Дифференциальные уравнения высших порядков

Другой метод решения ЛДУ 1 порядка принадлежит Лагранжу: **метод Лагранжа или метод вариации постоянной.** Запишем его алгоритм:

y'

1. Находим решение соответствующего однородного уравнения $y' + P(x) \cdot y = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными, его решение $y = y(x,c)$
2. Полагая c = c(x) подставим найденное решение в исходное уравнение и решаем его относительно c(x).
3. Записываем общее решение ДУ в виде $y = y(x,c(x))$

Пример: $xy' - 2y = x^3$

1) Решим однородное уравнение $xy' - 2y = 0 \Rightarrow \quad xdy = 2ydx \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \quad \Rightarrow$

$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|c| \Rightarrow \quad y = cx^2$ - общее решение однородного уравнения.

2) Считаем c= c(x). Тогда $y = c(x)\cdot x^2$ подставим в исходное уравнение и решим его относительно c(x):

$x(c(x)\cdot x^2)' - 2c(x)\cdot x^2 = x^3 \Rightarrow \quad c'\cdot x^2 + 2cx - 2cx = x^2 \Rightarrow c' = 1 \Rightarrow c = x + c_1$

3) Таким образом, общее решение исходного ДУ имеет вид: $y = x^3 + c_1 \cdot x^2$

§5 Уравнения Бернулли

Это уравнение вида:

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^n,\ n \neq 0,\ n \neq 1.$$

Его можно привести к линейному (подстановка $z = y^{1-n}$), но на практике такие уравнения удобнее решать подстановкой Бернулли $y = u\cdot v$, не сводя его к линейному.

Пример:

$$y' + xy = xe^{x^2}y^2$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow vu' + uv' + xuv = xe^{x^2}u^2v^2$$

$$vu' + u(v' + xv) = xe^{x^2}u^2v^2$$

$$\begin{cases} v' + xv = 0 \\ vu' = xe^{x^2}u^2v^2 \end{cases}$$

1) $dv = -xvdx$

$$\frac{dv}{v} = -xdx$$

$$\ln v = -\frac{x^2}{2}$$

$$v = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y = \frac{-e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{\frac{x^2}{2}} + C}$$

2) $e^{-\frac{x^2}{2}}u' = xe^{x^2}u^2e^{-x^2}$

$$\frac{du}{u^2} = xe^{\frac{x^2}{2}}dx$$

$$-\frac{1}{u} = e^{\frac{x^2}{2}} + C$$

$$u = \frac{-1}{e^{\frac{x^2}{2}} + C}$$

$$y = \frac{-1}{e^{x^2} + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot C}$$

§6 ДУ в полных дифференциалах

Уравнения вида

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0 \qquad (1)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $f(x;y)$.

Покажем это. Пусть $Z = f(x; y)$ и $\frac{\partial f}{\partial x} = P(x; y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x; y)$,

тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P(x; y)}{\partial y}$, а $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q(x; y)}{\partial x}$

т.к. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, т.е. имеет место равенство (2)

Общий интеграл уравнения (1) определяется одной из формул

$$\int_{x_0}^{x} P(x;y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x;y)dy = C \qquad (3)$$

$$\int_{x_0}^{x} P(x;y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0;y)dy = C \qquad (4)$$

где $M_0(x_0;y_0) \in (D)$.

$$\int_{x_0}^{x} P(x;y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x;y)dy = C \qquad (3)$$

Пример:

Найти общий интеграл уравнения

$(x^2 + y - 4)dx + (x + y + e^y)dy = 0$.

Т.к. $(x^2 + y - 4)'_y = 1$, $(x + y + e^y)'_x = 1$, то уравнение в полных дифференциалах.

$P(x;y) = x^2 + y - 4$, $Q(x;y) = x + y + e^y$.

