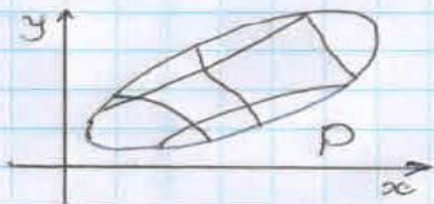
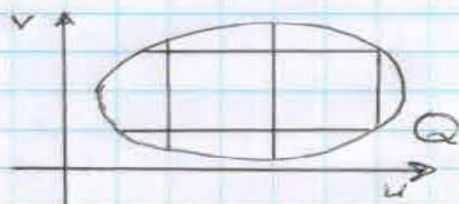


# Замена переменных в двойных интегралах



$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned}$$

- отображение Q на P



$(x, y) \in P$  - очка.  
замкн. квадр. обл.  
с кус.-гл. границей

$Q \leftrightarrow P$   
(вз.-одн.  
отображ.)

$(u, v) \in Q$  - очка.  
замкн. квадр. обл.  
с кус.-гл. границей

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \quad \text{обратное} \\ v &= v(x, y) \quad \text{отобр. P на Q} \end{aligned}$$

Пусть оба отображе-  
ния непр. дифф-мы.

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Отображения вз.-отр.  
 $\Rightarrow$  их матрицы вз.-отр.  
 $\Rightarrow$  их якобианы вз.-отр.

$$= \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 1. \quad \text{Обо якобианов непр. ф-ции} \Rightarrow \text{они сохр. знак в своей обл.}$$

Внутр. точка перейдет во внутр., граница - в границу.

Кус.-гл. кривая перейдет в кус.-гл. кривую:

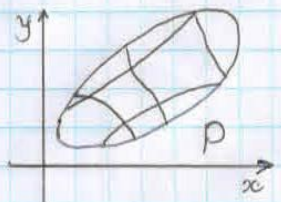
$$\begin{aligned} u &= u(t) \quad \text{гладкий} \\ v &= v(t) \quad \text{кусоч} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= x(u(t), v(t)) \\ y(t) &= y(u(t), v(t)) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial x}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial x}{\partial v} \dot{v} \quad \text{гладкий} \\ \dot{y} &= \frac{\partial y}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial y}{\partial v} \dot{v} \quad \text{кусоч} \end{aligned}$$

$$v = v_0 \text{ перейдет в гл. кривую} \quad \begin{aligned} x &= x(u, v_0) \quad \text{координатная} \\ y &= y(u, v_0) \quad u\text{-линия} \end{aligned}$$

$$u = u_0 \text{ , , , , , } \quad \begin{aligned} x &= x(u_0, v) \quad \text{координатная} \\ y &= y(u_0, v) \quad v\text{-линия} \end{aligned}$$

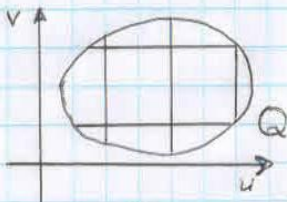
Получаются криволинейные координаты

## Замена переменных в двойных интегралах



$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned}$$

- отображение  $Q$  на  $P$



$(x, y) \in P$  - отрезки, замкн. квадр. обл. с кус.-гл. границей  
 $Q \leftrightarrow P$  (вз.-одн. отображ.)  
 $(u, v) \in Q$  - отрезки, замкн. квадр. обл. с кус.-гл. границей

$u = u(x, y)$  - обратное  
 $v = v(x, y)$  - отображ.  $P$  на  $Q$   
 Пусть два отображения и пер. дифференц. лев.

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \Rightarrow \text{их матрицы вз.-одн.} \\ \Rightarrow \text{их якобианы вз.-одн.}$$

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 1. \text{ Оба якобиана пер. ф-ции} \Rightarrow \text{они сохр. знак в своей обл.}$$

Внутр. точки перейдет во внутр., граница - в границу.

