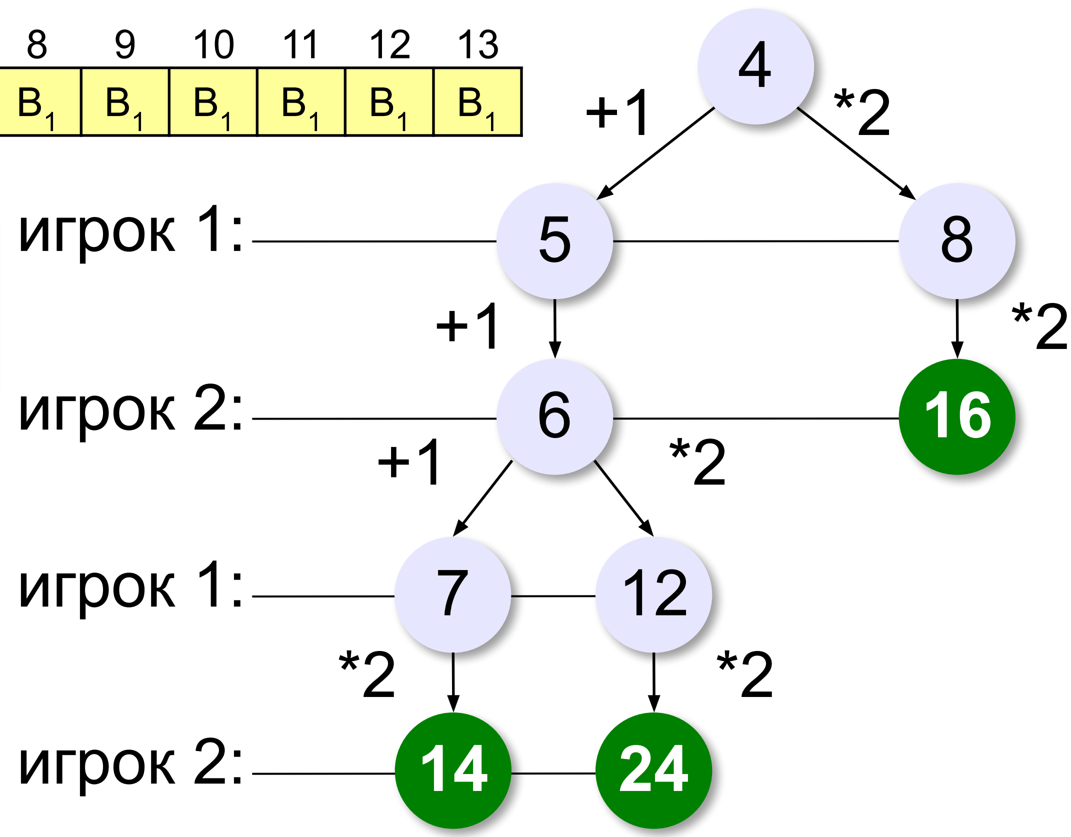
Задача: доказать выигрыш какого-то игрока.

Для победителя – только 1 **верный ход**, для проигравшего – **все возможные** ответы.

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	x_3	B_3	B_2	x_2	B_2	x_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1

? Какая стратегия у игрока 2?

переводить игру в проигрышную (для соперника) позицию



Задачи

1. В начале игры S камней. Ходы: «**+2**» (добавить 2) и «***2**» (удвоить). Выигрыш: получить ≥ **25** камней. Построить дерево игры для $S = 7$.
2. В начале игры S камней. Ходы: «**+1**» (добавить 1) и «***3**» (утроить). Выигрыш: получить ≥ **55** камней. Построить дерево игры для $S = 16$.
3. В начале игры S камней. Ходы: «**+2**» (добавить 2), «**+3**» (добавить 3) и «***2**» (удвоить). Выигрыш: получить ≥ **30** камней.
   Построить дерево игры для $S = 9$.
4. **Игра Баше.** В начале игры S ($S \le 15$) камней. Ходы: «**-1**» (взять 2), «**-2**» (взять 2) и «**-3**» (взять 3). Проигрыш: взять последний камень.
   Построить дерево игры для $S = 12$.

Моделирование

§ 8. Этапы моделирования

I. Постановка задачи

- **исследование оригинала**
  изучение сущности объекта или явления
- **анализ («что будет, если …»)**
  научиться прогнозировать последствий при различных воздействиях на оригинал
- **синтез («как сделать, чтобы …»)**
  научиться управлять оригиналом, оказывая на него воздействия
- **оптимизация («как сделать лучше»)**
  выбор наилучшего решения в заданных условиях

! Ошибки при постановке задачи приводят к наиболее тяжелым последствиям!

I. Постановка задачи

Хорошо поставленная задача:

- описаны все связи между исходными данными и результатом
- известны все исходные данные
- решение существует
- задача имеет единственное решение

Примеры плохо поставленных задач:

- Уроки в школе начинаются в 8^{30}. В 10^{00} к школе подъехал красный автомобиль. Определите, когда Вася выйдет играть в футбол?
- Вася бросает мяч со скоростью 12 м/с. Где мяч впервые ударится о землю?
- Решить уравнение $\sin x = 4$ (нет решений).
- Найти функцию, которая проходит через точки (0,1) и (1,0) (бесконечно много решений).

