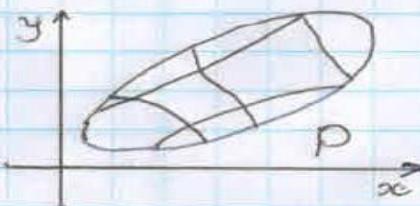


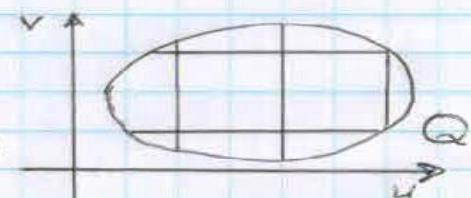
Замена переменных в двойных интегралах



$(x, y) \in P$ - ограничен.
замкн. квадр. обл.
с кус.-шт. границей

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) - \text{обратное} \\ v &= v(x, y) - \text{отобр. } P \text{ на } Q \end{aligned}$$

$x = x(u, v)$ -
 $y = y(u, v)$
- отображение Q на P



$Q \leftrightarrow P$
(вз.-одн.
однорам.)

$(u, v) \in Q$ - ограничен.
замкн. квадр. обл.
с кус.-шт. границей

Пусть оба отображения непр. дифф-леви.

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right|, \quad \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right|$$

Отображение вз.-одн.
⇒ их матрицы вз.-одн
⇒ их якобианы вз.-одн.

$$= \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 1. \quad \text{Оба якобианы непр. ф-ии} \Rightarrow$$

они сохр. знак в своей обл.

Внутр. точки передаются во внутр., граница - в границу.

Кус.-шт. кривая передаёт в кус.-шт. кривую:

$$\begin{aligned} u &= u(t) - \text{гладкий} \Rightarrow x(t) = x(u(t), v(t)) \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial x}{\partial v} \dot{v} - \text{гладкий} \\ v &= v(t) - \text{кусок} \Rightarrow y(t) = y(u(t), v(t)) \Rightarrow \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial y}{\partial v} \dot{v} - \text{кусок} \end{aligned}$$

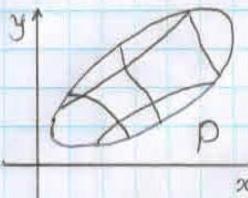
$v = v_0$ передаёт в шт. кривую

$$u = u_0, \dots, \dots, \dots, \dots$$

$x = x(u, v_0)$ - координаты
 $y = y(u, v_0)$ u -линия
 $x = x(u_0, v)$ - координаты
 $y = y(u_0, v)$ v -линия

Получается криволинейные координаты

Замена независимых в двойных интегралах



$$x = x(u, v) -$$

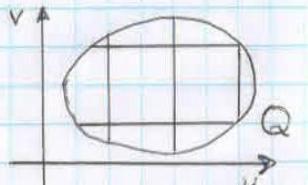
$$y = y(u, v)$$

- отображение Q на P

$(x, y) \in P$ - огран.
зашки квадр. обл.
с кус.-изг. границей

$Q \leftrightarrow P$

(вз.-одн.
обратн.)



$(u, v) \in Q$ - огран.
зашки квадр. обл.
с кус.-изг. границей

$u = u(x, y)$ - обратное
обратн. P на Q

Пусть эта отображе-
ние непр. дифгр-лев.

$v = v(x, y)$ - обратн. P на Q

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Отображение вз.-одн.

\Rightarrow их якобиан вз.-одн.

\Rightarrow их якобиан вз.-одн.

$$= \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 1. \text{ Оба якобианы непр. ф-ии } \Rightarrow \text{ они сохр. знак в своей обл.}$$

Внур. точки передвёт во внутр., граница - в границу.

Кус.-изг. кривая передвёт в кус.-изг. кривую:

$$u = u(t) \text{ - гладкий } \Rightarrow x(t) = x(u(t), v(t)) \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial x}{\partial v} \dot{v} \text{ - гладкий}$$

$$v = v(t) \text{ - кусок } \Rightarrow y(t) = y(u(t), v(t)) \Rightarrow \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial y}{\partial v} \dot{v} \text{ - кусок}$$

$v = v_0$ передвёт в изг. кривую

$$u = u_0, \dots, \dots, \dots, \dots$$

$$x = x(u, v_0) \text{ - координаты}$$

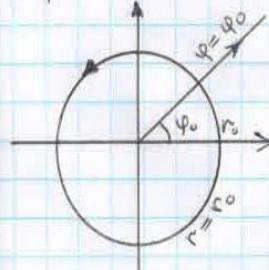
$$y = y(u, v_0) \text{ - } u\text{-линия}$$

$$x = x(u_0, v) \text{ - координаты}$$

$$y = y(u_0, v) \text{ - } v\text{-линия}$$

Получаются криволинейные координаты!