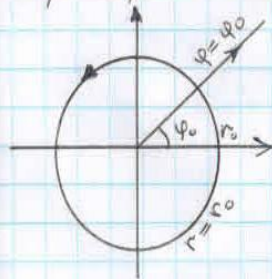
Кус.-гл. кривая перейдет в кус.-гл. кривую:

$$\begin{aligned} u &= u(t) \text{ - гладкий} \Rightarrow x(t) = x(u(t), v(t)) \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial x}{\partial v} \dot{v} \text{ - гладкий} \\ v &= v(t) \text{ - кусок} \Rightarrow y(t) = y(u(t), v(t)) \Rightarrow \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial y}{\partial v} \dot{v} \text{ - кусок} \end{aligned}$$

$v = v_0$  перейдет в гл. кривую  $x = x(u, v_0)$  - координатная  
 $y = y(u, v_0)$  - u-линия  
 $u = u_0$  - кусок, кусок, кусок, кусок  $x = x(u_0, v)$  - координатная  
 $y = y(u_0, v)$  - v-линия

Получаются криволинейные координаты

## Пример 1. Полярные координаты.



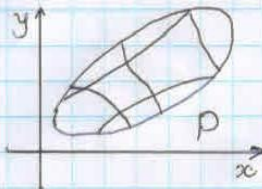
$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & r &\geq 0, -\pi < \varphi \leq \pi \\ y &= r \sin \varphi & (\text{или } 0 \leq \varphi < 2\pi) \end{aligned}$$

$$J = \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r, \text{ т.е. при } r > 0 \text{ - вз.-одн.}$$

$$r = r_0 \Rightarrow \begin{aligned} x &= r_0 \cos \varphi \\ y &= r_0 \sin \varphi \end{aligned} \Rightarrow x^2 + y^2 = r_0^2 \text{ - окружность радиуса } r_0$$

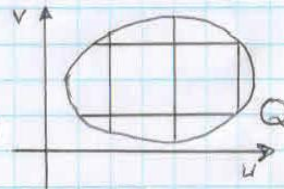
$$\varphi = \varphi_0 \Rightarrow \begin{aligned} x &= r \cos \varphi_0 \\ y &= r \sin \varphi_0 \end{aligned} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan \varphi_0 \text{ - луч (т.к. } r \geq 0) \text{ под } \angle \varphi_0 \text{ к оси}$$

## Замена переменных в двойных интегралах



$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned}$$

- отображение  $Q \rightarrow P$



$(x, y) \in P$  - оврак.  
зашки. квадр. обл.  
с кус.-гл. границей

$Q \leftrightarrow P$   
(вз.-одн.  
отображ.)

$(u, v) \in Q$  - оврак.  
зашки. квадр. обл.  
с кус.-гл. границей

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \quad \text{обратное} \\ v &= v(x, y) \quad \text{отобр. } P \text{ на } Q \end{aligned}$$

Пусть оба отображе-  
ния непр. диффер.-лемы.

$$\begin{aligned} \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} &= \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \\ \Rightarrow \text{их матрицы вз.-обр} & \\ \Rightarrow \text{их якобианы вз.-обр} & \end{aligned}$$

$$= \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 1. \text{ Оба якобианы непр. ф-ции } \Rightarrow \text{ они сохр. знак в своей обл.}$$

Внутр. точка переходит во внутр., граница - в границу.