I. Постановка задачи (пример)

Спортсмен Вася в синей кепке бросает белый мяч со скоростью 12 м/с. Под каким углом к горизонту ему нужно бросить мяч, чтобы попасть в желтую мишень?

? Хорошо поставлена?

Допущения:

Мишень расположена на высоте 4 м на расстоянии 10 м от Васи. В момент броска мяч находится на высоте 2 м от земли.

? Всегда ли есть решение?

? Решение единственно?

II. Разработка модели

бросает мяч со скоростью 12 м/с. Под каким углом к горизонту ему нужно бросить мяч, чтобы попасть в мишень? Мишень расположена на высоте 4 м на расстоянии 10 м . В момент броска мяч находится на высоте 2 м от земли.

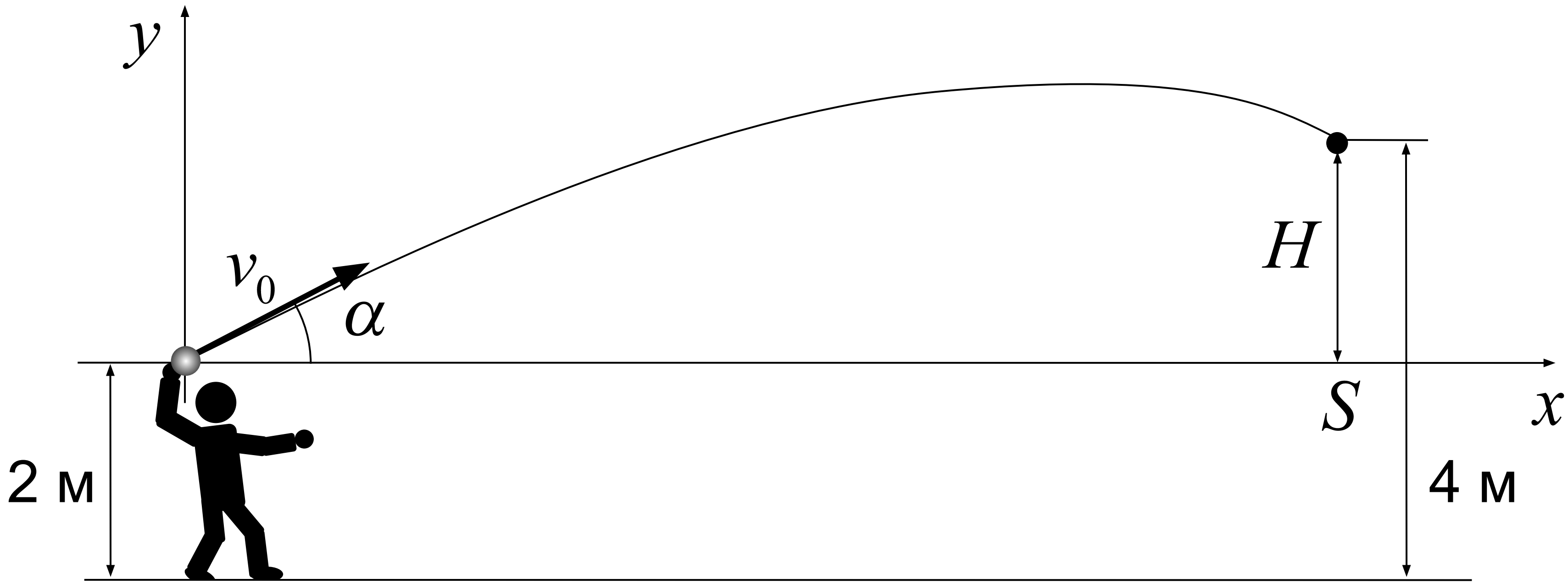
1) Определить **существенные** исходные данные.
- мяч и мишень — материальные точки
- мишень неподвижна
- сопротивление воздуха не учитывается.

2) Выбор **типа модели**.

! Можно использовать несколько моделей!