Пример 1. Полярные координаты.



$$x = r \cos \varphi \quad r \geq 0, -\pi < \varphi \leq \pi$$

$$y = r \sin \varphi \quad (\text{или } 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

$$J = \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r, \text{ т.е. при } r > 0 - \text{ вл.-одн.}$$

$$r = r_0 \Rightarrow x = r_0 \cos \varphi \Rightarrow x^2 + y^2 = r_0^2 \quad \text{окружность радиуса } r_0$$

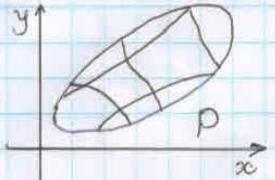
$$\varphi = \varphi_0 \Rightarrow x = r \cos \varphi_0 \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan \varphi_0 - \text{ угл (т.к. } r \geq 0 \text{)}$$

радиуса r_0

угл ($\text{т.к. } r \geq 0$)

под φ_0 к оси

Замена переменных в двойных интегралах



$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

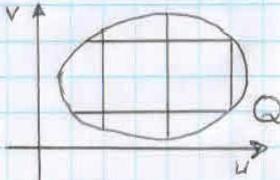
- отображение Q на P

$(x, y) \in P$ - ограниченный квадрат с кус.-згл. границей

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

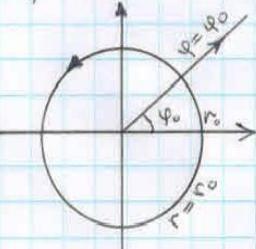
обратное отображение из Q в P



$(u, v) \in Q$ - ограниченный квадрат с кус.-згл. границей

Пусть это отображение не пр. линии.

Пример 1. Полярные координаты.



$$x = r \cos \varphi \quad r \geq 0, -\pi < \varphi \leq \pi$$

$$y = r \sin \varphi \quad (\text{или } 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r, \text{ т.е. при } r > 0 - \text{ вл.-одн.}$$

$$r = r_0 \Rightarrow x = r_0 \cos \varphi \Rightarrow x^2 + y^2 = r_0^2 \quad \text{стремление радиуса } r_0$$

$$\varphi = \varphi_0 \Rightarrow x = r \cos \varphi_0 \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan \varphi_0 - \text{ угл. (т.к. } r \geq 0 \text{)}$$

Пример 2. Линейное отображение.

$$x = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) \quad J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$y = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0)$$

При $J \neq 0$ можно получить обратное преобр. (тоже лин.)

$$\text{Прим. на пл.-сте } (u, v): \frac{u - u_0}{p} = \frac{v - v_0}{q} = t \quad u = u_0 + pt \quad v = v_0 + qt \Rightarrow$$

$$x = x_0 + a_{11}pt + a_{12}qt, \text{ т.е. } \frac{x - x_0}{a_{11}p + a_{12}q} = \frac{y - y_0}{a_{21}p + a_{22}q} = t$$

$$y = y_0 + a_{21}pt + a_{22}qt$$

При этом передвигается прямая, II-ое прямые - в II-ое, т.е. параллелограмм - в параллелограмм.

$\Gamma_h \subset Ouv$ - квадрат с вершинами: $(u_0, v_0), (u_0 + h, v_0), (u_0, v_0 + h), (u_0 + h, v_0 + h)$ передвигается в $ScOxy$ с вершинами: $(x_0, y_0), (x_0 + a_{11}h, y_0 + a_{21}h), (x_0 + a_{12}h, y_0 + a_{22}h), (x_0 + a_{11}h + a_{12}h, y_0 + a_{21}h + a_{22}h)$

Стороны S: $\vec{a} = \{a_{11}h, a_{21}h\}, \vec{b} = \{a_{12}h, a_{22}h\} \Rightarrow$ его площадь $|\vec{a}, \vec{b}| =$

$$= \det \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{k} \\ a_{11}h & a_{21}h & 0 \\ a_{12}h & a_{22}h & 0 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} a_{11}h & a_{21}h \\ a_{12}h & a_{22}h \end{vmatrix} = |J| \cdot h^2, \text{ т.е. } \frac{J(S)}{J(\Gamma_h)} = |J|$$

Получаются криволинейные координаты

Лемма $x = x(u, v) \in C_2$ в огранич. замкн. квадр. обл. Q
 $y = y(u, v)$ в з.-огн. и в з.-непр. д-ре $Q \leftrightarrow P$

(u_0, v_0) внутр. Q , $h > 0$: Π_h лежит внутри Q .

