Квантовая теория

Семестр I

Журавлев В.М.

Кафедра теоретической физики, УлГУ, 2009

Лекция II

Основные постулаты Квантовой теории

Постулат - это утверждение, обобщающее экспериментальные факты и не требующее дополнительного обоснования

Базовые постулаты

Что такое частица?

I. Геометрия пространства и частиц

1. Пространство является <u>эвклидовым</u>.

Время всюду течет одинаково в независимости от системы отсчета

2. Частица представляет собой <u>точку</u>.

Положение частицы в момент времени t определяется координатами (x,y,z)

I. Экспериментальные основания

1. На малых расстояниях, соответствующих размерам атомов эффектов кривизны не наблюдается (?!)

2. Во всех экспериментах электрон ведет себя как точка!

3. Тяжелые частицы (протоны, нейтроны) имеют внутреннюю структуру, но обнаруживают в структуре точечные объекты - партоны

Базовые постулаты

Что такое частица-волна?

II. Постулат Де Бройля

1. Состояние каждой частицы описывается однозначно комплексной волновой функцией, которая содержит всю информацию о структуре и динамике частицы

$$\Psi = \Psi(x, y, z, t)$$

1

II. Постулат Де Бройля

2. Волновая функция свободной частицы

может быть представлена в виде

гармонической волны

$$\Psi(x,y,z,t) = C\cdot e^{i\frac{[(\mathbf{p},\mathbf{x}-Et)]}{\hbar}}$$

2

III. Статистический постулат Борна

1. Не возможно достоверно предсказать заранее (до эксперимента), где частица будет обнаружена в момент времени t. Поэтому закономерности движения квантовых частиц и других объектов носят вероятностный характер!

Носят вероятностный характер!

III. Статистический постулат Борна

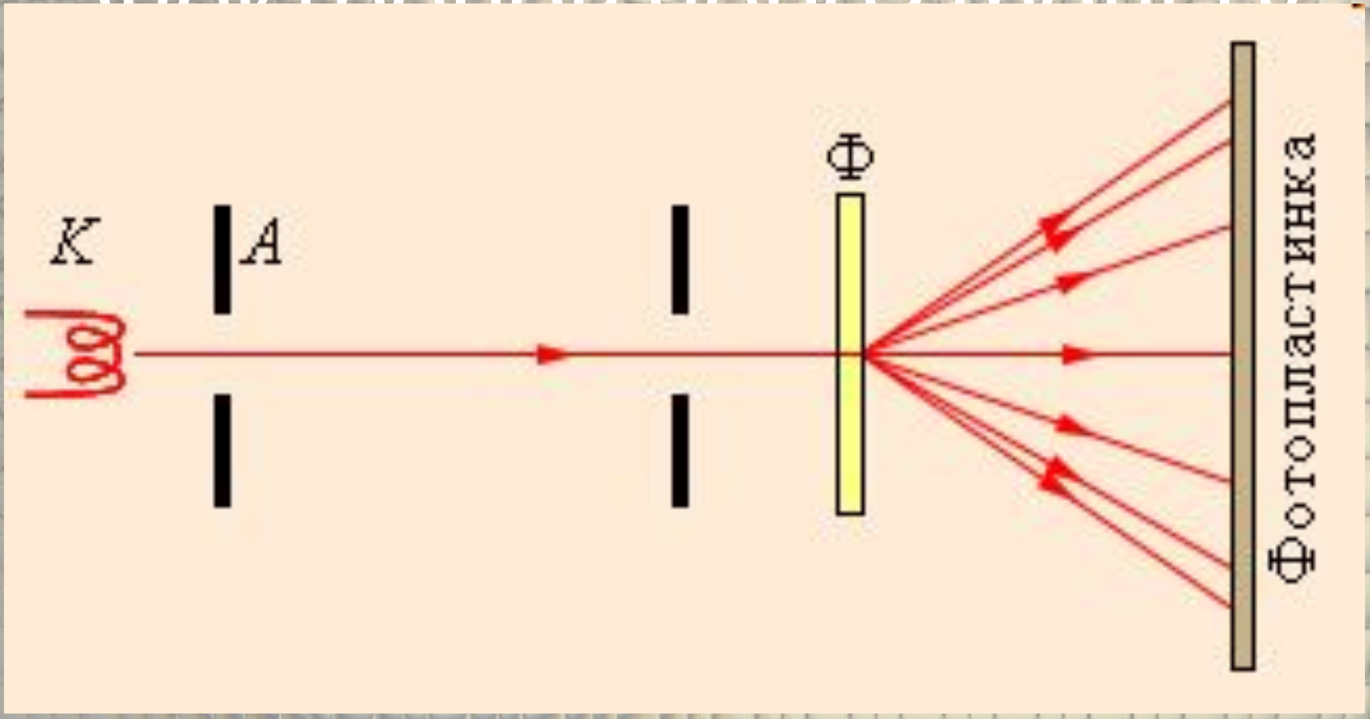
2. Величина $|\Psi(x,y,z,t)|^2$ представляет собой плотность вероятности обнаружить частицу в точке с координатами (x,y,z) в момент времени t

