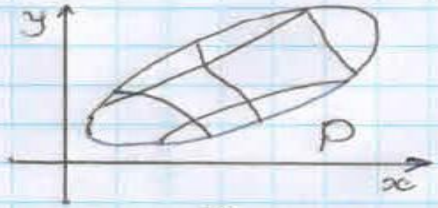
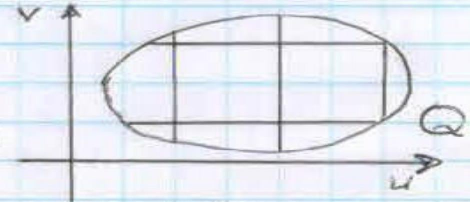
Замена переменных в двойных интегралах



$x = x(u, v)$
$y = y(u, v)$ — отображение Q на P



$(x,y) \in P$ — огран. замкн. квадр. обл. с кус.-гл. границей

$Q \leftrightarrow P$ (вз.-одн. отображ.)

$(u,v) \in Q$ — огран. замкн. квадр. обл. с кус.-гл. границей

$u = u(x,y)$
$v = v(x,y)$ — обратное отобр. P на Q

Пусть оба отображения непр. дифф-мы.

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Отображения вз.-обр. $\Rightarrow$ их матрицы вз.-обр $\Rightarrow$ их якобианы вз.-обр.

$$\Rightarrow \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \cdot \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = 1.$$

Оба якобиана непр. ф-ии $\Rightarrow$ они сохр. знак в своей обл.

Внутр. точка перейдёт во внутр., граница — в границу.

Кус.-гл. кривая перейдёт в кус.-гл. кривую:

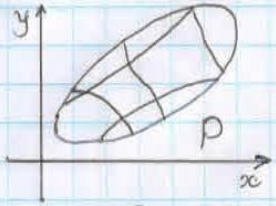
$u = u(t)$
$v = v(t)$ — гладкий кусок $\Rightarrow$ $x(t) = x(u(t), v(t))$, $y(t) = y(u(t), v(t))$ $\Rightarrow$ $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial x}{\partial v}\dot{v}$, $\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial y}{\partial v}\dot{v}$ — гладкий кусок

$v = v_0$ перейдёт в гл. кривую $x = x(u, v_0)$, $y = y(u, v_0)$ — координатная u-линия

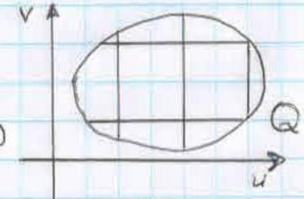
$u = u_0$ ——, ——, —— $x = x(u_0, v)$, $y = y(u_0, v)$ — координатная v-линия

Получаются криволинейные координаты

Замена переменных в двойных интегралах



$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \text{ – отображение } Q \text{ на } P$$



$(x,y)\in P$ – огран. замкн. квадр. обл. с кус.-гл. границей

$Q \leftrightarrow P$ (вз.-одн. отображ.)

$(u,v)\in Q$ – огран. замкн. квадр. обл. с кус.-гл. границей

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \text{ – обратное отобр. } P \text{ на } Q$$

Пусть оба отображения непр. дифф-мы.

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Отображения вз.-обр. $\Rightarrow$ их матрицы вз.-обр $\Rightarrow$ их якобианы вз.-обр.

$$\Rightarrow \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \cdot \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = 1.$$

Оба якобиана непр. ф-ии $\Rightarrow$ они сохр. знак в своей обл.

Внутр. точка перейдёт во внутр., граница – в границу.

Кус.-гл. кривая перейдёт в кус.-гл. кривую:

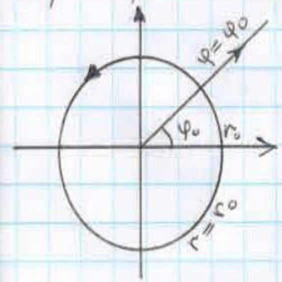
$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \text{ – гладкий кусок} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x(u(t),v(t)) \\ y(t) = y(u(t),v(t)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x = \frac{\partial x}{\partial u}\dot u + \frac{\partial x}{\partial v}\dot v \\ \dot y = \frac{\partial y}{\partial u}\dot u + \frac{\partial y}{\partial v}\dot v \end{cases} \text{ – гладкий кусок}$$

$v = v_0$ перейдёт в гл. кривую $\begin{cases} x = x(u,v_0) \\ y = y(u,v_0) \end{cases}$ – координатная u-линия

$u = u_0$ ——, ——, ——, — $\begin{cases} x = x(u_0,v) \\ y = y(u_0,v) \end{cases}$ – координатная v-линия

Получаются криволинейные координаты

Пример 1. Полярные координаты.



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad r \geq 0, \; -\pi < \varphi \leq \pi \; (\text{или } 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

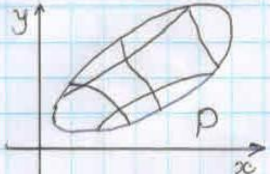
$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$, т. е. при $r > 0$ – вз.-одн.