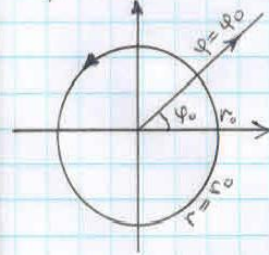
Кус.-гл. кривая переходит в кус.-гл. кривую:

$$\begin{aligned} u &= u(t) \quad \text{гладкий} \Rightarrow x(t) = x(u(t), v(t)) \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial x}{\partial v} \dot{v} \quad \text{гладкий} \\ v &= v(t) \quad \text{кусок} \Rightarrow y(t) = y(u(t), v(t)) \Rightarrow \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial y}{\partial v} \dot{v} \quad \text{кусок} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = v_0 & \text{ переходит в гл. кривую} & x = x(u, v_0) & \text{координатная} \\ & & y = y(u, v_0) & u\text{-линия} \\ u = u_0 & & x = x(u_0, v) & \text{координатная} \\ & & y = y(u_0, v) & v\text{-линия} \end{aligned}$$

Получаются криволинейные координаты

## Пример 1. Полярные координаты.



$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & r \geq 0, -\pi < \varphi \leq \pi \\ y &= r \sin \varphi & (\text{или } 0 \leq \varphi < 2\pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J = \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = \\ &= r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r, \text{ т.е. при } r > 0 - \text{вз.-одн.} \end{aligned}$$

$$r = r_0 \Rightarrow \begin{aligned} x &= r_0 \cos \varphi \\ y &= r_0 \sin \varphi \end{aligned} \Rightarrow x^2 + y^2 = r_0^2 \quad \text{окружность} \\ \text{радиуса } r_0$$

$$\varphi = \varphi_0 \Rightarrow \begin{aligned} x &= r \cos \varphi_0 \\ y &= r \sin \varphi_0 \end{aligned} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan \varphi_0 \quad \text{луч (т.к. } r \geq 0) \\ \text{под } \angle \varphi_0 \text{ к оси}$$

## Пример 2. Линейное отображение.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) \\ y &= y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) \end{aligned} \quad J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

При  $J \neq 0$  можно получить обратные преобр. (тоже лине.)

$$\text{Прямая на пл.-оси } (u, v): \frac{u - u_0}{p} = \frac{v - v_0}{q} = t \quad \begin{aligned} u &= u_0 + pt \\ v &= v_0 + qt \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_{11}pt + a_{12}qt, \text{ т.е. } \frac{x - x_0}{a_{11}p + a_{12}q} = \frac{y - y_0}{a_{21}p + a_{22}q} = t \\ y &= y_0 + a_{21}pt + a_{22}qt \end{aligned}$$

Прямая переходит в кривую,  $\parallel$ -ые прямые - в  $\parallel$ -ые,  
т.е. параллелограмм - в параллелограмм.

$\Pi_h \subset Ouv$  - квадрат с вершинами:  $(u_0, v_0), (u_0 + h, v_0), (u_0 + h, v_0 + h), (u_0, v_0 + h)$   
переходит в  $S \subset Oxy$  с верши.:  $(x_0, y_0), (x_0 + a_{11}h, y_0 + a_{21}h), (x_0 + a_{12}h, y_0 + a_{22}h), (x_0 + a_{11}h + a_{12}h, y_0 + a_{21}h + a_{22}h)$

$$\text{Стороны } S: \vec{a} = \{a_{11}h, a_{21}h\}, \vec{b} = \{a_{12}h, a_{22}h\}, \Rightarrow \text{его площадь } |\vec{a}, \vec{b}| =$$

$$= \begin{vmatrix} h & h & h \\ a_{11}h & a_{21}h & 0 \\ a_{12}h & a_{22}h & 0 \end{vmatrix} = \text{mod} \begin{vmatrix} a_{11}h & a_{21}h \\ a_{12}h & a_{22}h \end{vmatrix} = |J| \cdot h^2, \text{ т.е. } \frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} = |J|$$

Лемма  $x = x(u, v) \in C_2$  в окр. замкн. квадр. обл.  $Q$   
 $y = y(u, v) \in C_2$  вз. - обн. и вз. кер. диффр.  $Q \leftrightarrow P$

$(u_0, v_0)$  внутр. т.  $Q$ ,  $h > 0$ :  $\Pi_h$  лежит внутр.  $Q$ .