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{11}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{12} \quad u - u_0 = \Delta u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{21}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{22} \quad v - v_0 = \Delta v$$

$$J_0 = J(u_0, v_0) = \left| \begin{array}{cc} D(x, y) \\ D(u, v) \end{array} \right|_{(u_0, v_0)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_1 = \max \left(\max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial v} \right| \right)$$

$$M_2 = \max \text{ из всех } 2-\text{ст} x \text{ np-ст} x$$

$$\Pi_h \rightarrow SCP \Rightarrow \frac{m(S)}{m(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2 h (M_1 + 2M_2 h).$$

Лемма $x = x(u, v) \in C_2$ в ограничении квадр. обл. \mathbb{Q}
 $y = y(u, v) \in C_2$ в з.-дн. и з.-нпр. дн. фр. $\mathbb{Q} \hookrightarrow P$

(u_0, v_0) внутр. \mathbb{Q} , $h > 0$: Π_h лежит внутри \mathbb{Q} .

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{11}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{12}, \quad u - u_0 = \Delta u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{21}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{22}, \quad v - v_0 = \Delta v$$

$$J_0 = J(u_0, v_0) = \left| \begin{matrix} D(x, y) \\ D(u, v) \end{matrix} \right|_{(u_0, v_0)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_1 = \max \left(\max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial v} \right| \right)$$

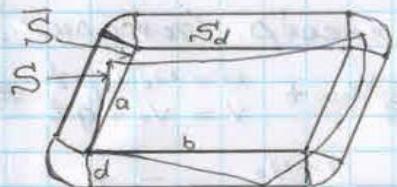
$$M_2 = \max \text{ из всех } 2 \times 2 \text{ дн.}$$

$$\Pi_h \rightarrow S \subset P \Rightarrow \frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2 h (M_1 + 2M_2 h).$$

$$\mathcal{D}\text{-лн. } x = x(u, v) = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \Delta v^2 \right]$$

$$y = y(u, v) = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \Delta v^2 \right]$$

(~ означает, что np-ое близится в прошлую точку)



$$\bar{x} = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) \text{ - линейное} \\ \bar{y} = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) \text{ - преобраз.}$$

$$\Pi_h \rightarrow \bar{S} \text{ - параллелограмм, } \frac{\mu(\bar{S})}{\mu(\Pi_h)} = |J_0|$$

$$S \subset \bar{S} \cup S_d$$

$$\begin{cases} |x(u, v) - \bar{x}(u, v)| \leq 2M_2 h^2 \\ |y(u, v) - \bar{y}(u, v)| \leq 2M_2 h^2 \end{cases}$$

$$d = \sup \rho((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \leq 2M_2 h^2 \sqrt{2} \leq 3M_2 h^2$$

$$\mu(S_d) = (2a + 2b)d + \pi d^2 \leq 2d(a + b + 2d)$$

$$a = \sqrt{(a_{11}h)^2 + (a_{21}h)^2} \leq \frac{3}{2} M_1 h, \text{ анал. } b \leq \frac{3}{2} M_1 h \Rightarrow$$

$$\mu(S) \leq \mu(\bar{S}) + \mu(S_d) \leq \mu(\bar{S}) + 2d(a + b + 2d) \leq \mu(\bar{S}) + 2d(3M_1 h + 2d) \leq$$

$$\leq \mu(\bar{S}) + 6M_2 h^2 (3M_1 h + 6M_2 h^2) \Rightarrow (\mu(\Pi_h) = h^2) \Rightarrow$$

$$\frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2 h (M_1 + 2M_2 h) \quad \text{Лемма доказана.}$$

Лемма $x = x(u, v) \in C_2$ в ограничении класса одн. Q
 $y = y(u, v) \in C_2$ бз.-одн. и бз. квадр. дифф. $Q \leftrightarrow P$

(u_0, v_0) внутр. Q , $h > 0$: Π_h лежит внутри Q .