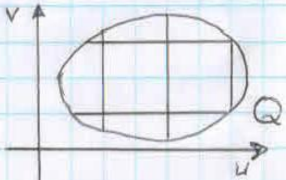
$r = r_0 \Rightarrow \begin{cases} x = r_0\cos\varphi \\ y = r_0\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r_0^2$ окружность радиуса r_0

$\varphi = \varphi_0 \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\varphi_0 \\ y = r\sin\varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x} = tg\,\varphi_0$ – луч (т.к. $r \geq 0$) под $\angle \varphi_0$ к оси

Замена переменных в двойных интегралах



$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$$ – отображение Q на P



$(x,y)\in P$ – огран. замкн. квадр. обл. с кус.-гл. границей

$Q \leftrightarrow P$ (вз.-одн. отображ.)

$(u,v)\in Q$ – огран. замкн. квадр. обл. с кус.-гл. границей

$u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ – обратное отобр. P на Q. Пусть оба отображения непр. дифф-мы.

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Отображения вз.-обр. $\Rightarrow$ их матрицы вз.-обр $\Rightarrow$ их якобианы вз.-обр.

$$= \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \cdot \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = 1.$$ Оба якобиана непр. ф-ии $\Rightarrow$ они сохр. знак в своей обл.

Внутр. точка перейдёт во внутр., граница – в границу.

Кус.-гл. кривая перейдёт в кус.-гл. кривую:

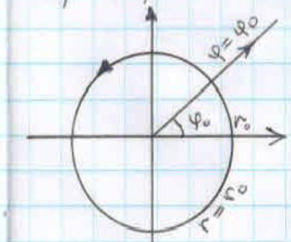
$u = u(t)$, $v = v(t)$ – гладкий кусок $\Rightarrow$ $x(t) = x(u(t),v(t))$, $y(t) = y(u(t),v(t))$ $\Rightarrow$ $\dot x = \frac{\partial x}{\partial u}\dot u + \frac{\partial x}{\partial v}\dot v$, $\dot y = \frac{\partial y}{\partial u}\dot u + \frac{\partial y}{\partial v}\dot v$ – гладкий кусок

$v = v_0$ перейдёт в гл. кривую $x = x(u,v_0)$, $y = y(u,v_0)$ – координатная u-линия

$u = u_0$ ——, ——, ——, — $x = x(u_0,v)$, $y = y(u_0,v)$ – координатная v-линия

Получаются криволинейные координаты

Пример 1. Полярные координаты.



$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$; $r \geq 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$ (или $0 \leq \varphi < 2\pi$)

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$, т.е. при $r > 0$ – вз.-одн.

$r = r_0 \Rightarrow x = r_0\cos\varphi$, $y = r_0\sin\varphi$ $\Rightarrow x^2 + y^2 = r_0^2$ окружность радиуса r_0

$\varphi = \varphi_0 \Rightarrow x = r\cos\varphi_0$, $y = r\sin\varphi_0$ $\Rightarrow \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi_0$ – луч (т.к. $r \geq 0$) под $\angle\varphi_0$ к оси

Пример 2. Линейное отображение.

$x = x_0 + a_{11}(u-u_0) + a_{12}(v-v_0)$, $y = y_0 + a_{21}(u-u_0) + a_{22}(v-v_0)$; $J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

При $J \neq 0$ можно получить обратное преобр. (тоже лин.)

Прямая на пл-сти (u,v): $\frac{u-u_0}{p} = \frac{v-v_0}{q} = t$, $u = u_0 + pt$, $v = v_0 + qt$ $\Rightarrow$

$x = x_0 + a_{11}pt + a_{12}qt$, $y = y_0 + a_{21}pt + a_{22}qt$, т.е. $\frac{x-x_0}{a_{11}p + a_{12}q} = \frac{y-y_0}{a_{21}p + a_{22}q} = t$

Прямая перейдёт в прямую, ||-ые прямые – в ||-ые, т.е. параллелограмм – в параллелограмм.

$\Pi_h \subset Ouv$ – квадрат с вершинами: (u_0,v_0), (u_0+h,v_0), (u_0,v_0+h), (u_0+h,v_0+h)

перейдёт в $S \subset Oxy$ с верш.: (x_0,y_0), $(x_0+a_{11}h, y_0+a_{21}h)$, $(x_0+a_{12}h, y_0+a_{22}h)$, $(x_0+a_{11}h+a_{12}h, y_0+a_{21}h+a_{22}h)$

Стороны S: $\vec a = \{a_{11}h, a_{21}h\}$, $\vec b = \{a_{12}h, a_{22}h\}$, $\Rightarrow$ его площадь $|[\vec a, \vec b]| =$

$$= \mathrm{mod}\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ a_{11}h & a_{21}h & 0 \\ a_{12}h & a_{22}h & 0 \end{vmatrix} = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} a_{11}h & a_{21}h \\ a_{12}h & a_{22}h \end{vmatrix} = |J|\cdot h^2, \text{ т.е. } \frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} = |J|$$

Лемма $\left.\begin{array}{l} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{array}\right\} \in C_2$ в огран. замкн. квадр. обл. Q вз.-одн. и вз. непр. дифф. $Q \leftrightarrow P$

(u_0, v_0) внутр. т. Q, $h>0$: Π_h лежит внутри Q.