II. Разработка модели

Графическая модель

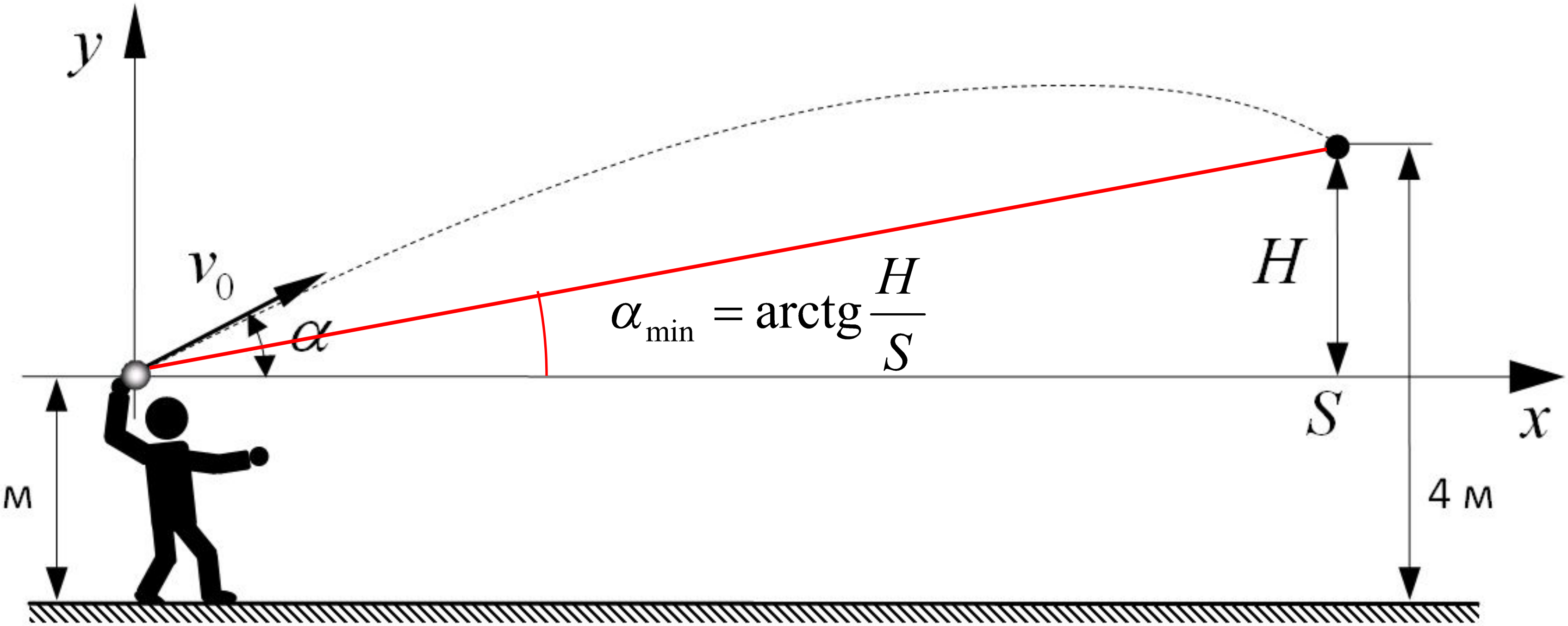


3) **Формальная (математическая) модель**

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha, \quad y = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Задача: найти t и α, такие что $x = S,\ y = H$

Уточнение диапазона углов



Диапазон углов для поиска: $\left[\operatorname{arctg}\dfrac{H}{S} \ldots \dfrac{\pi}{2}\right]$

II. Разработка модели

4) Алгоритм моделирования

Метод I.

Меняем угол α. Для выбранного угла α строим траекторию полета мяча. Если она проходит выше мишени, уменьшаем угол, если ниже – увеличиваем.

Метод II.

Из первого равенства выражаем время полета:

$$v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t = S \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{S}{v_0 \cdot \cos\alpha}$$

Меняем угол α. Для выбранного угла α считаем t, а затем – значение y при этом t. Если оно больше H, уменьшаем угол, если меньше – увеличиваем.

➕ не надо строить всю траекторию для каждого α

II. Разработка модели

5) **Компьютерная модель**

- программа (Паскаль, Си, …)
- электронные таблицы (*Excel*, *OpenOffice.org Calc*)
- среды моделирования *(Simulink*, *VisSim)*

III. Тестирование модели

Тестирование – это проверка модели на простых исходных данных с известным результатом.

а) тестирование **математической модели**:

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha, \quad y = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

- при $t = 0 \;\Rightarrow\; x = 0, y = 0$ (в начале координат)
- при $v_0 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0, \; y = -\frac{gt^2}{2}$ (падение вниз)
- при $\alpha = 90° \;\Rightarrow\; x = 0$
- при увеличении t парабола «загибается» вниз

б) тестирование **компьютерной модели**:
(пробные расчёты в рассмотренных условиях)

? Доказывает ли успешное тестирование правильность модели?

IV. Эксперимент с моделью

Эксперимент – это исследование модели при тех исходных данных, которые нас интересуют (результат заранее неизвестен).

1) задаём угол α
2) находим время $t = \dfrac{S}{v_0 \cdot \cos\alpha}$
3) находим высоту

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

! Может быть два решения!

$y < H$

Диапазон углов для поиска: $\left[\operatorname{arctg}\dfrac{H}{S} \ldots \dfrac{\pi}{2}\right]$

? Можно ли сразу использовать двоичный поиск?

? Как отделить два решения?

построить график y(α)

V. Анализ результатов эксперимента

! Необходима проверка на оригинале!

Возможные выводы:

- задача решена, модель адекватна
- необходимо изменить алгоритм или условия моделирования
- необходимо изменить модель (учесть дополнительные свойства)
- необходимо изменить постановку задачи

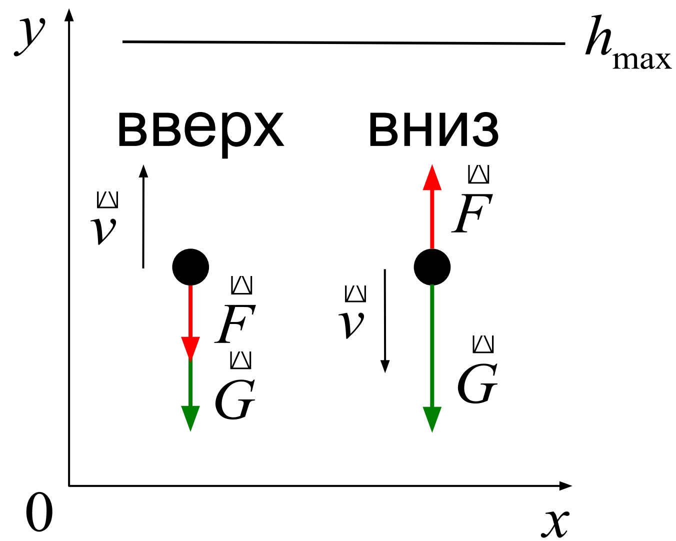
V. Анализ результатов

- всегда ли Вася сможет попасть в мишень?
- если начальная скорость отличается от заданной?
- если мяч и мишень не считать материальными точками?
- как сильно влияет сопротивление воздуха?
- если мишень качается?
- и т.д.…

Моделирование

§ 9. Моделирование движения

Задача



- найти h_{max}
- найти v при приземлении

? Какой тип движения?