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{11}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{12} \quad u - u_0 = \Delta u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{21}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{22} \quad v - v_0 = \Delta v$$

$$J_0 = J(u_0, v_0) = \left| \begin{matrix} D(x, y) \\ D(u, v) \end{matrix} \right|_{(u_0, v_0)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_1 = \max \left(\max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial v} \right| \right)$$

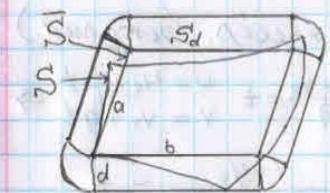
$$M_2 = \max_{u \in \text{Всех } 2-\text{клx}} \text{np-вклx}$$

$$\Pi_h \rightarrow SCP \Rightarrow \frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2h(M_1 + 2M_2h).$$

$$\text{Д-бо. } x = x(u, v) = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \Delta v^2 \right]$$

$$y = y(u, v) = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \Delta v^2 \right]$$

(~ означает, что np-ое неявное в преобразованной форме)



$$S \subset \bar{S} \cup S_d$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) - \text{линейное} \\ \bar{y} &= y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) - \text{преобраз.} \end{aligned}$$

$$\Pi_h \rightarrow \bar{S} - \text{параллелограмм}, \quad \frac{\mu(\bar{S})}{\mu(\Pi_h)} = |J_0|$$

$$\begin{aligned} |x(u, v) - \bar{x}(u, v)| &\leq 2M_2h^2 \\ |y(u, v) - \bar{y}(u, v)| &\leq 2M_2h^2 \end{aligned}$$

$$d = \sup p((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \leq 2M_2h^2\sqrt{2} \leq 3M_2h^2$$

$$\mu(S_d) = (2a + 2b)d + \pi d^2 \leq 2d(a + b + 2d)$$

$$a = \sqrt{(a_{11}h)^2 + (a_{21}h)^2} \leq \frac{3}{2}M_1h, \text{ аналог. } b \leq \frac{3}{2}M_1h \Rightarrow$$

$$\mu(S) \leq \mu(\bar{S}) + \mu(S_d) \leq \mu(\bar{S}) + 2d(a + b + 2d) \leq \mu(\bar{S}) + 2d(3M_1h + 2d) \leq$$

$$\leq \mu(\bar{S}) + 6M_2h^2(3M_1h + 6M_2h^2) \Rightarrow (\mu(\Pi_h) = h^2) \Rightarrow$$

$$\frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2h(M_1 + 2M_2h) \quad \text{лемма доказана.}$$

T. Q -огр. замкн. квадр. одн. $x = x(u, v) \in C_2$ — это однородн. бз.-одн. и бз. квадр. дифф. $Q \leftrightarrow P$

$J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, $f(x, y)$ непр. на P . Тогда

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \iint_Q f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

Лемма $x = x(u, v) \in C_2$ в ограничении квадр. обл. Q
 $y = y(u, v)$ в Q -обл. и в Q -квадр. дифф. $Q \leftrightarrow P$

(u_0, v_0) внутр. Q , $h > 0$: Π_h несет внутр. Q .

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{11}, \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{12}, \quad u - u_0 = \Delta u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{21}, \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{22}, \quad v - v_0 = \Delta v$$

$$J_0 = J(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}_{(u_0, v_0)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_1 = \max \left(\max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial v} \right| \right)$$

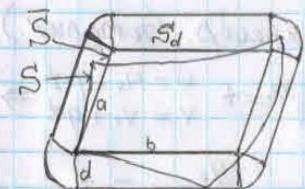
$M_2 = \max$ из всех 2×2 квадратных матриц

$$\Pi_h \rightarrow S \subset P \Rightarrow \frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2h(M_1 + 2M_2h).$$

$$\text{Д-бо. } x = x(u, v) = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \Delta v^2$$

$$y = y(u, v) = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \Delta v^2$$

(\sim означает, что это делается в прошлых упомянутых терминах)



$$\bar{x} = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) \quad \text{линейное}$$

$$\bar{y} = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) \quad \text{превращ.}$$

$$\Pi_h \rightarrow \bar{S} - \text{параллелограмм, } \frac{\mu(\bar{S})}{\mu(\Pi_h)} = |J_0|$$

$$|\bar{x}(u, v) - x(u, v)| \leq 2M_2h^2$$

$$|\bar{y}(u, v) - y(u, v)| \leq 2M_2h^2$$

$$S \subset \bar{S} \cup S_d$$

$$d = \sup \rho((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \leq 2M_2h^2\sqrt{2} \leq 3M_2h^2$$

$$\mu(S_d) = (2a + 2b)d + \pi d^2 \leq 2d(a + b + 2d)$$

$$a = \sqrt{(a_{11}h)^2 + (a_{21}h)^2} \leq \frac{3}{2}M_1h, \text{ анал. } b \leq \frac{3}{2}M_1h \Rightarrow$$

$$\mu(S) \leq \mu(\bar{S}) + \mu(S_d) \leq \mu(\bar{S}) + 2d(a + b + 2d) \leq \mu(\bar{S}) + 2d(3M_1h + 2d) \leq$$

$$\leq \mu(\bar{S}) + 6M_2h^2(3M_1h + 6M_2h^2) \Rightarrow (\mu(\Pi_h) = h^2) \Rightarrow$$

$$\frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2h(M_1 + 2M_2h)$$

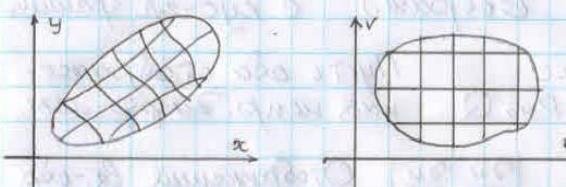
Лемма доказана.