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{11}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{12} \quad u - u_0 = \Delta u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{21}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{22} \quad v - v_0 = \Delta v$$

$$J_0 = J(u_0, v_0) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_1 = \max \left( \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial v} \right| \right)$$

$M_2 = \max$  из всех 2-ххх ир-ххх

$$\Pi_h \rightarrow S \subset P \Rightarrow \frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2h(M_1 + 2M_2h)$$



Лемма  $x = x(u, v) \in C_2$  в окр. замкну. квадр. обл.  $Q$   
 $y = y(u, v)$  в з.-обл. и в з. крп. дугах  $Q \leftrightarrow P$

$(u_0, v_0)$  внутр. т.  $Q$ ,  $h > 0$ :  $\Pi_h$  лежит внутри  $Q$ .

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{11}, \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{12} \quad u - u_0 = \Delta u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{21}, \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{22} \quad v - v_0 = \Delta v$$

$$J_0 = J(u_0, v_0) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_1 = \max \left( \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial v} \right| \right)$$

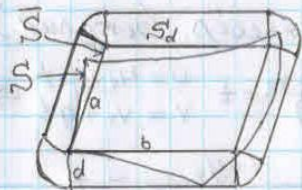
$M_2 = \max$  из всех 2-х и 3-х и 4-х

$$\Pi_h \rightarrow S \subset P \Rightarrow \frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2 h (M_1 + 2M_2 h)$$

$$D\text{-во. } x = x(u, v) = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \Delta v^2$$

$$y = y(u, v) = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \Delta v^2$$

(~ означает, что пр-ые действ. в произвольной точке)



$$\bar{x} = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) \text{ — линейное}$$

$$\bar{y} = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) \text{ — линейное}$$

$$\Pi_h \rightarrow \bar{S} \text{ — параллелограмм, } \frac{\mu(\bar{S})}{\mu(\Pi_h)} = |J_0|$$

$$S \subset \bar{S} \cup S_d \quad \begin{cases} |x(u, v) - \bar{x}(u, v)| \leq 2M_2 h^2 \\ |y(u, v) - \bar{y}(u, v)| \leq 2M_2 h^2 \end{cases}$$

$$d = \sup \rho((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \leq 2M_2 h^2 \sqrt{2} \leq 3M_2 h^2$$

$$\mu(S_d) = (2a + 2b)d + \pi d^2 \leq 2d(a + b + 2d)$$

$$a = \sqrt{(a_{11}h)^2 + (a_{12}h)^2} \leq \frac{3}{2}M_1 h; \text{ анал. } b \leq \frac{3}{2}M_1 h \Rightarrow$$

$$\mu(S) \leq \mu(\bar{S}) + \mu(S_d) \leq \mu(\bar{S}) + 2d(a + b + 2d) \leq \mu(\bar{S}) + 2d(3M_1 h + 2d) \leq$$

$$\leq \mu(\bar{S}) + 6M_2 h^2 (3M_1 h + 6M_2 h^2) \Rightarrow (\mu(\Pi_h) = h^2) \Rightarrow$$

$$\frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2 h (M_1 + 2M_2 h) \quad \text{Лемма доказана.}$$

Т.  $Q$  — окр. замкну. квадр. обл.  $x = x(u, v) \in C_2$  — это отображ.  
 $y = y(u, v)$   
 в з.-обл. и в з. крп. дугах  $Q \leftrightarrow P$  — окр. замкну. квадр. обл.

$$J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \quad f(x, y) \text{ непр. на } P. \text{ Тогда}$$

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \iint_Q f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$



Лемма  $x = x(u, v) \in C_2$  в окр. замкну. квадр. одн.  $Q$   
 $y = y(u, v)$   $\varphi_3$ -одн. и  $\varphi_3$  непр. диффр.  $Q \leftrightarrow P$

$(u_0, v_0)$  внутр. т.  $Q$ ,  $h > 0$ :  $\Pi_h$  лежит внутр.  $Q$ .

