



Дифференциальные уравнения высших порядков

Другой метод решения ЛДУ 1 порядка принадлежит Лагранжу: **метод Лагранжа или метод вариации постоянной**. Запишем его алгоритм:

1. Находим решение соответствующего однородного уравнения $y' + P(x) \cdot y = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными, его решение $y = y(x, c)$
2. Полагая $c = c(x)$ подставим найденное решение в исходное уравнение и решаем его относительно $c(x)$.
3. Записываем общее решение ДУ в виде $y = y(x, c(x))$

Пример: $xy' - 2y = x^3$

1) Решим однородное уравнение $xy' - 2y = 0 \Rightarrow xdy = 2ydx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow$

$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|c| \Rightarrow y = cx^2$ - общее решение однородного уравнения.

2) Считаем $c = c(x)$. Тогда $y = c(x) \cdot x^2$ подставим в исходное уравнение и решим его относительно $c(x)$:

$$x(c(x) \cdot x^2)' - 2c(x) \cdot x^2 = x^3 \Rightarrow c' \cdot x^2 + 2cx - 2cx = x^2 \Rightarrow c' = 1 \Rightarrow c = x + c_1$$

3) Таким образом, общее решение исходного ДУ имеет вид: $y = x^3 + c_1 \cdot x^2$

§5 Уравнения Бернулли

Это уравнение вида:

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Его можно привести к линейному (подстановка $Z = y^{1-n}$), но на практике такие уравнения удобнее решать подстановкой Бернулли $y = u \cdot v$, не сводя его к линейному.

Пример:

$$y' + xy = xe^{x^2} y^2$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow vu' + uv' + xuv = xe^{x^2} u^2 v^2$$

$$vu' + u(v' + xv) = xe^{x^2} u^2 v^2$$

$$\begin{cases} v' + xv = 0 \\ vu' = xe^{x^2} u^2 v^2 \end{cases}$$

$$1) \, dv = -xvdx$$

$$\frac{dv}{v} = -x dx$$

$$\ln v = -\frac{x^2}{2}$$

$$v = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y = \frac{-e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{\frac{x^2}{2}} + C}$$

$$2) e^{-\frac{x^2}{2}} u' = x e^{x^2} u^2 e^{-x^2}$$

$$\frac{du}{u^2} = x e^{\frac{x^2}{2}} dx$$

$$-\frac{1}{u} = e^{\frac{x^2}{2}} + C$$

$$u = \frac{-1}{e^{\frac{x^2}{2}} + C}$$

$$y = \frac{-1}{e^{x^2} + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot C}$$

§6 ДУ в полных дифференциалах

Уравнения вида

$$P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0 \quad (1)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $f(x; y)$.

Покажем это. Пусть $Z = f(x; y)$ и $\frac{\partial f}{\partial x} = P(x; y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x; y)$,

тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P(x; y)}{\partial y}$, а $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q(x; y)}{\partial x}$

т.к. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, т.е. имеет место равенство (2)

Общий интеграл уравнения (1) определяется одной из формул

$$\int_{x_0}^x P(x; y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x; y) dy = C \quad (3)$$

$$\int_{x_0}^x P(x; y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0; y) dy = C \quad (4)$$

где $M_0(x_0; y_0) \in (D)$.

$$\int_{x_0}^x P(x; y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x; y) dy = C \quad (3)$$

Пример:

Найти общий интеграл уравнения

$$(x^2 + y - 4)dx + (x + y + e^y)dy = 0.$$

Т.к. $(x^2 + y - 4)'_y = 1$, $(x + y + e^y)'_x = 1$, то уравнение в полных дифференциалах.

$$P(x; y) = x^2 + y - 4, \quad Q(x; y) = x + y + e^y.$$

Возьмем $x_0 = y_0 = 0$, т.к. $M_0(0;0) \in (D)$

$$(3) \Rightarrow \int_0^x (x^2 + 0 - 4) dx + \int_0^y (x + y + e^y) dy = C$$

$$\frac{x^3}{3} - 4x + xy + \frac{y^2}{2} + e^y - 1 = C$$

$$\int_{x_0}^x P(x; y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0; y) dy = C \quad (4)$$

$$(4) \Rightarrow \int_0^x (x^2 + y - 4) dx + \int_0^y (0 + y + e^y) dy = C$$

$$\frac{x^3}{3} + yx - 4x + \frac{y^2}{2} + e^y - 1 = C \quad (\text{совпадают}).$$