$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) = a_{11}$, $\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) = a_{12}$ $\quad u-u_0=\Delta u$

$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) = a_{21}$, $\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) = a_{22}$ $\quad v-v_0=\Delta v$

$$J_0 = J(u_0,v_0) = \left.\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_1 = \max\left(\max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|, \max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|, \max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial y}{\partial u}\right|, \max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial y}{\partial v}\right|\right)$$

$M_2 = \max$ из всех 2-~~ых~~х пр-ных

$$\Pi_h \to S \subset P \Rightarrow \frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} \leq |J_0| + 18 M_2 h (M_1 + 2 M_2 h).$$

<u>Лемма</u> $\begin{matrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{matrix} \in C_2$ в огран. замкн. квадр. обл. Q, вз.-одн. и вз. непр. дифф. $Q \leftrightarrow P$

(u_0, v_0) внутр. т. Q, $h > 0$: Π_h лежит внутри Q.

$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) = a_{11}$, $\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) = a_{12}$ $\quad u - u_0 = \Delta u$

$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) = a_{21}$, $\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) = a_{22}$ $\quad v - v_0 = \Delta v$

$$J_0 = J(u_0,v_0) = \left.\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_1 = \max\left(\max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|, \max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|, \max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial y}{\partial u}\right|, \max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial y}{\partial v}\right| \right)$$

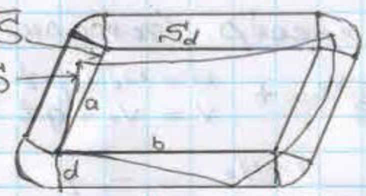
$M_2 = \max$ из всех 2-~~ых~~х пр-ных

$$\Pi_h \to S \subset P \Rightarrow \frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} \le |J_0| + 18 M_2 h (M_1 + 2M_2 h).$$

Д-во. $x = x(u,v) = x_0 + a_{11}(u-u_0) + a_{12}(v-v_0) + \frac{1}{2}\left[\widetilde{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}}\Delta u^2 + 2\widetilde{\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}}\Delta u \Delta v + \widetilde{\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}}\Delta v^2\right]$

$y = y(u,v) = y_0 + a_{21}(u-u_0) + a_{22}(v-v_0) + \frac{1}{2}\left[\widetilde{\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}}\Delta u^2 + 2\widetilde{\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}}\Delta u \Delta v + \widetilde{\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}}\Delta v^2\right]$

($\sim$ означает, что пр-ые берутся в промежуточной точке)



$\bar x = x_0 + a_{11}(u-u_0) + a_{12}(v-v_0)$ — линейное

$\bar y = y_0 + a_{21}(u-u_0) + a_{22}(v-v_0)$ преобраз.

$\Pi_h \to \bar S$ - параллелограмм, $\frac{\mu(\bar S)}{\mu(\Pi_h)} = |J_0|$

$S \subset \bar S \cup S_d$

$|x(u,v) - \bar x(u,v)| \le 2M_2 h^2$

$|y(u,v) - \bar y(u,v)| \le 2M_2 h^2$

$d = \sup \rho((x,y),(\bar x, \bar y)) \le 2M_2 h^2 \sqrt{2} \le 3M_2 h^2$

$\mu(S_d) = (2a + 2b)d + \pi d^2 \le 2d(a+b+2d)$

$a = \sqrt{(a_{11}h)^2 + (a_{21}h)^2} \le \frac{3}{2}M_1 h$, анал. $b \le \frac{3}{2}M_1 h \Rightarrow$

$\mu(S) \le \mu(\bar S) + \mu(S_d) \le \mu(\bar S) + 2d(a+b+2d) \le \mu(\bar S) + 2d(3M_1 h + 2d) \le$

$\le \mu(\bar S) + 6M_2 h^2 (3M_1 h + 6M_2 h^2) \Rightarrow (\mu(\Pi_h) = h^2) \Rightarrow$

$\frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} \le |J_0| + 18 M_2 h (M_1 + 2M_2 h)$ $\quad$ Лемма доказана.

Лемма $\begin{matrix} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{matrix} \in C_2$ в огран. замкн. квадр. обл. Q вз.-одн. и вз. непр. дифф. $Q\leftrightarrow P$

(u_0,v_0) внутр. т. Q, $h>0$: Π_h лежит внутри Q.

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)=a_{11},\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)=a_{12} \qquad u-u_0=\Delta u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)=a_{21},\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)=a_{22} \qquad v-v_0=\Delta v$$

$$J_0=J(u_0,v_0)=\left.\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

$$M_1=\max\left(\max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|, \max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|, \max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial y}{\partial u}\right|, \max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial y}{\partial v}\right|\right)$$

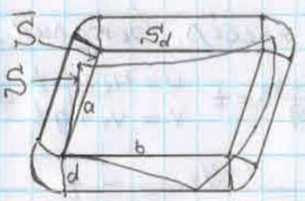
$M_2=\max$ из всех 2-ых пр-ных

$$\Pi_h\to S\subset P \Rightarrow \frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)}\leq |J_0|+18M_2h(M_1+2M_2h).$$

Д-во. $x=x(u,v)=x_0+a_{11}(u-u_0)+a_{12}(v-v_0)+\frac{1}{2}\left[\widetilde{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}}\Delta u^2+2\widetilde{\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}}\Delta u\Delta v+\widetilde{\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}}\Delta v^2\right]$

$y=y(u,v)=y_0+a_{21}(u-u_0)+a_{22}(v-v_0)+\frac{1}{2}\left[\widetilde{\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}}\Delta u^2+2\widetilde{\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}}\Delta u\Delta v+\widetilde{\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}}\Delta v^2\right]$

(~ означает, что пр-ые берутся в промежуточной точке)



$\bar x=x_0+a_{11}(u-u_0)+a_{12}(v-v_0)$ — линейное
$\bar y=y_0+a_{21}(u-u_0)+a_{22}(v-v_0)$ преобраз.