$$\rho(x,y,z,t) = |\Psi(x,y,z,t)|^2$$

3

II. Экспериментальные основания

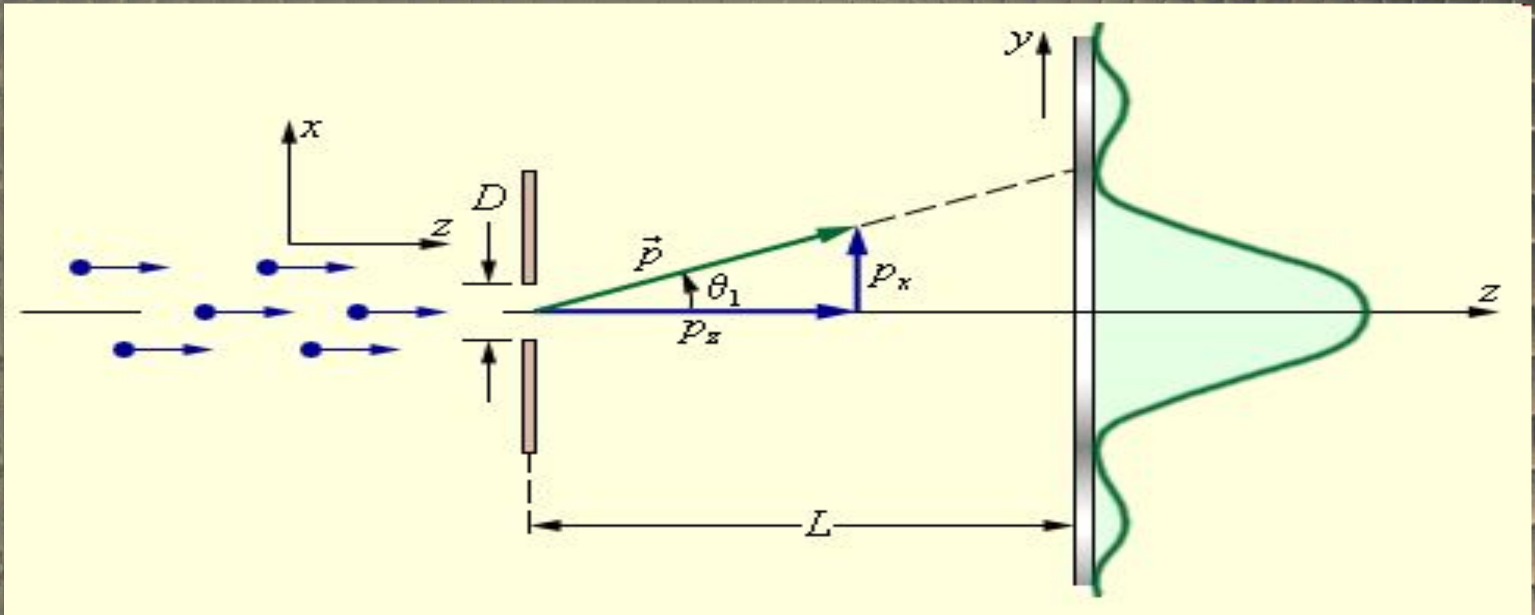
1. Дифракционный эксперимент Томсона - прохождение электронов через фольгу