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{11}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{12} \quad u - u_0 = \Delta u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{21}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{22} \quad v - v_0 = \Delta v$$

$$J_0 = J(u_0, v_0) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

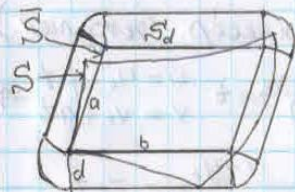
$$M_1 = \max_{(u, v) \in Q} \left( \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial v} \right| \right)$$

$M_2 = \max$  из всех 2-х стр. пр-вых

$$\Pi_h \rightarrow S \subset P \Rightarrow \frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2h(M_1 + 2M_2h)$$

D-во.  $x = x(u, v) = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \Delta v^2 \right]$   
 $y = y(u, v) = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \Delta v^2 \right]$

(~ означает, что пр-ые действ. в произвольной точке)



$$\bar{x} = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) \text{ — линейное}$$

$$\bar{y} = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) \text{ — предраз.}$$

$$\Pi_h \rightarrow \bar{S} \text{ — параллелограмм, } \frac{\mu(\bar{S})}{\mu(\Pi_h)} = |J_0|$$

$$S \subset \bar{S} \cup S_d$$

$$|x(u, v) - \bar{x}(u, v)| \leq 2M_2h^2$$

$$|y(u, v) - \bar{y}(u, v)| \leq 2M_2h^2$$

$$d = \sup \rho((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \leq 2M_2h^2 \sqrt{2} \leq 3M_2h^2$$

$$\mu(S_d) = (2a + 2b)d \leq 2d(a + b + 2d)$$

$$a = \sqrt{(a_{11}h)^2 + (a_{21}h)^2} \leq \frac{3}{2}M_1h, \text{ anal. } b \leq \frac{3}{2}M_1h \Rightarrow$$

$$\mu(S) \leq \mu(\bar{S}) + \mu(S_d) \leq \mu(\bar{S}) + 2d(a + b + 2d) \leq \mu(\bar{S}) + 2d(3M_1h + 2d) \leq$$

$$\leq \mu(\bar{S}) + 6M_2h^2(3M_1h + 6M_2h^2) \Rightarrow (\mu(\Pi_h) = h^2) \Rightarrow$$

$$\frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2h(M_1 + 2M_2h)$$

Лемма Борсуана.

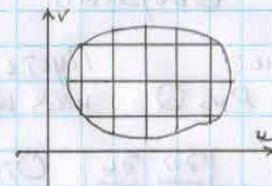
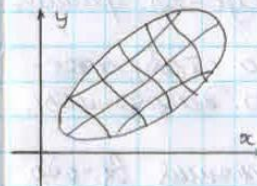
Т.  $Q$  — окр. замкну. квадр. одн.  $x = x(u, v) \in C_2$  — про отобразит.  
 $y = y(u, v)$   
 $\varphi_3$ -одн. и  $\varphi_3$  непр. диффр.  $Q \leftrightarrow P$  — окр. замкну. квадр. одн.

$$J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \quad f(x, y) \text{ непр. на } P. \text{ Тогда}$$

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \iint_Q f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

D-во.  $J(u, v) \neq 0$ . Все ин-образы  $\varphi(u, v)$  сюръективны. Пусть  $|f(x, y)| \leq M$

1)  $f(x, y) \geq 0$ , т.е.  $0 \leq f(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in P$



Наложим на  $Q$

квадратную сетку

со стороной  $h$

$Q$  разобьем на  $N_h$  мелких или мелких квадратов  $\Pi_i$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} N_h \cdot h^2 = \mu(Q) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu(Q)}{N_h h^2} = 1, \text{ т.е. } N_h \leq \frac{2\mu(Q)}{h^2}$$