$\Pi_h\to\bar S$ - параллелограмм, $\frac{\mu(\bar S)}{\mu(\Pi_h)}=|J_0|$

$S\subset\bar S\cup S_d$

$|x(u,v)-\bar x(u,v)|\leq 2M_2h^2$
$|y(u,v)-\bar y(u,v)|\leq 2M_2h^2$

$d=\sup\rho((x,y),(\bar x,\bar y))\leq 2M_2h^2\sqrt2\leq 3M_2h^2$

$\mu(S_d)=(2a+2b)d+\pi d^2\leq 2d(a+b+2d)$

$a=\sqrt{(a_{11}h)^2+(a_{21}h)^2}\leq\frac32 M_1h$, анал. $b\leq\frac32M_1h \Rightarrow$

$\mu(S)\leq\mu(\bar S)+\mu(S_d)\leq\mu(\bar S)+2d(a+b+2d)\leq\mu(\bar S)+2d(3M_1h+2d)\leq$
$\leq\mu(\bar S)+6M_2h^2(3M_1h+6M_2h^2)\Rightarrow(\mu(\Pi_h)=h^2)\Rightarrow$

$$\frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)}\leq|J_0|+18M_2h(M_1+2M_2h)$$

Лемма доказана.

Т. Q - огр. замкн. квадр. обл. $\begin{matrix} x=x(u,v) \\ y=y(u,v)\end{matrix}\in C_2$ - это отображ. вз-одн. и вз. непр. дифф. $Q\leftrightarrow P$ - огр. замкн. квадр. обл. $J(u,v)=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$, $f(x,y)$ непр. на P. Тогда

$$\iint_P f(x,y)\,dxdy=\iint_Q f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv.$$

Лемма $\begin{matrix} x=x(u,v) \\ y=y(u,v)\end{matrix} \in C_2$ в огран. замкн. квадр. обл. Q вз.-одн. и вз. непр. дифф. $Q\leftrightarrow P$

(u_0,v_0) внутр. т. Q, $h>0$: Π_h лежит внутри Q.

$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)=a_{11}$, $\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)=a_{12}$ $\quad u-u_0=\Delta u$

$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)=a_{21}$, $\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)=a_{22}$ $\quad v-v_0=\Delta v$

$$J_0=J(u_0,v_0)=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big|_{(u_0,v_0)}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$$

$$M_1=\max\left(\max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|,\max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|,\max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial y}{\partial u}\right|,\max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial y}{\partial v}\right|\right)$$

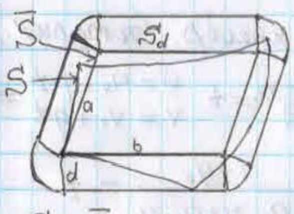
$M_2=\max$ из всех 2-ых пр-ных

$$\Pi_h\to S\subset P\Rightarrow\frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)}\le|J_0|+18M_2h(M_1+2M_2h).$$

Д-во. $x=x(u,v)=x_0+a_{11}(u-u_0)+a_{12}(v-v_0)+\frac12\left[\widetilde{\frac{\partial^2x}{\partial u^2}}\Delta u^2+2\widetilde{\frac{\partial^2x}{\partial u\partial v}}\Delta u\Delta v+\widetilde{\frac{\partial^2x}{\partial v^2}}\Delta v^2\right]$

$y=y(u,v)=y_0+a_{21}(u-u_0)+a_{22}(v-v_0)+\frac12\left[\widetilde{\frac{\partial^2y}{\partial u^2}}\Delta u^2+2\widetilde{\frac{\partial^2y}{\partial u\partial v}}\Delta u\Delta v+\widetilde{\frac{\partial^2y}{\partial v^2}}\Delta v^2\right]$

(~ означает, что пр-ые берутся в промежуточной точке)



$\bar x=x_0+a_{11}(u-u_0)+a_{12}(v-v_0)$ — линейное
$\bar y=y_0+a_{21}(u-u_0)+a_{22}(v-v_0)$ преобраз.

