Решение логарифмических уравнений

1. Определение логарифма. Основное логарифмическое тождество.
2.Основные свойства логарифмов.
3. Частные свойства.

Логарифмом положительного числа $\boldsymbol{b}$ по основанию $\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a > 0, a \neq 1}$, называется **показатель степени** $\boldsymbol{c}$, в которую надо возвести число $\boldsymbol{a}$, чтобы получить число $\boldsymbol{b}$, т.е.

$$\boldsymbol{log_a b = c, a^c = b}$$

Логарифмом положительного числа $\boldsymbol{b}$ по основанию $\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a > 0, a \neq 1}$, называется **показатель степени** $\boldsymbol{c}$, в которую надо возвести число $\boldsymbol{a}$, чтобы получить число $\boldsymbol{b}$, т.е.

$$\boldsymbol{log_a b = c, a^c = b}$$

Основные свойства логарифмов

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени** c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b, т.е.

$$log_a b = c, a^c = b$$

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени** c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b, т.е.

$$log_a b = c, a^c = b$$

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени** c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b, т.е.

$$log_a b = c, a^c = b$$

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени** c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b, т.е.

$$log_a b = c, a^c = b$$

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени** c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b, т.е.

$$log_a b = c, a^c = b$$

Частные свойства:

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени** c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b, т.е.

$$\log_a b = c, a^c = b$$

Решение логарифмических уравнений

Что значит «решить уравнение»?

Решить уравнение – это значит найти все его корни (решения) или установить, что их нет.

Что такое корень уравнения?

Корнем (решением) уравнения называется число, которое при подстановке в уравнение превращает его в верное равенство.

Какие уравнения называют логарифмическим?

Логарифмическим уравнением – уравнение, содержащие неизвестное под знаком логарифма.

Определение простейшего логарифмического уравнения:

Уравнение вида $\log_a x = в$, где $a \neq 1$, $a > 0$, $x > 0$, называется простейшим логарифмическим уравнением, оно равносильно уравнению $x = a^в$, причём ни проверка, ни ОДЗ не требуется.

Простейшие логарифмические уравнения:

1. $\log_{x-1} 8 = 1$
2. $\log_7(50x-1) = 2$
3. $\log_3 x = \log_3 9$
4. $\log_7(2x-3) = \log_7 x$

При решении логарифмических уравнений часто используются следующие <u>методы</u>:

- метод решения с помощью определения логарифма;
- применение основного логарифмического тождества;
- метод потенцирования;
- метод введения новых переменных;
- метод логарифмирования;
- метод приведения логарифмов к одному и тому же основанию;
- графический метод.

Метод решения с помощью определения логарифма

Например, уравнение $\log_a x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x>0$) имеет решение $x= a^b$

ПРИМЕРЫ:

1) $\log_4 x=2$ $x=16$

2) $\log_{0,5} x=2$ $x=0,25$

3) $\log_x 5=1$ $x=5$

4) $\log_5 x=-2$ $x=0,04$

Метод решения с помощью определения логарифма

ПРИМЕР:

5) $\log_{x-1} 8 = 1$

Решение:

$$(x-1)^1 = 8$$

$$x-1 = 8$$

$$x = 9$$

Метод решения с помощью определения логарифма

ПРИМЕР:

6) $\log_7(50x-1) = 2$

Решение:

$$7^2 = 50x-1$$

$$50x-1 = 49$$

$$x = 1$$

Применение основного логарифмического тождества: $a^{\log_a b}=b$ (где $b>0$, $a>0$ и $a\neq1$)

Решение:

Примеры: 1) $9^x=0,7$

$9^x=0,7$

$9^x=9^{\log_9 0,7}$

$x=\log_9 0,7$

2) $2^x=10$

$2^x=10$

$2^x=2^{\log_2 10}$

$X=\log_2 10$

3) $0,3^x=7$

$0,3^x=7$

$0,3^x=0,3^{\log_{0,3} 7}$

$X=\log_{0,3} 7$

Метод потенцирования

Суть метода - переход от уравнения

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

к уравнению следствию $f(x)=g(x)$.

При решении уравнений $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ часто происходит *расширение области определения* уравнения (за счёт решения уравнения $f(x)=\varphi(x)$),а значит, могут появиться посторонние корни. Поэтому, решив уравнение, следует проверить найденные корни подстановкой в данное уравнение.

Примеры на метод потенцирования

1) $\log_3 x = \log_3 9$

Решение: 1) x=9 Проверка:
подставим найденное значение x=9
в исходное уравнение $\log_3 9 = \log_3 9$

Ответ: x=9

Примеры на метод потенцирования

2) $\log_7(2x-3) = \log_7 x$

Решение: $2x-3=x$; $x=3$

Проверка: подставим найденное значение $x=3$ в исходное уравнение

$\log_7(2\cdot 3-3) = \log_7 3$;

$\log_7 3 = \log_7 3$

Ответ: $x=3$

Примеры на метод потенцирования

3) $\log_5 (2x+3)= \log_5 (x+1)$

Решение: $\log_5 (2x+3)= \log_5 (x+1)$

$2x+3= x+1;$

$x=1-3=-2$

Проверка: подставим найденное значение $x= -2$ в исходное уравнение $\log_5 (2x+3)= \log_5 (x+1)$ и получим $\log_5 (2 \cdot (-2)+3)= \log_5 (-2+1)$, $\log_5 (-1)= \log_5 (-1)$, это равенство неверно (оно не имеет смысла, так как выражения под логарифмом всегда больше нуля)

Ответ: нет решения

Примеры на метод потенцирования

4) $\log_5 x = \log_5 (6-x^2)$

Решение: $\log_5 x = \log_5 (6 - x^2)$

$$x = 6 - x^2$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_1 = -3$$
$$x_2 = 2$$

Проверка:

1) $x_1 = -3$ $\quad \log_5(-3)$ не существует -3 посторонний корень

2) $x_2 = 2$ $\quad \log_5 2 = \log_5(6 - 2^2)$ $\quad \log_5 2 = \log_5 2$

Ответ: 2.

Метод введения новых переменных

Суть метода -приведение логарифмического уравнения к квадратному $A\log_a^2 x + B\log_a x + C = 0$

1) ввести новую переменную $y = \log_a x$

2) решить уравнение $Ay^2 + By + C$ относительно y;

3) выполнить обратную подстановку и решить уравнения относительно x.

Метод введения новых переменных

Пример: 1) $2\log_5^2 x + 5\log_5 x + 2 = 0$

$$\log_5 x = y$$

$$2y^2 + 5y + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

$$y_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{2 \cdot 2} \quad y_1 = -2, y_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\log_5 x = -2 \qquad \log_5 x = -\frac{1}{2}$$

$$x = 5^{-2} = \frac{1}{25} \qquad x = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ответ: $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$

Метод введения новых переменных

Решение: 2) $\lg^2 x - \lg x^2 + 1 = 0$

$$\lg^2 x - 2\lg x + 1 = 0$$

$$\lg x = y$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$D = 0 \qquad y = \frac{-b}{2a}, \; y = 1$$

$$\lg x = 1$$

$$x = 10$$

Ответ: 10

Закрепление

Вариант 1. № 1 (а)
№2 (а)

Вариант 2. №1 (б)
№2 (б)

1.Решите уравнения методом потенцирования:

- Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени** c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b, т.е.

$$\log_a b = c, a^c = b$$

2. Решите уравнения методом введения вспомогательной переменной:

а) $3\log_{05}^2 x + 5\log_{0,5} x - 2 = 0;$

б) $2\log_{0,3}^2 x - 7\log_{0,3} x - 4 = 0.$