$\Pi_i \leftrightarrow P_i \quad (u_i, v_i) \rightarrow (x_i, y_i)$ . По лемме

$$\mu(P_i) \leq |J(u_i, v_i)| \mu(\Pi_i) + 18M_2h^3(M_1 + 2M_2h)$$

$$\sum_{i=1}^{N_h} f(x_i, y_i) \mu(P_i) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{N_h} \varphi(u_i, v_i) \mu(\Pi_i)}_{\sigma_{\Pi}(\varphi, \{K_i\})} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_h} M_1 \cdot 18M_2h^3(M_1 + 2M_2h)}_{\leq 36M_2\mu(Q)h(M_1 + 2M_2h)}$$

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow \delta_{\Pi} \rightarrow 0, \delta_{\Sigma} \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\iint_P f(x, y) dx dy \leq \iint_Q f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

Рассуждем обратное пр-ие  $\Rightarrow =$ .



Лемма  $x = x(u, v) \in C_2$  в отрим. замкн. квадр. одн.  $Q$   
 $y = y(u, v)$  вз. - одн. и вз. керп. диффр.  $Q \leftrightarrow P$

$(u_0, v_0)$  внутр. т.  $Q$ ,  $h > 0$ :  $\Pi_h$  лежит внутр.  $Q$ .

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{11}, \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{12} \quad u - u_0 = \Delta u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{21}, \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{22} \quad v - v_0 = \Delta v$$

$$J_0 = J(u_0, v_0) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_1 = \max_{(u, v) \in Q} \left( \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial v} \right| \right)$$

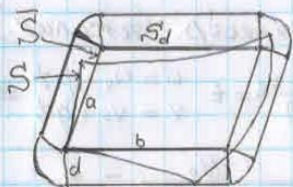
$M_2 = \max$  из всех 2-х или 3-х

$$\Pi_h \rightarrow SCP \Rightarrow \frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2 h (M_1 + 2M_2 h)$$

$$Q \text{ - в.о. } x = x(u, v) = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \Delta v^2 \right]$$

$$y = y(u, v) = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \Delta v^2 \right]$$

(~ означает, что пр-ые достигаются в произвольной точке)



$$\bar{x} = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) \text{ - параллельное}$$

$$\bar{y} = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) \text{ - параллельное}$$

$$\Pi_h \rightarrow \bar{S} \text{ - параллелограмм, } \frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} = |J_0|$$

$$SC \bar{S} \cup S_d \quad \begin{cases} |x(u, v) - \bar{x}(u, v)| \leq 2M_2 h^2 \\ |y(u, v) - \bar{y}(u, v)| \leq 2M_2 h^2 \end{cases}$$

$$d = \sup \rho((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \leq 2M_2 h^2 \sqrt{2} \leq 3M_2 h^2$$

$$\mu(S_d) = (2a + 2b)d + \pi d^2 \leq 2d(a + b + 2d)$$

$$a = \sqrt{(a_{11}h)^2 + (a_{21}h)^2} \leq \frac{3}{2} M_1 h, \text{ анал. } b \leq \frac{3}{2} M_1 h \Rightarrow$$

$$\mu(S) \leq \mu(\bar{S}) + \mu(S_d) \leq \mu(\bar{S}) + 2d(a + b + 2d) \leq \mu(\bar{S}) + 2d(3M_1 h + 2d) \leq$$

$$\mu(\bar{S}) + 6M_2 h^2 (3M_1 h + 6M_2 h^2) \Rightarrow (\mu(\Pi_h) = h^2) \Rightarrow$$

$$\frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2 h (M_1 + 2M_2 h)$$

Лемма доказана.