$\Pi_h\to\bar S$ — параллелограмм, $\frac{\mu(\bar S)}{\mu(\Pi_h)}=|J_0|$

$S\subset\bar S\cup S_d$ $\quad |x(u,v)-\bar x(u,v)|\le 2M_2h^2$
$\quad |y(u,v)-\bar y(u,v)|\le 2M_2h^2$

$d=\sup\rho((x,y),(\bar x,\bar y))\le 2M_2h^2\sqrt2\le 3M_2h^2$

$\mu(S_d)=(2a+2b)d+\pi d^2\le 2d(a+b+2d)$

$a=\sqrt{(a_{11}h)^2+(a_{21}h)^2}\le\frac32M_1h$; анал. $b\le\frac32M_1h\Rightarrow$

$\mu(S)\le\mu(\bar S)+\mu(S_d)\le\mu(\bar S)+2d(a+b+2d)\le\mu(\bar S)+2d(3M_1h+2d)\le$

$\le\mu(\bar S)+6M_2h^2(3M_1h+6M_2h^2)\Rightarrow(\mu(\Pi_h)=h^2)\Rightarrow$

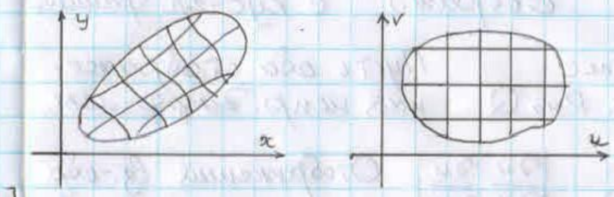
$$\frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)}\le|J_0|+18M_2h(M_1+2M_2h)$$ Лемма доказана.

Т. Q — огр. замкн. квадр. обл. $\begin{matrix} x=x(u,v) \\ y=y(u,v)\end{matrix}\in C_2$ — это отображ. вз-одн. и вз. непр. дифф. $Q\leftrightarrow P$ — огр. замкн. квадр. обл. $J(u,v)=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$, $f(x,y)$ непр. на P. Тогда

$$\iint_P f(x,y)\,dxdy=\iint_Q\underbrace{f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|}_{\varphi(u,v)}\,dudv.$$

Д-во. $J(u,v)\ne0$. Все интегралы существуют. Пусть $|f(x,y)|\le M$

1) $f(x,y)\ge0$, т.е. $0\le f(x,y)\le M\ \forall(x,y)\in P$



Наложим на Q квадратную сетку со стороной h

Q разобьётся на N_h полных или неполных квадратов Π_i

$\lim\limits_{h\to0}N_h\cdot h^2=\mu(Q)\Rightarrow\lim\limits_{h\to0}\frac{\mu(Q)}{N_hh^2}=1$, т.е. $N_h\le\frac{2\mu(Q)}{h^2}$

$\Pi_i\leftrightarrow P_i$ $\quad(u_i,v_i)\to(x_i,y_i)$. По лемме

$\mu(P_i)\le|J(u_i,v_i)|\mu(\Pi_i)+18M_2h^3(M_1+2M_2h)$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N_h}f(x_i,y_i)\mu(P_i)}_{\sigma_\tau(f,K_i)}\le\underbrace{\sum_{i=1}^{N_h}\varphi(u_i,v_i)\mu(\Pi_i)}_{\sigma_{\tilde\tau}(\varphi,\{\tilde K_i\})}+\underbrace{\sum_{i=1}^{N_h}M\cdot18M_2h^3(M_1+2M_2h)}_{\le 36MM_2\mu(Q)h(M_1+2M_2h)}$$

$h\to0\Rightarrow\delta_\tau\to0,\ \delta_{\tilde\tau}\to0\Rightarrow$

$$\iint_P f(x,y)\,dxdy\le\iint_Q f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\,dudv$$

Лемма $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ $\in C_2$ в огран. замкн. квадр. обл. Q вз.-одн. и вз. непр. дифф. $Q\leftrightarrow P$

(u_0,v_0) внутр. т. Q, $h>0$: Π_h лежит внутри Q.

$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)=a_{11}, \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)=a_{12}$ $\quad u-u_0=\Delta u$

$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)=a_{21}, \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)=a_{22}$ $\quad v-v_0=\Delta v$

$J_0=J(u_0,v_0)=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big|_{(u_0,v_0)}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$

$M_1=\max\left(\max\limits_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|, \max\limits_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|, \max\limits_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial y}{\partial u}\right|, \max\limits_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial y}{\partial v}\right|\right)$

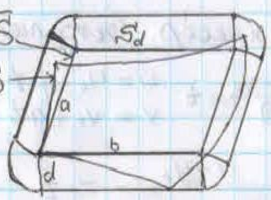
$M_2=\max$ из всех 2-ых пр-ных

$\Pi_h\to S\subset P \Rightarrow \frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)}\le |J_0|+18M_2h(M_1+2M_2h)$.

Д-во. $x=x(u,v)=x_0+a_{11}(u-u_0)+a_{12}(v-v_0)+\frac12\left[\widetilde{\frac{\partial^2x}{\partial u^2}}\Delta u^2+2\widetilde{\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}}\Delta u\Delta v+\widetilde{\frac{\partial^2x}{\partial v^2}}\Delta v^2\right]$

$y=y(u,v)=y_0+a_{21}(u-u_0)+a_{22}(v-v_0)+\frac12\left[\widetilde{\frac{\partial^2y}{\partial u^2}}\Delta u^2+2\widetilde{\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}}\Delta u\Delta v+\widetilde{\frac{\partial^2y}{\partial v^2}}\Delta v^2\right]$

(~ означает, что пр-ые берутся в промежуточной точке)



$\bar x=x_0+a_{11}(u-u_0)+a_{12}(v-v_0)$ — линейное

$\bar y=y_0+a_{21}(u-u_0)+a_{22}(v-v_0)$ преобраз.