равномерное?
равноускоренное?

плотность воздуха $\rho = 1{,}23$ кг/м³

? Какая ещё сила?

$$G = m \cdot g$$

не меняется!

$$F = \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot C \cdot S$$

площадь сечения

шар: $C = 0{,}4$

$$S = \pi \cdot r^2$$

Математическая модель

В проекции на ось OY:

всегда противоположна v

$$G = -m \cdot g \qquad F = -\frac{\rho \cdot |v| \cdot v}{2} \cdot C \cdot S$$

$$a = \frac{G + F}{m}$$

! Силы меняются ⇒ ускорение меняется!

Методы решения:

- аналитический (высшая математика)
- численное моделирование

Дискретизация

Дискретная модель описывает состояние системы при

$$t = 0, \delta, 2\delta, 3\delta, \ldots$$

шаг дискретизации

Задача: зная (y_i, v_i, a_i) при $t_i = i \cdot \delta$
найти (y_{i+1}, v_{i+1}, a_{i+1}) при $t_{i+1} = (i+1) \cdot \delta$

Допущение: силы (и ускорение) не меняются на интервале $[t_i, t_{i+1}]$

Вычисления:

$$F_i = -\frac{\rho \left|v_i\right| v_i}{2} \cdot C \cdot S \qquad a_i = \frac{G + F_i}{m} = -g + \frac{F_i}{m}$$

$$v_{i+1} = v_i + a_i \cdot \delta \qquad y_{i+1} = y_i + v_i \cdot \delta + \frac{a_i \cdot \delta^2}{2}$$

Компьютерная модель

```
t:= 0; v:= v0; y:= 0
k:= ro*C*S/2
нц пока y >= 0
  F:= - k*abs(v)*v  | сила сопротивления
  a:= - g + F/m     | ускорение
  y:= y + v*delta + a*delta*delta/2 | координата
  v:= v + a*delta   | скорость
  t:= t + delta     | время
кц
```

? Как найти h_{max}?

```
если y > h то
  h:= y
все
```

Моделирование

§ 10. Математические модели в биологии

Модель неограниченного роста (Т. Мальтус)

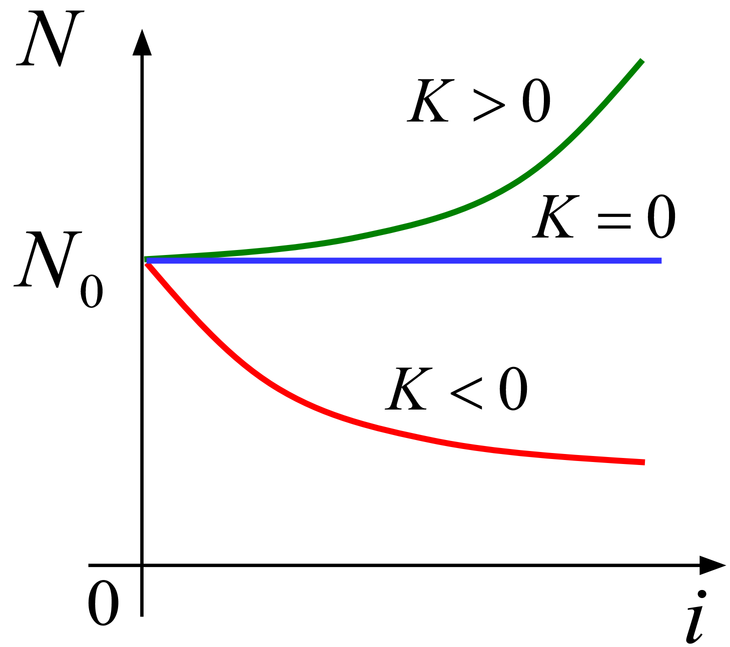
N_0 – начальная численность

N_i – численность через i периодов

рождаемость смертность

$$N_{i+1} = N_i + k_p \cdot N_i - k_c \cdot N_i$$

$$\boxed{N_{i+1} = (1+K) \cdot N_i} \qquad K = k_p - k_c$$



Особенности модели:

1) не учитывается влияние численности N и внешней среды на K
2) не учитывается влияние других видов на K

Модель ограниченного роста (П. Ферхюльст)