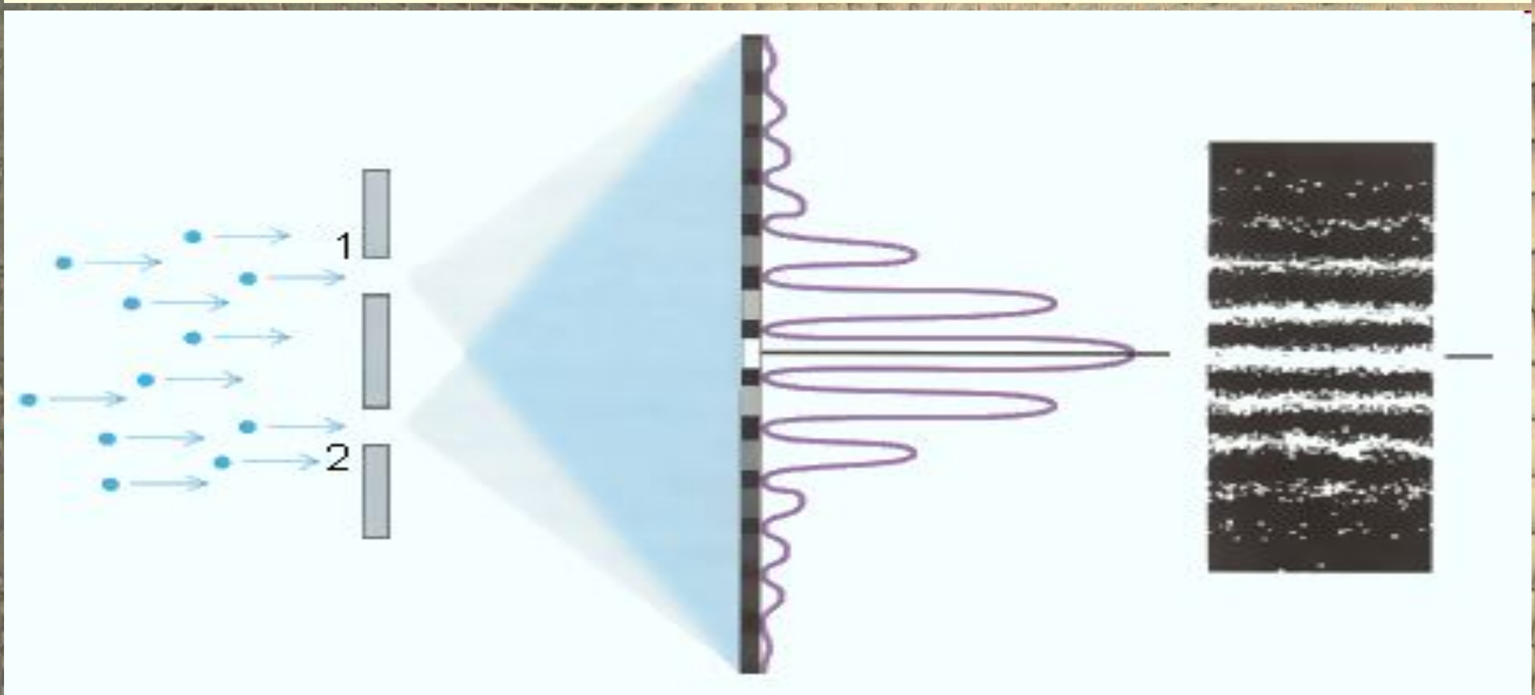
(a) (b)

а) Большая экспозиция,
б) Малая экспозиция

http://www.college.ru/physics/courses/op25part2/content/chapter5/section/



Одна щель



Две щели

Постулаты конструирования состояний

Как вычислить волновую функцию?