$\Pi_h\to\bar S$ - параллелограмм, $\frac{\mu(\bar S)}{\mu(\Pi_h)}=|J_0|$

$|x(u,v)-\bar x(u,v)|\le 2M_2h^2$

$|y(u,v)-\bar y(u,v)|\le 2M_2h^2$

$S\subset\bar S\cup S_d$

$d=\sup\rho((x,y),(\bar x,\bar y))\le 2M_2h^2\sqrt2\le 3M_2h^2$

$\mu(S_d)=(2a+2b)d+\pi d^2\le 2d(a+b+2d)$

$a=\sqrt{(a_{11}h)^2+(a_{21}h)^2}\le\frac32M_1h$; анал. $b\le\frac32M_1h \Rightarrow$

$\mu(S)\le\mu(\bar S)+\mu(S_d)\le\mu(\bar S)+2d(a+b+2d)\le\mu(\bar S)+2d(3M_1h+2d)\le$

$\le\mu(\bar S)+6M_2h^2(3M_1h+6M_2h^2)\Rightarrow(\mu(\Pi_h)=h^2)\Rightarrow$

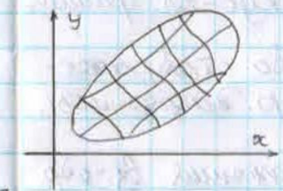
$\frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)}\le|J_0|+18M_2h(M_1+2M_2h)$ Лемма доказана.

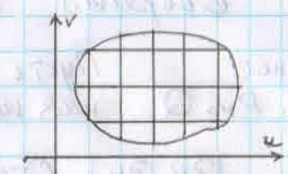
Т. Q - огр. замкн. квадр. обл. $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ $\in C_2$ - это отображ. вз.-одн. и вз. непр. дифф. $Q\leftrightarrow P$ - огр. замкн. квадр. обл. $J(u,v)=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$, $f(x,y)$ непр. на P. Тогда

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_Q \underbrace{f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|}_{\varphi(u,v)}\,dudv.$$

Д-во. $J(u,v)\ne0$. Все интегралы существуют. Пусть $|f(x,y)|\le M$

1) $f(x,y)\ge0$, т.е. $0\le f(x,y)\le M$ $\forall(x,y)\in P$





Наложим на Q квадратную сетку со стороной h

Q разбьётся на N_h полных или неполных квадратов Π_i

$\lim\limits_{h\to0}N_h\cdot h^2=\mu(Q)\Rightarrow\lim\limits_{h\to0}\frac{\mu(Q)}{N_hh^2}=1$, т.е. $N_h\le\frac{2\mu(Q)}{h^2}$

$\Pi_i\leftrightarrow P_i$ $\quad(u_i,v_i)\to(x_i,y_i)$. По лемме

$\mu(P_i)\le|J(u_i,v_i)|\mu(\Pi_i)+18M_2h^3(M_1+2M_2h)$

$\underbrace{\sum_{i=1}^{N_h}f(x_i,y_i)\mu(P_i)}_{\sigma_T(f,K_i)}\le\underbrace{\sum_{i=1}^{N_h}\varphi(u_i,v_i)\mu(\Pi_i)}_{\sigma_{\tilde T}(\varphi,\{\tilde K_i\})}+\underbrace{\sum_{i=1}^{N_h}M\cdot18M_2h^3(M_1+2M_2h)}_{\le 36MM_2\mu(Q)h(M_1+2M_2h)}$

$h\to0\Rightarrow\delta_T\to0,\ \delta_{\tilde T}\to0\Rightarrow$

$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy\le\iint\limits_Q f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\,dudv$

Рассмотрим обратное пр-ие $\Rightarrow =$.

Лемма $\begin{matrix} x=x(u,v) \\ y=y(u,v)\end{matrix} \in C_2$ в огран. замкн. квадр. обл. Q вз.-одн. и вз. непр. дифф. $Q \leftrightarrow P$

(u_0,v_0) внутр. т. Q, $h>0$: Π_h лежит внутри Q.

$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)=a_{11}$, $\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)=a_{12}$ $\quad u-u_0=\Delta u$

$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)=a_{21}$, $\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)=a_{22}$ $\quad v-v_0=\Delta v$

$$J_0=J(u_0,v_0)=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big|_{(u_0,v_0)}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

$$M_1=\max\left(\max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|, \max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|, \max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial y}{\partial u}\right|, \max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial y}{\partial v}\right|\right)$$

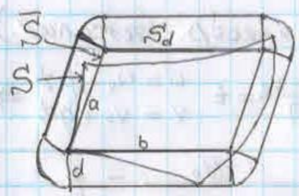
$M_2 = \max$ из всех 2-ых пр-ных

$$\Pi_h \to S\subset P \Rightarrow \frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)} \le |J_0| + 18M_2h(M_1+2M_2h).$$

Д-во. $x=x(u,v)=x_0+a_{11}(u-u_0)+a_{12}(v-v_0)+\frac{1}{2}\left[\widetilde{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}}\Delta u^2+2\widetilde{\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}}\Delta u\Delta v+\widetilde{\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}}\Delta v^2\right]$

$y=y(u,v)=y_0+a_{21}(u-u_0)+a_{22}(v-v_0)+\frac{1}{2}\left[\widetilde{\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}}\Delta u^2+2\widetilde{\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}}\Delta u\Delta v+\widetilde{\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}}\Delta v^2\right]$

($\sim$ означает, что пр-ые берутся в промежуточной точке)



$\bar{x}=x_0+a_{11}(u-u_0)+a_{12}(v-v_0)$ – линейное
$\bar{y}=y_0+a_{21}(u-u_0)+a_{22}(v-v_0)$ преобраз.