Т.  $Q$  - отрим. замкн. квадр. одн.  $x = x(u, v) \in C_2$  - это отрим. замкн. одн.  $y = y(u, v)$

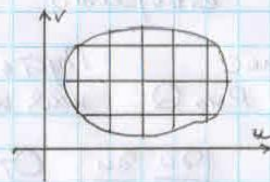
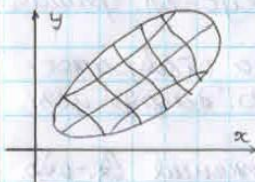
вз. - одн. и вз. керп. диффр.  $Q \leftrightarrow P$  - отрим. замкн. квадр. одн.

$$J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}, f(x, y) \text{ керп. на } P. \text{ Тогда}$$

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \iint_Q f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

$D$ -во.  $J(u, v) \neq 0$ . Все из отрим. следует. Пусть  $|f(x, y)| \leq M$

1)  $f(x, y) \geq 0$ , т.е.  $0 \leq f(x, y) \leq M \forall (x, y) \in P$



Наложим на  $Q$

квадратную сетку

с сторонами  $h$

$Q$  разбивается на  $N_h$  полных или неполных квадратов  $\Pi_i$

$$\lim_{h \rightarrow 0} N_h \cdot h^2 = \mu(Q) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu(Q)}{N_h h^2} = 1, \text{ т.е. } N_h \leq \frac{2\mu(Q)}{h^2}$$

$\Pi_i \leftrightarrow P_i \quad (u_i, v_i) \rightarrow (x_i, y_i)$ . По лемме

$$\mu(P_i) \leq |J(u_i, v_i)| \mu(\Pi_i) + 18M_2 h^3 (M_1 + 2M_2 h)$$

$$\sum_{i=1}^{N_h} f(x_i, y_i) \mu(P_i) \leq \sum_{i=1}^{N_h} f(u_i, v_i) \mu(\Pi_i) + \sum_{i=1}^{N_h} M \cdot 18M_2 h^3 (M_1 + 2M_2 h) \leq 36M_2 \mu(Q) h (M_1 + 2M_2 h)$$

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow \delta_{\Pi} \rightarrow 0, \delta_{\Sigma} \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\iint_P f(x, y) dx dy \leq \iint_Q f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

Рассуждения обратные пр-ие  $\Rightarrow =$ .

2)  $f(x, y)$  - произв. знака  $M = \max_{(x, y) \in P} |f(x, y)|$

$$f_1(x, y) = M \geq 0, f_2(x, y) = M - f(x, y) \geq 0$$

$$f(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y)$$

Теор. доказано

Лемма  $x = x(u, v) \in C_2$  в окр. замкн. квадр. одн.  $Q$   
 $y = y(u, v) \in C_2$  вз-одн. и вз-непр. диффр  $Q \leftrightarrow P$

$(u_0, v_0)$  внутр. т.  $Q$ ,  $h > 0$ :  $\Pi_h$  лежит внутр.  $Q$ .

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{11}, \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{12} \quad u - u_0 = \Delta u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{21}, \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{22} \quad v - v_0 = \Delta v$$

$$J_0 = J(u_0, v_0) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

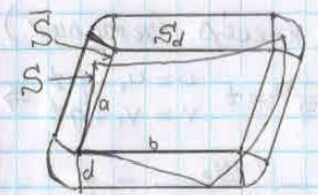
$$M_1 = \max_{(u, v) \in Q} \left( \max \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|, \max \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|, \max \left| \frac{\partial y}{\partial u} \right|, \max \left| \frac{\partial y}{\partial v} \right| \right)$$

$M_2 = \max$  из всех 2-х и 2-х пр-вых

$$\Pi_h \rightarrow S \subset P \Rightarrow \frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2h(M_1 + 2M_2h)$$

Д-во.  $x = x(u, v) = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \Delta u^2 + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \Delta v^2$   
 $y = y(u, v) = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \Delta u^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \Delta v^2$

(~ означает, что пр-ые достигаются в произвольной точке)



$\bar{x} = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0)$  — линейное  
 $\bar{y} = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0)$  — линейное

$\Pi_h \rightarrow \bar{S}$  — параллелограмм,  $\frac{\mu(\bar{S})}{\mu(\Pi_h)} = |J_0|$

$$\begin{cases} |x(u, v) - \bar{x}(u, v)| \leq 2M_2h^2 \\ |y(u, v) - \bar{y}(u, v)| \leq 2M_2h^2 \end{cases}$$