I. С какой скоростью движется частица-волна?

Фазовая скорость волны Де Бройля

$$C_p = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{p^2 / 2m}{p} = \frac{1}{2}\frac{p}{m} = \frac{1}{2}v$$

I. С какой скоростью движется частица-волна?

Групповая скорость волны Де Бройля

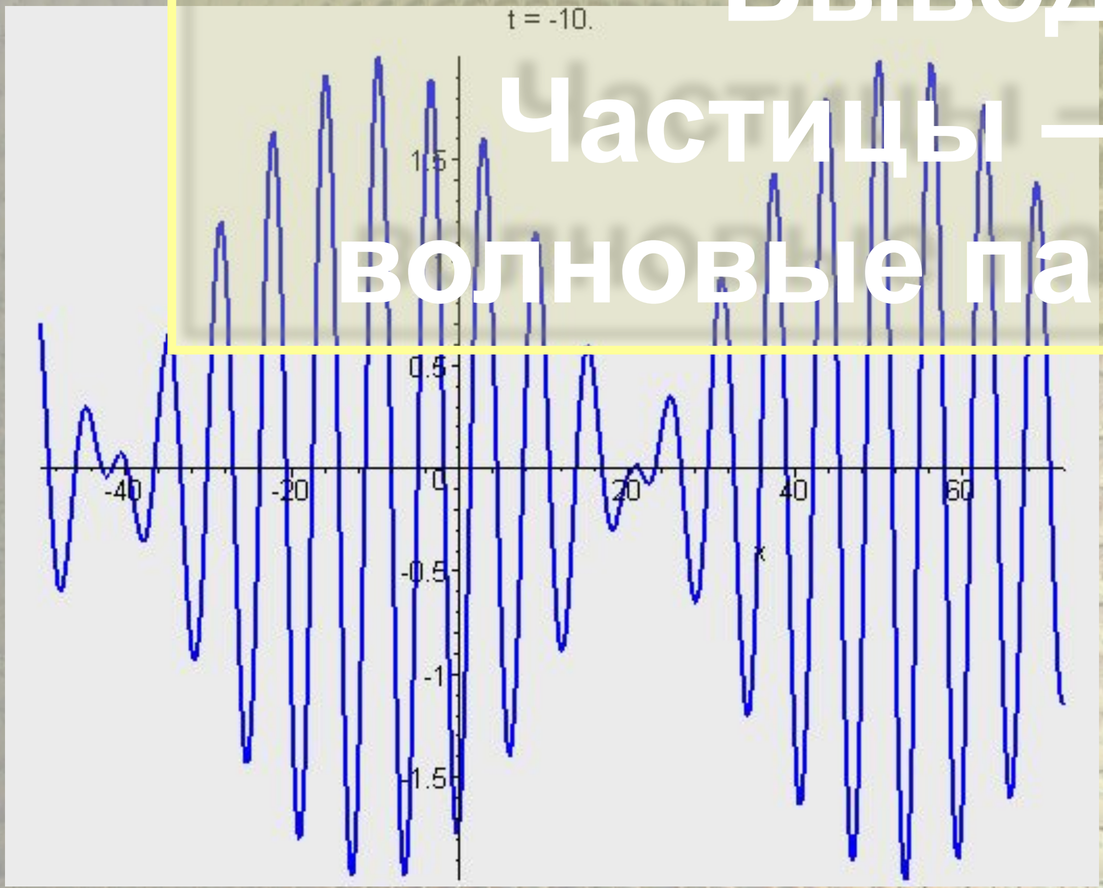
Реальной частице необходимо сопоставлять групповую скорость волн Де Бройля!!!