$\Pi_h \to \bar S$ - параллелограмм, $\frac{\mu(\bar S)}{\mu(\Pi_h)}=|J_0|$

$S\subset \bar S \cup S_d$ $\quad |x(u,v)-\bar x(u,v)|\le 2M_2h^2$
$\quad |y(u,v)-\bar y(u,v)|\le 2M_2h^2$

$d=\sup\rho((x,y),(\bar x,\bar y))\le 2M_2h^2\sqrt{2}\le 3M_2h^2$

$\mu(S_d)=(2a+2b)d+\pi d^2\le 2d(a+b+2d)$

$a=\sqrt{(a_{11}h)^2+(a_{21}h)^2}\le \frac{3}{2}M_1h$; анал. $b\le\frac{3}{2}M_1h \Rightarrow$

$\mu(S)\le\mu(\bar S)+\mu(S_d)\le\mu(\bar S)+2d(a+b+2d)\le\mu(\bar S)+2d(3M_1h+2d)\le$

$\le\mu(\bar S)+6M_2h^2(3M_1h+6M_2h^2)\Rightarrow(\mu(\Pi_h)=h^2)\Rightarrow$

$$\frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)}\le|J_0|+18M_2h(M_1+2M_2h)$$

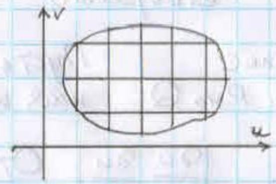
Лемма доказана.

Т. Q - огр. замкн. квадр. обл. $\begin{matrix} x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{matrix}\in C_2$ – это отображ. вз-одн. и вз. непр. дифф. $Q\leftrightarrow P$ – огр. замкн. квадр. обл. $J(u,v)=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$, $f(x,y)$ непр. на P. Тогда

$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy=\iint_Q \underbrace{f(x(u,v),y(u,v))}_{\varphi(u,v)}|J(u,v)|\,du\,dv.$$

Д-во. $J(u,v)\ne0$. Все интегралы существуют. Пусть $|f(x,y)|\le M$

1) $f(x,y)\ge0$, т.е. $0\le f(x,y)\le M$ $\forall(x,y)\in P$



Наложим на Q квадратную сетку со стороной h

Q разобьётся на N_h полных или неполных квадратов Π_i:

$\lim\limits_{h\to0}N_h\cdot h^2=\mu(Q)\Rightarrow\lim\limits_{h\to0}\frac{\mu(Q)}{N_h h^2}=1$, т.е. $N_h\le\frac{2\mu(Q)}{h^2}$

$\Pi_i\leftrightarrow P_i$ $\quad (u_i,v_i)\to(x_i,y_i)$. По лемме

$\mu(P_i)\le|J(u_i,v_i)|\mu(\Pi_i)+18M_2h^3(M_1+2M_2h)$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N_h}f(x_i,y_i)\mu(P_i)}_{\sigma_T(f,K_i)}\le\underbrace{\sum_{i=1}^{N_h}\varphi(u_i,v_i)\mu(\Pi_i)}_{\sigma_{\tilde T}(\varphi,\{\tilde K_i\})}+\underbrace{\sum_{i=1}^{N_h}M\cdot18M_2h^3(M_1+2M_2h)}_{\le 36MM_2\mu(Q)h(M_1+2M_2h)}$$

$h\to0\Rightarrow\delta_T\to0,\ \delta_{\tilde T}\to0\Rightarrow$

$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy\le\iint_Q f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\,du\,dv$$

Рассмотрим обратное пр-ие $\Rightarrow =$.

2) $f(x,y)$ - произв. знака $M=\max\limits_{(x,y)\in P}|f(x,y)|$

$f_1(x,y)=M\ge0$, $f_2(x,y)=M-f(x,y)\ge0$

$f(x,y)=f_1(x,y)-f_2(x,y)$. Теор. доказана

Лемма $\left.\begin{array}{l} x=x(u,v) \\ y=y(u,v)\end{array}\right\} \in C_2$ в огран. замкн. квадр. обл. Q вз.-одн. и вз. непр. дифф. $Q\leftrightarrow P$

(u_0,v_0) внутр. т. Q, $h>0$: Π_h лежит внутри Q.

$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)=a_{11}$, $\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)=a_{12}$ $\quad u-u_0=\Delta u$

$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)=a_{21}$, $\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)=a_{22}$ $\quad v-v_0=\Delta v$

$$J_0=J(u_0,v_0)=\left.\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$$

$$M_1=\max\left(\max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|,\max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|,\max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial y}{\partial u}\right|,\max_{(u,v)\in Q}\left|\frac{\partial y}{\partial v}\right|\right)$$

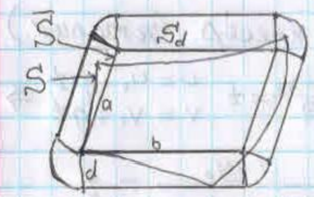
M_2 = max из всех 2-х пр-ых

$$\Pi_h\to S\subset P \Rightarrow \frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)}\le|J_0|+18M_2h(M_1+2M_2h).$$