T. Q -ограничение квадр. обл. $x = x(u, v) \in C_2$ — это ограничение.
 $y = y(u, v)$
 b_3 -огр. и b_2 -огр. дифф. $Q \leftrightarrow P$ — Q -ограничение квадр. обл.
 $J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, $f(x, y)$ несп. на P . Тогда

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \iint_Q f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

D-бо. $J(u, v) \neq 0$. Все u, v входят в Q . Пусть $|f(x, y)| \leq M$

$$1) f(x, y) \geq 0, \text{ т.е. } 0 \leq f(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in P$$



Напомним из Q
 квадратную сетку
 со стороной h

Q разбивается на N_h небольших неполных квадратов Π_i :

$$\lim_{h \rightarrow 0} N_h \cdot h^2 = \mu(Q) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu(Q)}{N_h h^2} = 1, \text{ т.е. } N_h \leq \frac{2\mu(Q)}{h^2}$$

$\Pi_i \leftrightarrow P_i$ $(u_i, v_i) \rightarrow (x_i, y_i)$. По лемме

$$\mu(P_i) \leq |J(u_i, v_i)| \mu(\Pi_i) + 18M_2h^3(M_1 + 2M_2h)$$

$$\sum_{i=1}^{N_h} f(x_i, y_i) \mu(P_i) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{N_h} \varphi(u_i, v_i) \mu(\Pi_i)}_{\sigma_P(f, K_i)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_h} M \cdot 18M_2h^3(M_1 + 2M_2h)}_{\sigma_{\bar{P}}(\varphi, \{K_i\})} = 36MM_2\mu(Q)h(M_1 + 2M_2h)$$

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma_P \rightarrow 0, \sigma_{\bar{P}} \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \iint_Q f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

Лемма $x = x(u, v) \in C_2$ в ограничении квадрата Ω . Q
 $y = y(u, v) \in C_2$ в z_1 -коорд. и z_2 -коорд. тогда $Q \leftrightarrow P$

(u_0, v_0) внутрь T , Q , $h > 0$: Π_h несет внутрь Q .

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{11}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{12} \quad u - u_0 = \Delta u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{21}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{22} \quad v - v_0 = \Delta v$$

$$J_0 = J(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} D(x, y) \\ D(u, v) \end{vmatrix}_{(u_0, v_0)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_1 = \max \left(\max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial v} \right| \right)$$

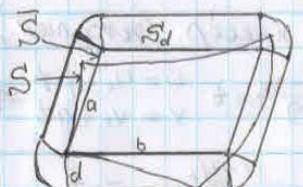
$$M_2 = \max_{u \in \Omega} \max_{v \in \Omega} 2 \cdot \|x\|_{L^\infty} + \|y\|_{L^\infty}$$

$$\Pi_h \rightarrow SCP \Rightarrow \frac{M(S)}{M(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2 h (M_1 + 2M_2 h).$$

$$\text{Д-бо. } x = x(u, v) = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \Delta v^2 \right]$$

$$y = y(u, v) = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \Delta v^2 \right]$$

(~ означает, что при преобразовании Π_h в S не изменяется форма)



$$\bar{x} = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) - \text{линейное}$$

$$\bar{y} = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) - \text{преобраз.}$$

$$\Pi_h \rightarrow \bar{S} - \text{параллелограмм}, \quad \frac{M(\bar{S})}{M(\Pi_h)} = |J_0|$$

$$S \subset \bar{S} \cup S_d$$

$$\begin{cases} |x(u, v) - \bar{x}(u, v)| \leq 2M_2 h^2 \\ |y(u, v) - \bar{y}(u, v)| \leq 2M_2 h^2 \end{cases}$$

$$d = \sup_{(x, y)} \rho((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \leq 2M_2 h^2 \sqrt{2} \leq 3M_2 h^2$$

$$M(S_d) = (2a + 2b)d + \pi d^2 \leq 2d(a + b + 2d)$$

$$a = \sqrt{(a_{11}h)^2 + (a_{21}h)^2} \leq \frac{3}{2} M_1 h; \text{ аналогично } b \leq \frac{3}{2} M_1 h \Rightarrow$$

$$M(S) \leq M(\bar{S}) + M(S_d) \leq M(\bar{S}) + 2d(a + b + 2d) \leq M(\bar{S}) + 2d(3M_1 h + 2d) \leq$$

$$\leq M(\bar{S}) + 6M_2 h^2 (3M_1 h + 6M_2 h^2) \Rightarrow (M(\Pi_h) = h^2) \Rightarrow$$

$$\frac{M(S)}{M(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2 h (M_1 + 2M_2 h) \quad \text{лемма доказана.}$$