Возьмем $x_0 = y_0 = 0$, т.к. $M_0(0;0) \in (D)$

$$(3) \Rightarrow \int_0^x (x^2 + 0 - 4)dx + \int_0^y (x + y + e^y)dy = C$$

$$\frac{x^3}{3} - 4x + xy + \frac{y^2}{2} + e^y - 1 = C$$

$$\int_{x_0}^{x} P(x;y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0;y)dy = C \qquad (4)$$

$$(4) \Rightarrow \int_0^x \left(x^2 + y - 4\right)dx + \int_0^y \left(0 + y + e^y\right)dy = C$$

$$\frac{x^3}{3} + yx - 4x + \frac{y^2}{2} + e^y - 1 = C \quad \text{(совпадают).}$$

§7 ДУ допускающие понижение порядка

Опр. Любое дифференциальное уравнение порядка выше первого называют **уравнением высшего порядка**

$$F(x;y;y';y'')=0 \text{ – д.у. } 2 \text{ порядка} \qquad (1)$$

или $$y''=f(x;y;y') \text{ – д.у. } 2 \text{ порядка} \qquad (1')$$

$$F(x;y;y';y'')=0 \text{ – д.у. } 2 \text{ порядка} \qquad (1)$$

$$\text{или } y''=f(x;y;y') \text{ – д.у. } 2 \text{ порядка} \qquad (1')$$

Опр. Общим решением ДУ (1) или (1′) называют функцию $y=\varphi(x;c_1;c_2)$, где $c_1=const,\ c_2=const$, удовлетворяющую условиям:

1) $\varphi(x;c_1;c_2)$ – решение ДУ для любых значений c_1 и c_2.
2) Каковы бы ни были начальные условия $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0$ (2)

существуют единственные значения $c_1=c_1^0,\ c_2=c_2^0$ такие, что функция $\varphi(x;c_1^0;c_2^0)$ является решением уравнения (1) или (1′), удовлетворяя при этом условиям (2).

ДУ ***n*-го порядка** имеет вид

$$F(x;y;y';y'',...,y^{(n)})=0 \quad (3)$$

Общее решение уравнения (3) содержит столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения: $y=\varphi(x;c_1;c_2,...,c_n)$.

Один из основных методов решения ДУ высших порядков является метод понижения порядка, которое осуществляется соответствующей подстановкой.

Рассмотрим три основных типа ДУ, допускающих понижение порядка.

I. $y^{(n)} = f(x)$ (4)

Для получения искомой функции y данное уравнение **интегрируют** ***n*** **раз**.

Пример $y''' = \sin 2x + x$

$$y'' = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$y' = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

$$y = \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{x^4}{24} + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

II. $y'' = f(x; y')$ (5)

ДУ не содержит явно искомой функции y. Используя подстановку $y' = p(x)$, получим $y'' = p'(x)$. После чего данное уравнение приводится к ДУ 1 порядка.

Пример $xy'' - y' - x^2 = 0$; $y(1) = 5, y'(1) = 3$

$y'' - \frac{1}{x} y' = x$. Пусть $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'(x)$ и получим линейное ДУ 1 порядка

$p' - \frac{1}{x} p = x$, которое решается подстановкой $p = uv$

$v = x$, $u = x + c_1$, а значит $p = x(x + c_1) = x^2 + c_1 x$

Так как $y' = p(x)$, то $y = \frac{x^3}{3} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2$.

III. $y'' = f(y; y')$ (6)

В уравнении отсутствует переменная x. В качестве независимой переменной рассматриваем y, тогда y' – искомая функция, а y'' пересчитываем так, чтобы получить производную по y. С помощью подстановки $y' = p(y) \Rightarrow y'' = p'(y)\cdot p(y)$ $\left(y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p'(y)\cdot p(y) \right)$ сводят исходное уравнение к линейному относительно p и p'. После чего находят $y' = p(y; c_1)$. Интегрируя полученное уравнение получают $y = y(x; c_1; c_2)$.

Пример

$$y''y - y'(y + y') = 0$$

$$y' = p(y) \Rightarrow y'' = p'(y) \cdot p(y)$$

$$p'py - p(y + p) = 0$$

$p' - \dfrac{1}{y} p = 1$ - линейное ДУ 1 порядка, которое решается подстановкой $p = uv$.

$v = y$, $u = \ln|y| + c_1$, $p = y(\ln|y| + c_1)$ или $y' = y(\ln|y| + c_1)$.

Интегрируя полученное уравнение, получаем

$$\frac{dy}{y(\ln|y| + c_1)} = dx \Rightarrow \quad \ln\left|\ln|y| + c_1\right| = x + c_2 \Rightarrow \left|\ln|y| + c_1\right| = e^{x + c_2}$$