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v$$

$$\Psi = C\left(\sin(k_1 x - \omega_1 t) + \sin(k_2 x - \omega_2 t)\right) =$$

$$= 2C \sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

Вывод: Частицы – это волновые пакеты!!!



$$\Delta k = k_1 - k_2 = 0.05,$$

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = 0.05,$$

$$\omega_1 = \omega + \Delta\omega, \quad \omega = 0.5,$$

$$\omega_2 = \omega - \Delta\omega,$$

$$k_1 = k + \Delta k, \quad k = 1,$$

$$k_2 = k - \Delta k$$

$$C_p = \omega / k = 0.5,$$

$$C_g = \Delta\omega / \Delta k = 1,$$

II. Как устроен волновой пакет частицы?

Постулат: принцип суперпозиции

Если частица в данной физической обстановке может находится в состояниях $\Psi_1(x,y,z,t)$ и $\Psi_2(x,y,z,t)$, то она может в данной обстановке находится и в состоянии $\Psi = C_1\Psi_1(x,y,z,t) + C_2\Psi_2(x,y,z,t)$,

Вывод: Волновую функцию можно собирать из отдельных “кубиков”!

Кубики для принципа суперпозиции

Или
как найти “простейшие” состояния?

I. Состояния с фиксированным значением динамической переменной

Состоянием с **фиксированным значением** Q_0 динамической переменной Q называется такое состояние, для которого эксперимент по измерению Q с вероятностью 1 дает дает значение

Состоянием с **фиксированным значением** динамической переменной Q описывается одной волновой функцией

$$\Psi_Q(Q_0, x, y, z, t).$$

Индекс внизу указывает имя фиксированной динамической переменной, а само значение указывается среди аргументов

Пример

Состояние с фиксированным импульсом

$$\Psi_p = Ce^{\frac{i(px-Et)}{\hbar}}$$

II. Суперпозиция состояний с фиксированным значением Q

Пусть $\{Q\}$ - множество значений динамической переменной, которые могут появится в эксперименте. Тогда состояние системы в этом эксперименте можно представить в виде суперпозиции

$$\Psi = \sum_{q \in \{Q\}} C_q \Psi_q$$

5

Комплексные числа C_Q характеризуют вероятности появления в эксперименте значения Q. Эта вероятность может быть вычислена по формуле:

$$P[Q=q]=|C_q|^2$$

$$\boxed{\sum_{q\in\{Q\}} P[Q=q]=\sum_{q\in\{Q\}}|C_q|^2=1}$$

6

III. Проекционный постулат

Сразу после эксперимента по измерению динамической переменной Q, результатом которого было значение Q_0, волновая функция системы будет иметь вид

$$\Psi_Q(Q_0, x, y, z, t).$$

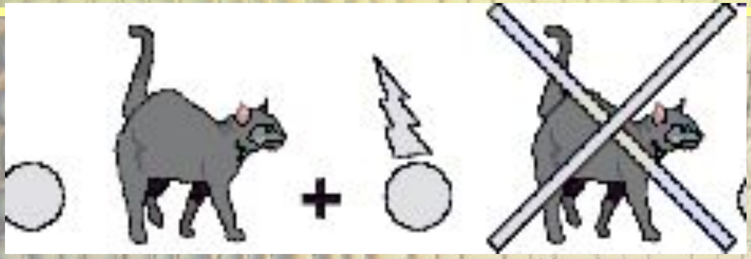
Парадокс Шредингера

Эрвин Шрёдингер
Arvin Shredinger
(12.08.1887 года - 04.01.1961 года)

Родился в Вене. В 1906 г. он поступил в Венский университет. В 1910 г. защищает докторскую диссертацию. Во время первой мировой войны Шрёдингер служил офицером-артиллеристом в захолустном гарнизоне, расположенном в горах, вдали от линии фронта. По окончании войны он возвращается во 2-й физический институт в Вене, В 1920 г. Шрёдингер отправился в Германию, где стал ассистентом Макса Вина в Иенском университете, но через четыре месяца становится адъюнкт-профессором Штутгартского технического университета. Через один семестр он покидает Штутгарт и переезжает в Швейцарию и становится преемником Эйнштейна и Макса фон Лауэ и профессором кафедры физики Цюрихского университета. Он следит и за успехами квантовой теории, но не сосредоточивает свое внимание на этой области вплоть до 1925 г.,когда появился благоприятный отзыв Эйнштейна по поводу волновой теории материи Луи де Бройля.