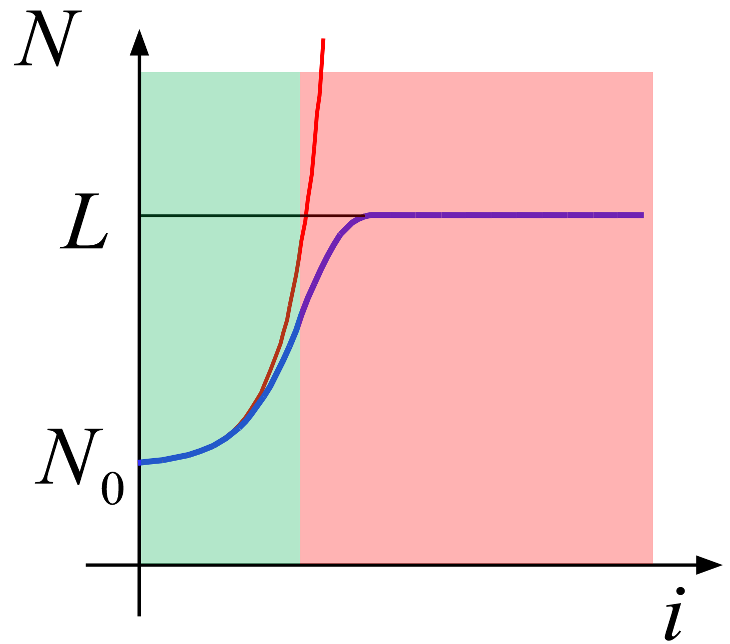
L – предельная численность животных

$$N_{i+1} = (1 + K_L) \cdot N_i$$

Идеи:

1) коэффициент прироста K_L зависит от численности N
2) при $N=0$ должно быть $K_L=K$ (начальное значение)
3) при $N=L$ должно быть $K_L=0$ (достигнут предел)

$$N_{i+1} = \left(1 + K \cdot \frac{L - N_i}{L}\right) \cdot N_i$$



! Модель адекватна, если ошибка < 10%!

Модель с отловом

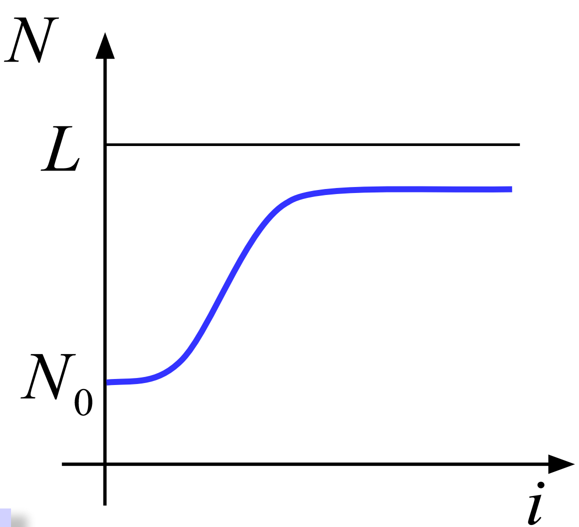
рыбоводческое хозяйство, разведение пушных зверей, …

$$N_{i+1} = \left(1 + K \cdot \frac{L - N_i}{L}\right) \cdot N_i - R$$

отлов

? Какая будет численность? L?

$N_i = N_{i-1}$, прирост = отлову



$$N = N + K\frac{L-N}{L}N - R$$

$$\Rightarrow \frac{K}{L} \cdot N^2 - K \cdot N + R = 0$$

? Сколько можно вылавливать?

Модель «хищник-жертва»

Модель – не-система:

 караси

 щуки

$$N_{i+1} = \left(1 + K\frac{L - N_i}{L}\right) \cdot N_i$$

$$Z_{i+1} = (1 - D) \cdot Z_i$$

вымирают без еды

Модель – система:

1) число встреч пропорционально $N_i \cdot Z_i$
2) «эффект» пропорционален числу встреч

численность уменьшается

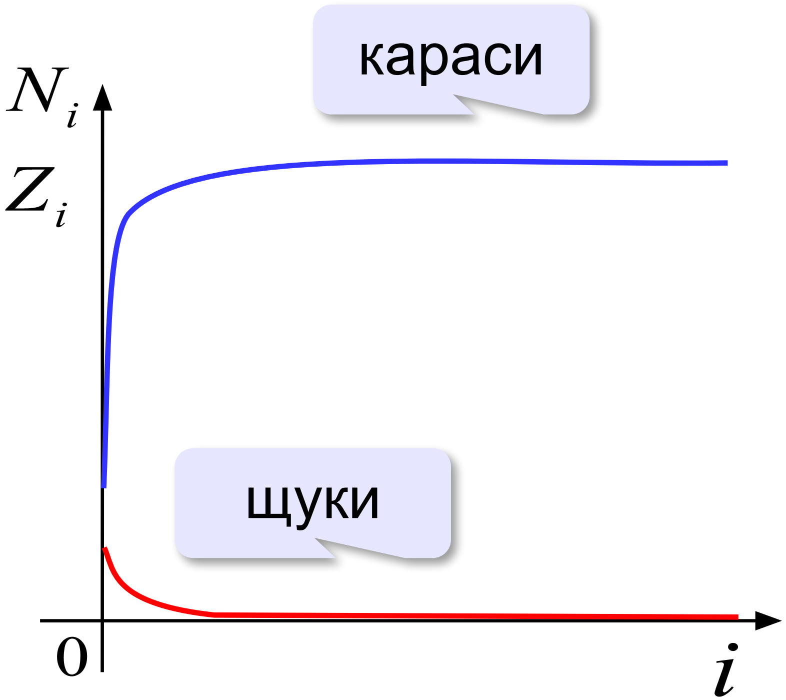
$$N_{i+1} = (1 + K_L \boxed{- b_N Z_i}) \cdot N_i$$

$$Z_{i+1} = (1 - D \boxed{+ b_Z N_i}) \cdot Z_i$$

численность увеличивается

Модель «хищник-жертва»