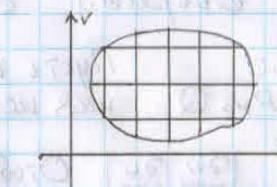
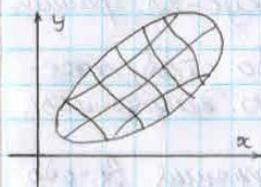
Т. 2 Q -ограниченный квадрат Ω . $x = x(u, v) \in C_2$ — это ограничение
 $y = y(u, v) \in C_2$ -коорд. и z_1 -коорд. тогда $Q \leftrightarrow P$

$J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, $f(x, y)$ непр. на P . Тогда

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \iint_Q f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

Д-бо. $J(u, v) \neq 0$. Все эти ограничения выполняются, поэтому $|f(x, y)| \leq M$

$$1) f(x, y) \geq 0, \text{ т.е. } 0 \leq f(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in P$$



Напомним из Q

квадратную сетку

с соединением h

Q разбивается на N_h небольших квадратов Π_i :

$$\lim_{h \rightarrow 0} N_h \cdot h^2 = \mu(Q) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu(Q)}{N_h h^2} = 1, \text{ т.е. } N_h \leq \frac{2\mu(Q)}{h^2}$$

$$\Pi_i \leftrightarrow P_i \quad (u_i, v_i) \rightarrow (x_i, y_i) \quad \text{по линии}$$

$$M(P_i) \leq |J(u_i, v_i)| M(\Pi_i) + 18M_2 h^3 (M_1 + 2M_2 h)$$

$$\sum_{i=1}^{N_h} f(x_i, y_i) M(P_i) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{N_h} \varphi(u_i, v_i) M(\Pi_i)}_{O_{\bar{P}}(f, K_i)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_h} M \cdot 18M_2 h^3 (M_1 + 2M_2 h)}_{O_{\bar{P}}(\varphi, \{K_i\})} = 36 M M_2 \mu(Q) h (M_1 + 2M_2 h)$$

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow \delta_{\bar{P}} \rightarrow 0, \quad \delta_{\bar{f}} \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\iint_P f(x, y) dx dy \leq \iint_Q f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

Рассмотрим обратное пр-ие $\Rightarrow =$.

Лемма $x = x(u, v) \in C_2$ в ограничении квадр. одн. Q
 $y = y(u, v) \in C_2$ в \bar{Q} -одн. и в \bar{Q} непр. дифф. $Q \leftrightarrow P$

(u_0, v_0) внутр. Q , $h > 0$: Π_h несет внутрь Q .

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{11}, \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{12}, \quad u - u_0 = \Delta u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{21}, \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{22}, \quad v - v_0 = \Delta v$$

$$J_0 = J(u_0, v_0) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{array} \right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

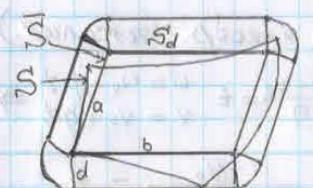
$$M_1 = \max \left(\max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial v} \right| \right)$$

$$M_2 = \max \text{ из всех } 2 \times 2 \text{ дифф. нп-ов}$$

$$\Pi_h \rightarrow SCP \Rightarrow \frac{M(S)}{M(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2 h(M_1 + 2M_2 h),$$

$$\begin{aligned} D\text{-л.о. } x = x(u, v) &= x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \Delta v^2 \\ y = y(u, v) &= y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \Delta v^2 \right] \end{aligned}$$

(~ означает, что нп-ое дифф. в прошлых точках)