В закрытый ящик помещён кот. В ящике имеется механизм, содержащий радиоактивное ядро и ёмкость с ядовитым газом. Параметры эксперимента подобраны так, что вероятность того, что ядро распадётся за 1 час, составляет 50 %. Если ядро распадается, оно приводит механизм в действие, он открывает ёмкость с газом, и кот умирает. Согласно квантовой механике, если над ядром не производится наблюдения, то его состояние описывается суперпозицией (смешением) двух состояний — распавшегося ядра и нераспавшегося ядра, следовательно, кот, сидящий в ящике, и жив, и мёртв одновременно.

Вопрос стоит так: **когда система перестаёт существовать как смешение двух состояний и выбирает одно конкретное**? Цель эксперимента — показать, что квантовая механика неполна без некоторых правил, которые указывают, при каких условиях происходит коллапс волновой функции и кот становится либо мёртвым, либо остаётся живым, но перестаёт быть смешением того и другого.



Пример. Суперпозиция состояний Де Бройля

Состояние с **фиксированным значением энергии** $\mathcal{E}$ в пустом одномерном пространстве описывается волновой функцией

$$\Psi_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}_0,x,y,z,t).$$

$$\boxed{\Psi = C_+\Psi_p + C_-\Psi_{-p}}$$

$$\Psi = C_+\Psi_p + C_-\Psi_{-p} =$$

$$= C_+ e^{\frac{i(px-Et)}{h}} + C_- e^{\frac{i(-px-Et)}{h}} =$$

$$= e^{\frac{-iEt}{h}}\left(C_+ e^{\frac{ipx}{h}} + C_- e^{\frac{-ipx}{h}} \right)$$

Плотность вероятности не зависит от времени! Такие состояния будем называть стационарными