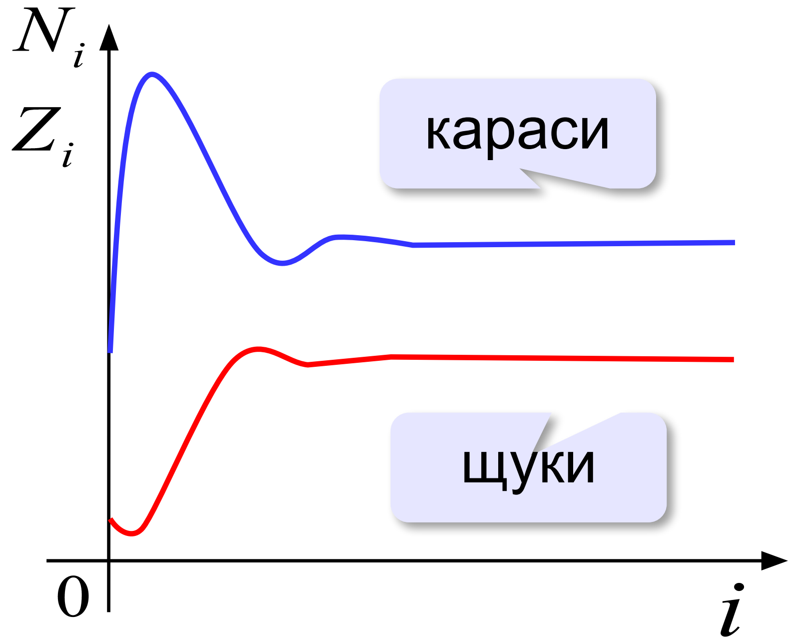
Хищники вымирают:



$$D = 0,8$$

$$b_N = b_Z = 0,005$$

Равновесие:

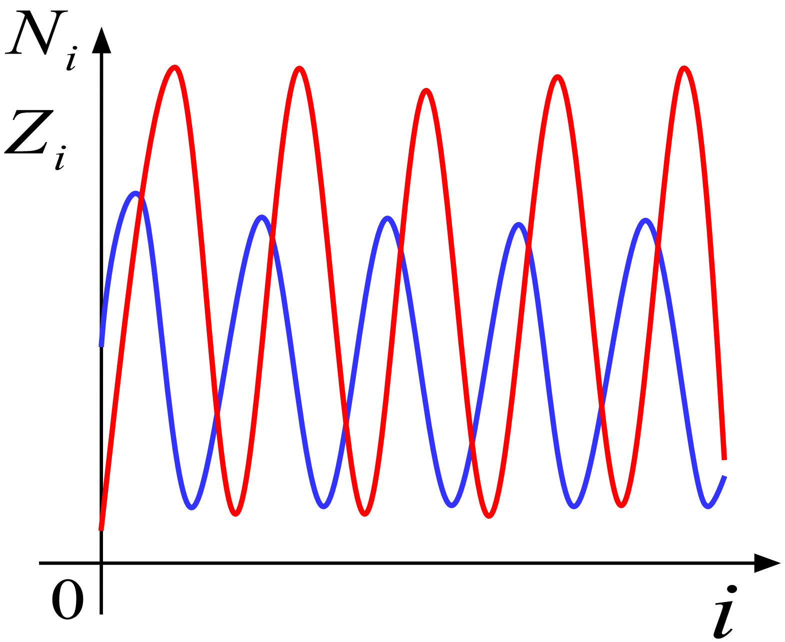


$$D = 0,8$$

$$b_N = 0,01; \quad b_Z = 0,012$$

Модель «хищник-жертва»

Колебания:



$$D = 0{,}8$$

$$b_N = 0{,}01; \;\; b_Z = 0{,}015$$

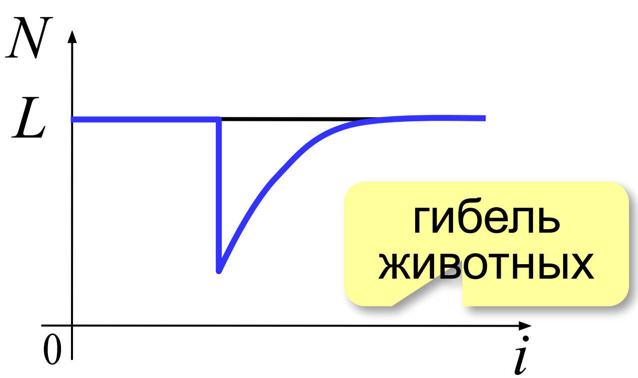
Обратная связь

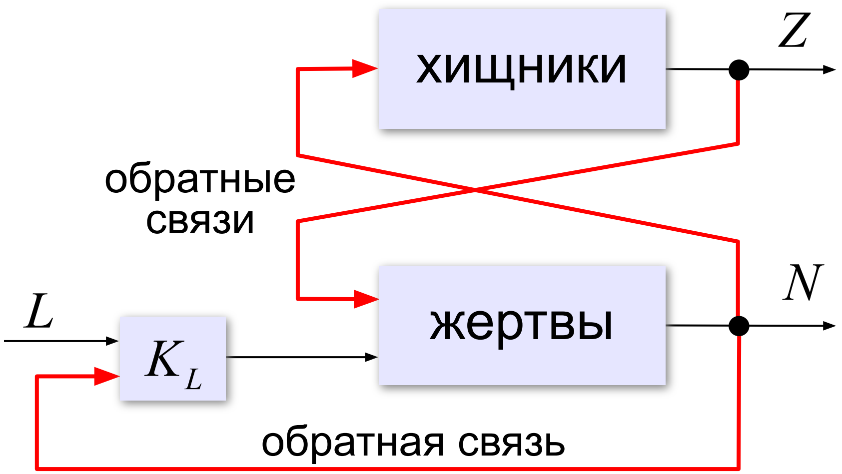
Модель неограниченного роста:

Модель ограниченного роста:

Саморегуляция

Саморегуляция – это способность системы поддерживать свое внутреннее состояние за счет связей между элементами.





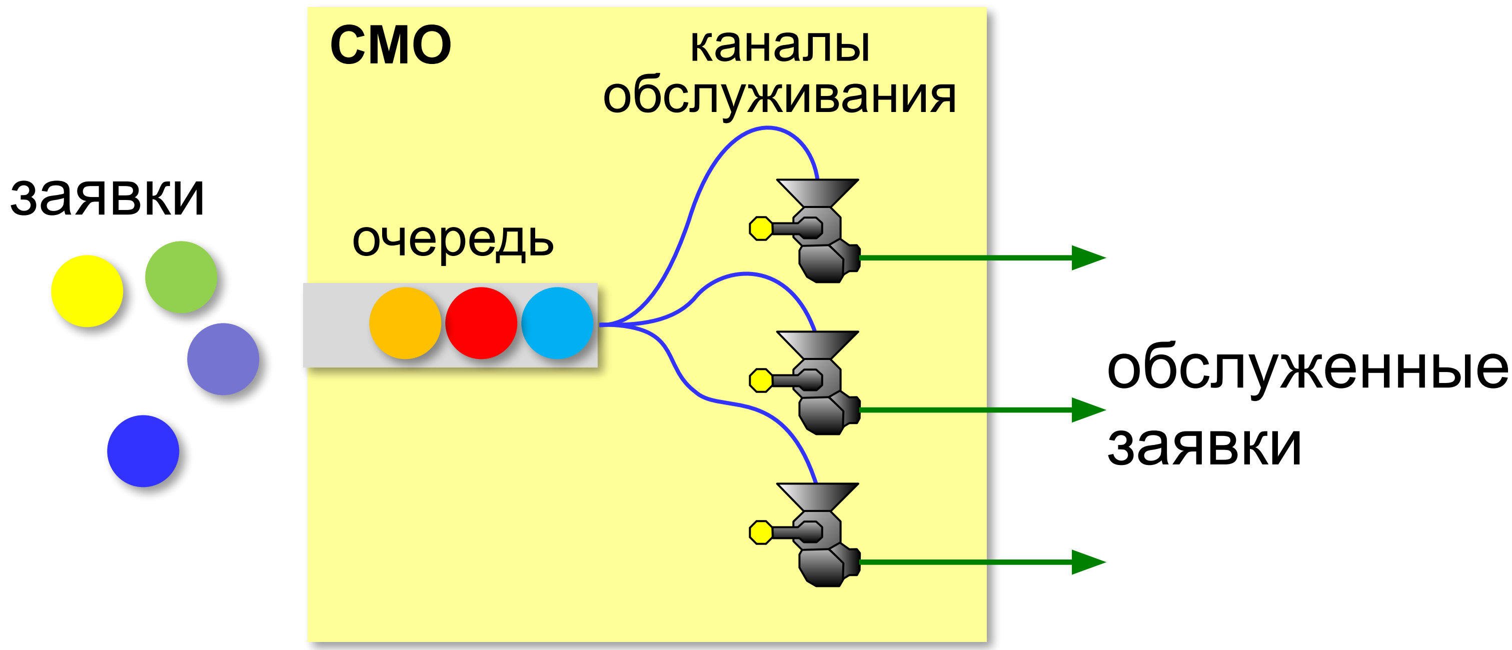
! Саморегуляция только при малых отклонениях!

Моделирование

§ 11. Системы массового обслуживания

Системы массового обслуживания (СМО)

магазин, банк, служба ремонта, касса…



Особенности:

- заявки поступают через случайные интервалы
- время обслуживания – случайная величина

! Нужна вероятностная модель!

Модель работы банка

Детерминированная модель:

- за 1 минуту входит P клиентов
- время обслуживания T минут

$$K \geq P \cdot T$$

? Сколько нужно касс?

Вероятностная модель:

- K – количество касс
- за 1 минуту входит от 0 до $P_{\max}$ клиентов
- время обслуживания от $T_{\min}$ до $T_{\max}$ минут
- изменение числа клиентов в банке

Допущение: распределение **равномерное**

$$N_{i+1} = N_i + P_i - R_i$$

вошли за i-ую минуту

обслужены за i-ую минуту

- средняя длина очереди $Q_i = \dfrac{N_i}{K}$
- среднее время ожидания $Q_i \cdot T_i$

Модель работы банка

Как найти R_i?