$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) - \text{линейн.} \\ \bar{y} &= y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) - \text{непр.} \end{aligned}$$

$$\Pi_h \rightarrow \bar{S} - \text{параллелограмм, } \frac{M(\bar{S})}{M(\Pi_h)} = |J_0|$$

$$\begin{cases} |x(u, v) - \bar{x}(u, v)| \leq 2M_2 h^2 \\ |y(u, v) - \bar{y}(u, v)| \leq 2M_2 h^2 \end{cases}$$

$$d = \sup p((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \leq 2M_2 h^2 \sqrt{2} \leq 3M_2 h^2$$

$$M(S_d) = (2a + 2b)d + \pi d^2 \leq 2d(a + b + 2d)$$

$$a = \sqrt{(a_{11}h)^2 + (a_{21}h)^2} \leq \frac{3}{2} M_1 h, \text{ аналог. } b \leq \frac{3}{2} M_1 h \Rightarrow$$

$$M(S) \leq M(\bar{S}) + M(S_d) \leq M(\bar{S}) + 2d(a + b + 2d) \leq M(\bar{S}) + 2d(3M_1 h + 2d) \leq$$

$$\leq M(\bar{S}) + 6M_2 h^2 (3M_1 h + 6M_2 h^2) \Rightarrow (M(\Pi_h) = h^2) \Rightarrow$$

$$\frac{M(S)}{M(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2 h(M_1 + 2M_2 h)$$

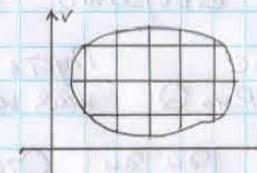
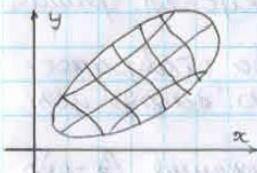
Лемма доказана.

T. Q-огр. замкн. квадр. одн. $x = x(u, v) \in C_2$ - это огра. $y = y(u, v)$
 $J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, $f(x, y)$ непр. на P. Тогда

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \iint_{\bar{Q}} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv,$$

D-л.о. $J(u, v) \neq 0$. Все интегрируемые функции. Пусть $|f(x, y)| \leq M$

1) $f(x, y) \geq 0$, т.е. $0 \leq f(x, y) \leq M \forall (x, y) \in P$



Напомним из Q

квадратную сетку
со стороной h

Q разбивается на N_h небольших квадратиков квадратов в Π_h :

$$\lim_{h \rightarrow 0} N_h \cdot h^2 = \mu(Q) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{M(Q)}{N_h \cdot h^2} = 1, \text{ т.е. } N_h \leq \frac{2M(Q)}{h^2}$$

$P_i \leftrightarrow P_i$ $(u_i, v_i) \rightarrow (x_i, y_i)$. По лемме

$$\begin{aligned} M(P_i) &\leq |J(u_i, v_i)| M(\Pi_i) + 18N_2 h^3 (M_1 + 2M_2 h) \\ \sum_{i=1}^{N_h} f(x_i, y_i) M(P_i) &\leq \underbrace{\sum_{i=1}^{N_h} \varphi(u_i, v_i) \mu(\Pi_i)}_{\sigma_{\bar{P}}(\varphi, \bar{K}_h)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_h} M \cdot 18M_2 h^3 (M_1 + 2M_2 h)}_{\sigma_{\bar{P}}(\varphi, \bar{K}_h)} = 36M_2 \mu(Q) h(M_1 + 2M_2 h) \end{aligned}$$

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow \delta_{\bar{P}} \rightarrow 0, \delta_{\bar{K}_h} \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\iint_P f(x, y) dx dy \leq \iint_{\bar{Q}} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

Рассмотрим обратное нп-ие $\Rightarrow =$.

2) $f(x, y)$ -прост. знака $M = \max_{(x, y) \in P} |f(x, y)|$

$$f_+(x, y) = M \geq 0, \quad f_-(x, y) = M - f(x, y) \geq 0$$

$$f(x, y) = f_+(x, y) - f_-(x, y).$$

Teor. Доказано

Лемма

$x = x(u, v) \in C_2$ в огранич. замкн. квадр. обл. Q
 $y = y(u, v)$ бз.-одн. и бз. непр. дифф. $Q \leftrightarrow P$

(u_0, v_0) внутр. Q , $h > 0$: Π_h лежит внутри Q .

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{11}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{12}, \quad u - u_0 = \Delta u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) = a_{21}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) = a_{22}, \quad v - v_0 = \Delta v$$

$$J_0 = J(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} D(x, y) \\ D(u, v) \end{vmatrix}_{(u_0, v_0)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_1 = \max \left(\max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial u} \right|, \max_{(u, v) \in Q} \left| \frac{\partial y}{\partial v} \right| \right)$$

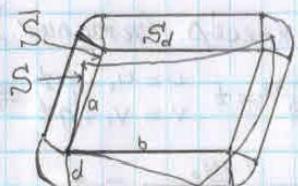
$$M_2 = \max \text{ из всех } 2 \times 2 \text{ квадратных под-обл.}$$

$$\Pi_h \rightarrow S \subset P \Rightarrow \frac{m(S)}{m(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2 h(M_1 + 2M_2 h).$$

$$D\text{-л.о. } x = x(u, v) = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \Delta v^2 \right]$$

$$y = y(u, v) = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \Delta v^2 \right]$$