§7 ДУ допускающие понижение порядка

Опр. Любое дифференциальное уравнение порядка выше первого называют **уравнением высшего порядка**

$$F(x; y; y'; y'') = 0 - \text{д.у. 2 порядка} \quad (1)$$

$$\text{или } y'' = f(x; y; y') - \text{д.у. 2 порядка} \quad (1')$$

$$F(x; y; y'; y'') = 0 \text{ — д.у. 2 порядка} \quad (1)$$

$$\text{или } y'' = f(x; y; y') \text{ — д.у. 2 порядка} \quad (1')$$

Опр. **Общим решением** ДУ (1) или (1') называют функцию $y = \varphi(x; c_1; c_2)$, где $c_1 = const$, $c_2 = const$, удовлетворяющую условиям:

1) $\varphi(x; c_1; c_2)$ — решение ДУ для любых значений c_1 и c_2 .

2) Каковы бы ни были начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ (2)

существуют единственные значения $c_1 = c_1^0$, $c_2 = c_2^0$ такие, что функция $\varphi(x; c_1^0; c_2^0)$ является решением уравнения (1) или (1'), удовлетворяя при этом условиям (2).

ДУ n -го порядка имеет вид

$$F(x; y; y'; y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (3)$$

Общее решение уравнения (3) содержит столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения: $y = \varphi(x; c_1; c_2, \dots, c_n)$.

Один из основных методов решения ДУ высших порядков является метод понижения порядка, которое осуществляется соответствующей подстановкой.

Рассмотрим три основных типа ДУ, допускающих понижение порядка.

$$I. \quad y^{(n)} = f(x) \quad (4)$$

Для получения искомой функции y данное уравнение **интегрируют n раз.**

Пример $y''' = \sin 2x + x$

$$y'' = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$y' = -\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

$$y = \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{x^4}{24} + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$\text{II. } y'' = f(x; y') \quad (5)$$

ДУ не содержит явно искомой функции y . Используя подстановку $y' = p(x)$, получим $y'' = p'(x)$. После чего данное уравнение приводится к ДУ 1 порядка.

Пример $xy'' - y' - x^2 = 0; \quad y(1) = 5, y'(1) = 3$

$y'' - \frac{1}{x}y' = x$. Пусть $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'(x)$ и получим линейное ДУ 1 порядка

$p' - \frac{1}{x}p = x$, которое решается подстановкой $p = uv$

$v = x$, $u = x + c_1$, а значит $p = x(x + c_1) = x^2 + c_1x$

Так как $y' = p(x)$, то $y = \frac{x^3}{3} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2$.

III. $y'' = f(y; y')$ (6)

В уравнении отсутствует переменная x . В качестве независимой переменной рассматриваем y , тогда y' – искомая функция, а y'' пересчитываем так, чтобы получить производную по y . С помощью подстановки $y' = p(y) \Rightarrow y'' = p'(y) \cdot p(y)$ ($y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'(y) \cdot p(y)$) сводят исходное уравнение к линейному относительно p и p' . После чего находят $y' = p(y; c_1)$. Интегрируя полученное уравнение получают $y = y(x; c_1; c_2)$.

Пример

$$y''y - y'(y + y') = 0$$

$$y' = p(y) \Rightarrow y'' = p'(y) \cdot p(y)$$

$$p'py - p(y + p) = 0$$

$p' - \frac{1}{y}p = 1$ - линейное ДУ 1 порядка, которое решается подстановкой $p = uv$.

$v = y$, $u = \ln|y| + c_1$, $p = y(\ln|y| + c_1)$ или $y' = y(\ln|y| + c_1)$.

Интегрируя полученное уравнение, получаем

$$\frac{dy}{y(\ln|y| + c_1)} = dx \Rightarrow \ln|\ln|y| + c_1| = x + c_2 \Rightarrow |\ln|y| + c_1| = e^{x+c_2}$$