Допущение:

K касс работают с одинаковой скоростью, но эта скорость меняется каждый интервал

T_i – случайное время обслуживания (от $T_{\min}$ до $T_{\max}$)

обслужено за 1 интервал на 1 кассе $1/T$,

на всех кассах

$$R_i = \frac{K}{T_i}$$

Задача: выбрать K так, чтобы среднее время ожидания было больше допустимого в течение не более 5% от полного времени моделирования.

«плохие минуты»: $Q_i \cdot T_i = \dfrac{N_i}{K} \cdot T_i > M$

допустимое время ожидания

Модель работы банка

```
K:= 2        | меняем количество касс
Pmax:= 4     | макс. число входящих за 1 мин
Tmin:= 1     | мин. время обслуживания
Tmax:= 9     | макс. время обслуживания
L:= 480      | период моделирования
M:= 15       | допустимое время ожидания
N:= 0        | сначала в банке никого нет
count:= 0    | счетчик «плохих» минут
```

? Что выводить в результате?

$$\frac{count}{L} < 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad \text{касс достаточно}$$

! Сравнить с детерминированной моделью!

Модель работы банка (КуМир)

```
нц для i от 1 до L
  P:= irand(0,PMax)
  T:= rand(Tmin,Tmax)
  R:= int(K / T)
  N:= N + P - R
  если N < 0 то N:= 0 все
  dT:= N / K * T
  если dT > M то
    count:= count + 1
  все
кц
```

→Паскаль

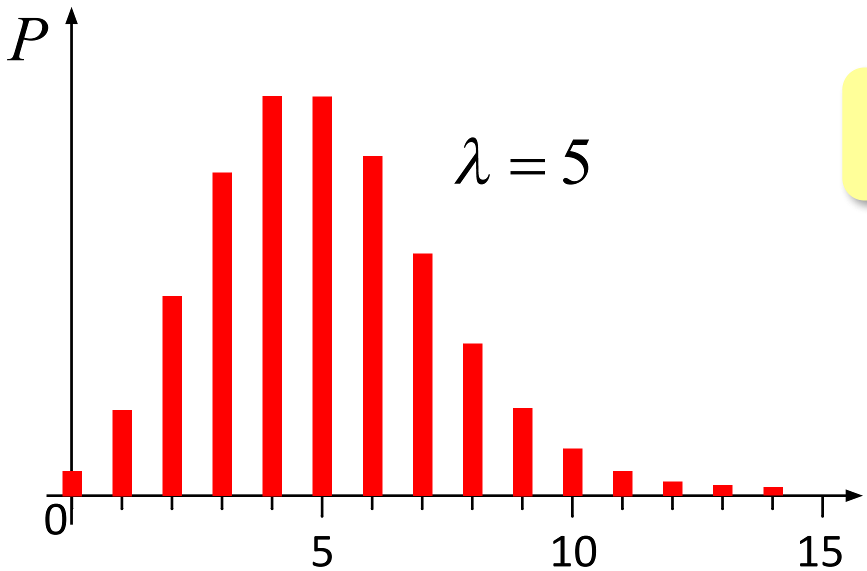
Модель работы банка (Паскаль)

```
for i:=1 to L do begin
  P:= random(PMax);
  T:= Tmin + random*(Tmax - Tmin);
  R:= round(K / T);
  N:= N + P - R;
  if N < 0 then N:= 0;
  dT:= N / K * T;
  if dT > M then
    count:= count + 1
end;
```

Уточнение модели

- за 1 минуту входит от 0 до $P_{\max}$ клиентов

Распределение Пуассона:



Допущение: распределение ~~**равномерное**~~

вероятность того, что $P = k$

$P_{\text{среднее}}$

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

Получение из равномерного распределения:

метод обратных функций

Распределение Пуассона (КуМир)

```
алг цел Poisson(цел Lam)
нач
  вещ s, r, alpha;
  цел k
  r:=exp(-Lam); s:=r
  k:=0
  alpha:=rand(0,1)
  нц пока s<alpha
    k:=k+1
    r:=r*Lam/k
    s:=s+r
  кц
  знач:=k
кон
```

Распределение Пуассона (Паскаль)

```
function Poisson(Lam: integer): integer;
var s, r, alpha: real;
    k: integer;
begin
  r:=exp(-Lam); s:=r;
  k:=0;
  alpha:=random;
  while s<alpha do begin
    k:=k+1;
    r:=r*Lam/k;
    s:=s+r
  end;
  Poisson:=k
end;
```

Конец фильма

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич
д.т.н., учитель информатики
ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург
kpolyakov@mail.ru

ЕРЕМИН Евгений Александрович
к.ф.-м.н., доцент кафедры мультимедийной дидактики и ИТО ПГГПУ, г. Пермь
eremin@pspu.ac.ru

Источники иллюстраций

1. www.historicships.com
2. www.amazon.co.uk
3. www.supahcars.com
4. physicon.ru
5. www.laerdal.com
6. biohimija.ru
7. ecosafe.spbu.ru
8. www.skyplaz.ru
9. www.burpipe.ru
10. www.garshin.ru
11. www.thisnext.com
12. 3dsdesign.ru
13. en.wikipedia.org
14. ru.wikipedia.org
15. иллюстрации художников издательства «Бином»
16. авторские материалы