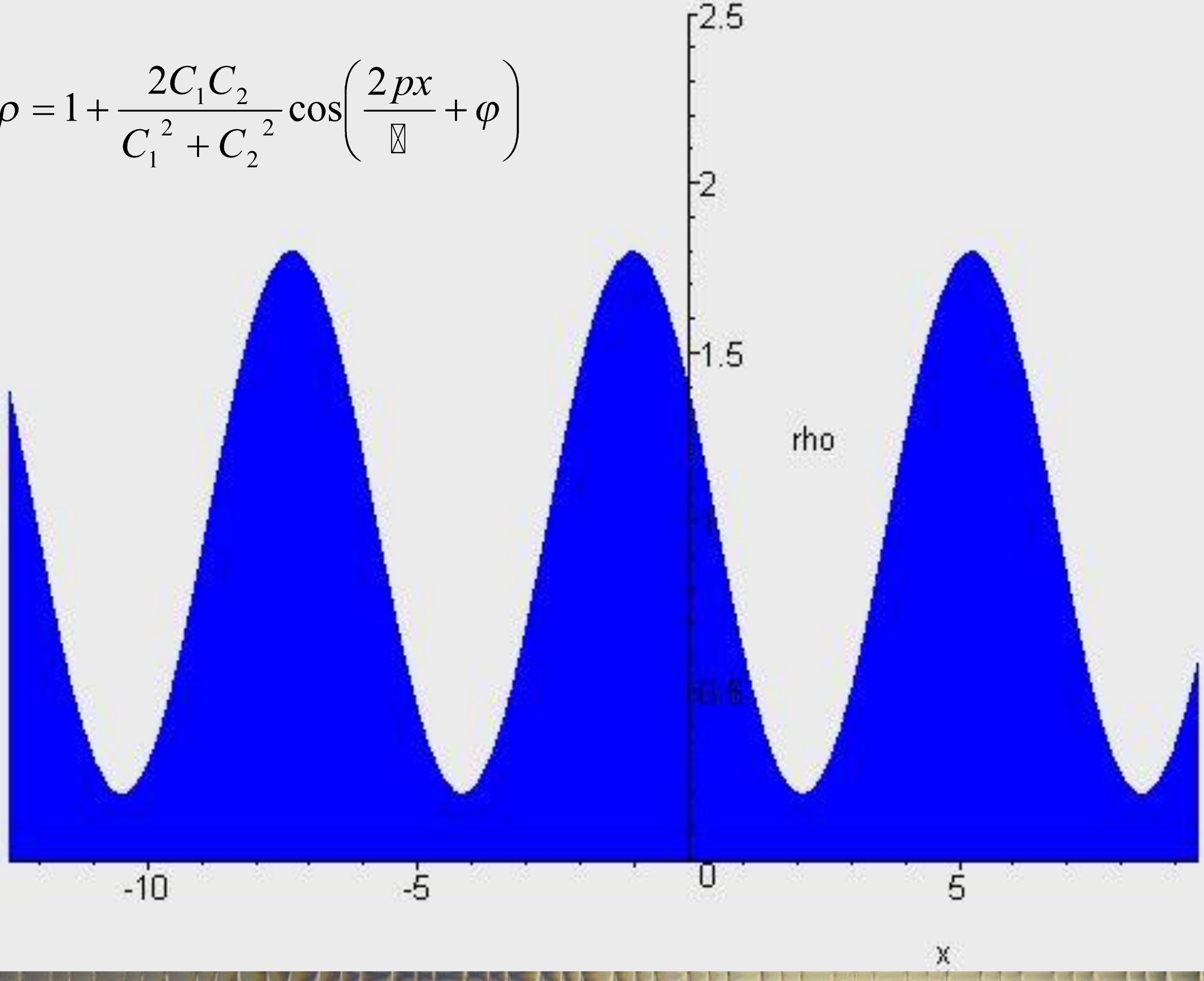
$$|\Psi|^2 = \left| C_+ e^{\frac{ipx}{\hbar}} + C_- e^{\frac{-ipx}{\hbar}} \right|^2 =$$

$$= |C_+|^2 + |C_-|^2 + 2|C_+||C_-|\cos\left(\frac{2px+\varphi}{\hbar}\right)$$

$$\frac{C_+ C_-^*}{|C_+ C_-|} = e^{i\varphi}$$

$$|C_+|^2 + |C_-|^2 = 1$$

$$\rho = 1 + \frac{2C_1C_2}{C_1^{\ 2} + C_2^{\ 2}}\cos\left(\frac{2px}{\hbar} + \varphi\right)$$



Состояние с **фиксированным значением энергии** $\mathcal{E}$ в пустом трехмерном пространстве

$$\Psi = \int\limits_{E=p_0^2/2m} C_p \Psi_p dp_x dp_y dp_z =$$

$$= e^{\frac{-it\,p_0^2}{2mh}} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} C(\theta,\varphi) e^{\frac{ip(x\cos\varphi\sin\theta + y\sin\varphi\sin\theta + z\cos\theta)}{h}} d\varphi d\theta$$

Ортогональность состояний с фиксированным значением динамической переменной. Поскольку результаты измерения Q со значениями q и $q'(q\neq q')$ не совместны, то

$$C_q^{q'} = \int_V \Psi_q \Psi_{q'} dxdydz = 0$$

Следовательно:

$$(\Psi_q, \Psi_{q'}) = 0, \quad q \neq q'$$

Следующая лекция

Операторное изображение динамических переменных

1. Вычисление средних значений квантового эксперимента
2. Операторы
3. Операторы импульса и координаты
4. Динамические переменные и их