Д-во. $x=x(u,v)=x_0+a_{11}(u-u_0)+a_{12}(v-v_0)+\frac{1}{2}\left[\widetilde{\frac{\partial^2x}{\partial u^2}}\Delta u^2+2\widetilde{\frac{\partial^2x}{\partial u\partial v}}\Delta u\Delta v+\widetilde{\frac{\partial^2x}{\partial v^2}}\Delta v^2\right]$

$y=y(u,v)=y_0+a_{21}(u-u_0)+a_{22}(v-v_0)+\frac{1}{2}\left[\widetilde{\frac{\partial^2y}{\partial u^2}}\Delta u^2+2\widetilde{\frac{\partial^2y}{\partial u\partial v}}\Delta u\Delta v+\widetilde{\frac{\partial^2y}{\partial v^2}}\Delta v^2\right]$

($\sim$ означает, что пр-ые берутся в промежуточной точке)



$\left.\begin{array}{l}\bar x=x_0+a_{11}(u-u_0)+a_{12}(v-v_0)\\ \bar y=y_0+a_{21}(u-u_0)+a_{22}(v-v_0)\end{array}\right\}$ — линейное преобраз.

$\Pi_h\to\bar S$ — параллелограмм, $\frac{\mu(\bar S)}{\mu(\Pi_h)}=|J_0|$

$S\subset\bar S\cup S_d$ $\quad |x(u,v)-\bar x(u,v)|\le 2M_2h^2$
$\quad |y(u,v)-\bar y(u,v)|\le 2M_2h^2$

$d=\sup\rho((x,y),(\bar x,\bar y))\le 2M_2h^2\sqrt2\le 3M_2h^2$

$\mu(S_d)=(2a+2b)d+\pi d^2\le 2d(a+b+2d)$

$a=\sqrt{(a_{11}h)^2+(a_{21}h)^2}\le\frac{3}{2}M_1h$, анал. $b\le\frac{3}{2}M_1h\Rightarrow$

$\mu(S)\le\mu(\bar S)+\mu(S_d)\le\mu(\bar S)+2d(a+b+2d)\le\mu(\bar S)+2d(3M_1h+2d)\le$

$\le\mu(\bar S)+6M_2h^2(3M_1h+6M_2h^2)\Rightarrow(\mu(\Pi_h)=h^2)\Rightarrow$

$$\frac{\mu(S)}{\mu(\Pi_h)}\le|J_0|+18M_2h(M_1+2M_2h)$$ Лемма доказана.

Т. Q - огр. замкн. квадр. обл. $\left.\begin{array}{l}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{array}\right\}\in C_2$ - это отображ. вз-одн. и вз. непр. дифф. $Q\leftrightarrow P$ - огр. замкн. квадр. обл. $J(u,v)=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$, $f(x,y)$ непр. на P. Тогда

$$\iint_P f(x,y)\,dxdy=\iint_Q \underbrace{f(x(u,v),y(u,v))}_{\varphi(u,v)}|J(u,v)|\,dudv.$$

Д-во. $J(u,v)\ne0$. Все интегралы существуют. Пусть $|f(x,y)|\le M$

1) $f(x,y)\ge0$, т.е. $0\le f(x,y)\le M$ $\forall(x,y)\in P$

Наложим на Q квадратную сетку со стороной h

Q разобьётся на N_h полных или неполных квадратов Π_i:

$\lim_{h\to0}N_h\cdot h^2=\mu(Q)\Rightarrow\lim_{h\to0}\frac{\mu(Q)}{N_h h^2}=1$, т.е. $N_h\le\frac{2\mu(Q)}{h^2}$

$\Pi_i\leftrightarrow P_i$ $\quad(u_i,v_i)\to(x_i,y_i)$. По лемме

$\mu(P_i)\le|J(u_i,v_i)|\mu(\Pi_i)+18M_2h^3(M_1+2M_2h)$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N_h}f(x_i,y_i)\mu(P_i)}_{\sigma_\tau(f,K_i)}\le\underbrace{\sum_{i=1}^{N_h}\varphi(u_i,v_i)\mu(\Pi_i)}_{\sigma_{\tilde\tau}(\varphi,\{\tilde K_i\})}+\underbrace{\sum_{i=1}^{N_h}M\cdot18M_2h^3(M_1+2M_2h)}_{\le 36MM_2\mu(Q)h(M_1+2M_2h)}$$

$h\to0\Rightarrow\delta_\tau\to0,\ \delta_{\tilde\tau}\to0\Rightarrow$

$$\iint_P f(x,y)\,dxdy\le\iint_Q f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\,dudv$$

Рассмотрим обратное пр-ие $\Rightarrow =$.

2) $f(x,y)$ - произв. знака $M=\max_{(x,y)\in P}|f(x,y)|$

$f_1(x,y)=M\ge0$, $f_2(x,y)=M-f(x,y)\ge0$

$f(x,y)=f_1(x,y)-f_2(x,y)$. Теор. доказана

$\mu(P)=\iint_P dxdy=\iint_Q|J(u,v)|\,dudv$ $\quad dxdy$ - элемент площади, $|J(u,v)|dudv$ - —, —, — в кривол. к-тах