(~ означает, что при этом дифф. в промежуточной точке)



$$S \subset \bar{S} \cup S_d$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) \quad \text{линейное} \\ \bar{y} &= y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) \quad \text{преобраз.} \end{aligned}$$

$$\Pi_h \rightarrow \bar{S} - \text{параллелограмм}, \quad \frac{m(\bar{S})}{m(\Pi_h)} = |J_0|$$

$$\begin{cases} |x(u, v) - \bar{x}(u, v)| \leq 2M_2 h^2 \\ |y(u, v) - \bar{y}(u, v)| \leq 2M_2 h^2 \end{cases}$$

$$d = \sup \rho((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \leq 2M_2 h^2 \sqrt{2} \leq 3M_2 h^2$$

$$m(S_d) = (2a + 2b)d + \pi d^2 \leq 2d(a + b + 2d)$$

$$a = \sqrt{(a_{11}h)^2 + (a_{21}h)^2} \leq \frac{3}{2} M_1 h, \text{ аналогично } b \leq \frac{3}{2} M_1 h \Rightarrow$$

$$m(S) \leq m(\bar{S}) + m(S_d) \leq m(\bar{S}) + 2d(a + b + 2d) \leq m(\bar{S}) + 2d(3M_1 h + 2d) \leq$$

$$\leq m(\bar{S}) + 6M_2 h^2 (3M_1 h + 6M_2 h^2) \Rightarrow (m(\Pi_h) = h^2) \Rightarrow$$

$$\frac{m(S)}{m(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18M_2 h(M_1 + 2M_2 h)$$

Лемма доказана.

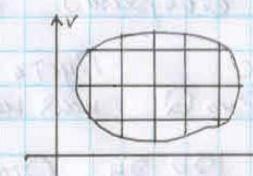
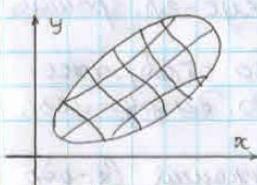
T. Q-орг. замкн. квадр. обл. $x = x(u, v) \in C_2$ - это однород.

бз.-одн. и бз. непр. дифф. $Q \leftrightarrow P$ -орг. замкн. квадр. обл.
 $J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, $f(x, y)$ непр. на P . Тогда

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \iint_Q f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

D-л.о. $J(u, v) \neq 0$. Все эти условия cumplены, значит $|f(x, y)| \leq M$

$$1) f(x, y) \geq 0, \text{ т.е. } 0 \leq f(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in P$$



Напомним из Q
квадратную сетку
со стороной h

Q разбивается на N_h небольших квадратов с одинаковой стороной h .

$$\lim_{h \rightarrow 0} N_h \cdot h^2 = \mu(Q) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(Q)}{N_h h^2} = 1, \text{ т.е. } N_h \leq \frac{2m(Q)}{h^2}$$

$\Pi_i \leftrightarrow P_i, (u_i, v_i) \rightarrow (x_i, y_i)$. По лемме

$$\begin{aligned} m(P_i) &\leq |J(u_i, v_i)| m(\Pi_i) + 18M_2 h^3 (M_1 + 2M_2 h) \\ \sum_{i=1}^{N_h} f(x_i, y_i) m(P_i) &\leq \underbrace{\sum_{i=1}^{N_h} \varphi(u_i, v_i) m(\Pi_i)}_{\Omega_{\bar{P}}(\varphi, K_i)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_h} M \cdot 18M_2 h^3 (M_1 + 2M_2 h)}_{\Omega_{\bar{P}}(\varphi, \{K_i\})} \\ h \rightarrow 0 \Rightarrow \delta_{\bar{P}} &\rightarrow 0, \quad \delta_{\bar{P}} \rightarrow 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\iint_P f(x, y) dx dy \leq \iint_Q f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

Рассмотрим обратное пр-ве $\Rightarrow =$.

$$2) f(x, y) - \text{произв. знака } M = \max_{(x, y) \in P} |f(x, y)|$$

$$f_+(x, y) = M \geq 0, \quad f_-(x, y) = M - f(x, y) \geq 0$$

$$f(x, y) = f_+(x, y) - f_-(x, y).$$

Теор. Декартов

$$m(P) = \iint_P dx dy = \iint_Q |J(u, v)| du dv$$

dx dy - элемент площади
 $|J(u, v)| du dv$ - $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
 в краев. к-тах