$S \subset \bar{S} \cup S_d$

$d = \sup \rho((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \leq 2M_2h^2 \sqrt{2} \leq 3M_2h^2$

$\mu(S_d) = (2a + 2b)d + \pi d^2 \leq 2d(a + b + 2d)$

$a = \sqrt{(a_{11}h)^2 + (a_{21}h)^2} \leq \frac{3}{2}M_1h$ , анал.  $b \leq \frac{3}{2}M_1h \Rightarrow$

$\mu(S) \leq \mu(\bar{S}) + \mu(S_d) \leq \mu(\bar{S}) + 2d(a + b + 2d) \leq \mu(\bar{S}) + 2d(3M_1h + 2d) \leq \mu(\bar{S}) + 6M_2h^2(3M_1h + 6M_2h^2) \Rightarrow (\mu(\Pi_h) = h^2) \Rightarrow$

$\frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2h(M_1 + 2M_2h)$  лемма доказана.

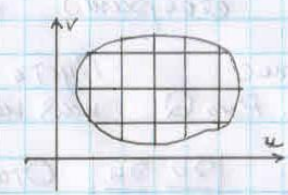
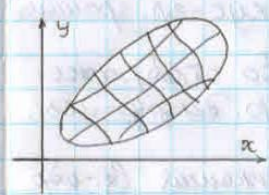
Т.  $Q$  - окр. замкн. квадр. одн.  $x = x(u, v) \in C_2$  - это отображ.

$y = y(u, v)$  вз-одн. и вз-непр. диффр  $Q \leftrightarrow P$  - окр. замкн. квадр. одн.  
 $J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ ,  $f(x, y)$  непрерыв. на  $P$ . Тогда

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \iint_Q f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

Д-во.  $J(u, v) \neq 0$ . Все мы считали с учетом знака. Пусть  $|f(x, y)| \leq M$

1)  $f(x, y) \geq 0$ , т.е.  $0 \leq f(x, y) \leq M \forall (x, y) \in P$



Наложим на  $Q$  квадратную сетку со стороной  $h$

$Q$  разбит на  $N_h$  почти или полностью квадратов  $\Pi_i$ :

$\lim_{h \rightarrow 0} N_h \cdot h^2 = \mu(Q) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu(Q)}{N_h h^2} = 1$ , т.е.  $N_h \leq \frac{2\mu(Q)}{h^2}$

$\Pi_i \leftrightarrow P_i \quad (u_i, v_i) \rightarrow (x_i, y_i)$ . По лемме

$$\mu(P_i) \leq |J(u_i, v_i)| \mu(\Pi_i) + 18M_2h^3(M_1 + 2M_2h)$$

$$\sum_{i=1}^{N_h} f(x_i, y_i) \mu(P_i) \leq \sum_{i=1}^{N_h} f(u_i, v_i) \mu(\Pi_i) + \sum_{i=1}^{N_h} M \cdot 18M_2h^3(M_1 + 2M_2h)$$

$h \rightarrow 0 \Rightarrow \delta_{\mu} \rightarrow 0, \delta_f \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\iint_P f(x, y) dx dy \leq \iint_Q f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

Рассмотрим обратное пр-ие  $\Rightarrow =$ .

2)  $f(x, y)$  - произв. знака  $M = \max_{(x, y) \in P} |f(x, y)|$

$f_+(x, y) = M \geq 0, f_-(x, y) = M - f(x, y) \geq 0$

$f(x, y) = f_+(x, y) - f_-(x, y)$ .

Теор. доказано

$\mu(P) = \iint_P dx dy = \iint_Q |J(u, v)| du dv$   
 $\frac{dx dy}{|J(u, v)| du dv} = \frac{dx dy}{du dv}$  - элемент площади в краев. к-тах