Аннотация

В данном практическом занятии изучены теоретические основы контактно взаимодействия на которых основывается в своих расчетах программный комплекс LS-Dyna. Рассмотрены характеристики неявного метода и основные пути решения.

План практического занятия

1. Характеристика неявного метода
2. Неявный метод интегрирования
3. Метод Ньютона для расчета n неизвестных
4. Пример. Одномерная нелинейная пружина
5. Линейная динамика неявного метода
6. Статический нелинейный неявный метод
7. Статический линейный неявный метод

Характеристика неявного метода

Производится вычисление глобальной матрицы жесткости, инверсия матрицы (нахождение обратной матрицы), после чего к узлам прикладывается разуравновешивающая сила для получения приращения перемещения. Достоинство такого подхода заключается в том, что пользователь может сам задать величину временного шага. Недостатком является большая сложность формирования, хранения, разложения на множители матрицы жесткости. Поэтому задачи с неявным решением обычно включают сравнительно небольшое число временных шагов интегрирования.

Характеристика неявного метода

- Интегрирование уравнения движения по времени:

$$ma^n + cv^n + f^n_{\text{внут}} = f^n_{\text{внеш}} \quad (1)$$

где *m* – матрица масс;
a – ускорение;
c – матрица демпфирования;
v – скорость;
$f_{\text{внут}}$ – внутренние силы;
$f_{\text{внеш}}$ – внешние силы;
n – порядковый номер шага интегрирования.

Основная проблема заключается в определении перемещения d^{n+1} за время t^{n+1}.

Явное и неявное прямое интегрирование по времени в общем виде может быть записано в виде:

Характеристика неявного метода

- Явный метод:

$$d^{n+1} = f(d^n, v^n, a^n, d^{n-1}, \ldots) \quad (2)$$

Выражение показывает, что решение зависит от неизвестных величин: узловых перемещений, скоростей и ускорений на шаге n. Следовательно, уравнение может быть решено прямым методом.

Неявный метод:

$$d^{n+1} = f(v^{n+1}, a^{n+1}, d^n, v^n, \ldots) \; (3)$$

Выражение показывает, что решение зависит от неизвестных величин: узловых скоростей и ускорений на шаге *n+1*. Из этого следует, что итерационный процесс необходим для вычисления равновесия в момент времени *n+1*.

Неявный метод интегрирования

- Уравнение движения записывается в виде:

$$0 = R = \delta m a^{n+1} + f_{\text{внут}}^{n+1} - f_{\text{внеш}}^{n+1} \qquad (4)$$

где R – невязка;

δ – для статических расчетов 0, для динамики 1;

m – матрица масс;

a – ускорение;

$f_{\text{внеш}}^{n+1}$ – внешние силы;

$f_{\text{внут}}^{n+1}$ – внутренние силы;

При интегрировании методом Ньюмарка, перемещения и ускорения вычисляются следующим образом:

$$d^{n+1} = d^n + \Delta t v^n + \frac{\Delta t^2}{2}(1-2\beta)a^n + \beta \Delta t^2 a^{n+1} \ (5)$$

Неявный метод интегрирования

- где β – постоянная интегрирования, которая задается в карточке *CONTROL_IMPLICIT_DYNAMICS.

$$v^{n+1} = v^n + (1-\gamma)\Delta t a^n + \gamma \Delta t a^{n+1} \quad (6)$$

где γ – постоянная интегрирования которая задается в карточке *CONTROL_IMPLICIT_DYNAMICS.

Из уравнения (5) можно найти выражение для a^{n+1} (при β > 0):

$$a^{n+1} = \frac{d^{n+1} - d^n - \Delta t v^n - \frac{\Delta t^2}{2}(1-2\beta)a^n}{\beta \Delta t^2} \quad (7)$$

Подставив уравнение (7) в уравнение (4), получим:

$$0 = R = \delta m \left(\frac{d^{n+1} - d^n - \Delta t v^n - \frac{\Delta t^2}{2}(1-2\beta)a^n}{\beta \Delta t^2} \right) + f^{n+1}_{\text{внут}} - f^{n+1}_{\text{внеш}} \quad (8)$$

Неявный метод интегрирования

- Получили систему нелинейных алгебраических уравнений, и теперь нужно найти перемещение d^{n+1} при нулевой невязке R.

Метод Ньютона при решении уравнения (8)

Один из самых широко используемых методов для решения систем нелинейных алгебраических уравнений это итерационный метод Ньютона-Рафсона. Ниже описан принцип метода для одной неизвестной величины.

Подставляя уравнение (9) в (8) получим выражение (10) (при $\beta > 0$ и собирая внутренние и внешние силы в один член):

$$\tilde{d}^{n+1} = d^n + \Delta t v^n + \frac{\Delta t^2}{2}(1-2\beta)a^n \ (9)$$

$$r(d^{n+1}, t^{n+1}) = \frac{\delta}{\beta \Delta t^2} M\left(d^{n+1} - \tilde{d}^{n+1}\right) - f\ (d^{n+1}, t^{n+1}) = 0 \ (10)$$

Неявный метод интегрирования

- Разложение невязки в ряд Тейлора относительно текущего значения d_v дает выражение (11). d_v – это перемещение на итерации v в момент времени n+1.

$$r(d_{v+1}, t^{n+1}) = r(d_v, t^{n+1}) + \frac{\partial r(d_v, t^{n+1})}{\partial d}\Delta d + O(\Delta d^2) = 0 \ (11)$$

$$\Delta d = d_{v+1} - d_v$$

Отбрасывая член высшего порядка малости, получим линейное уравнение для Δd:

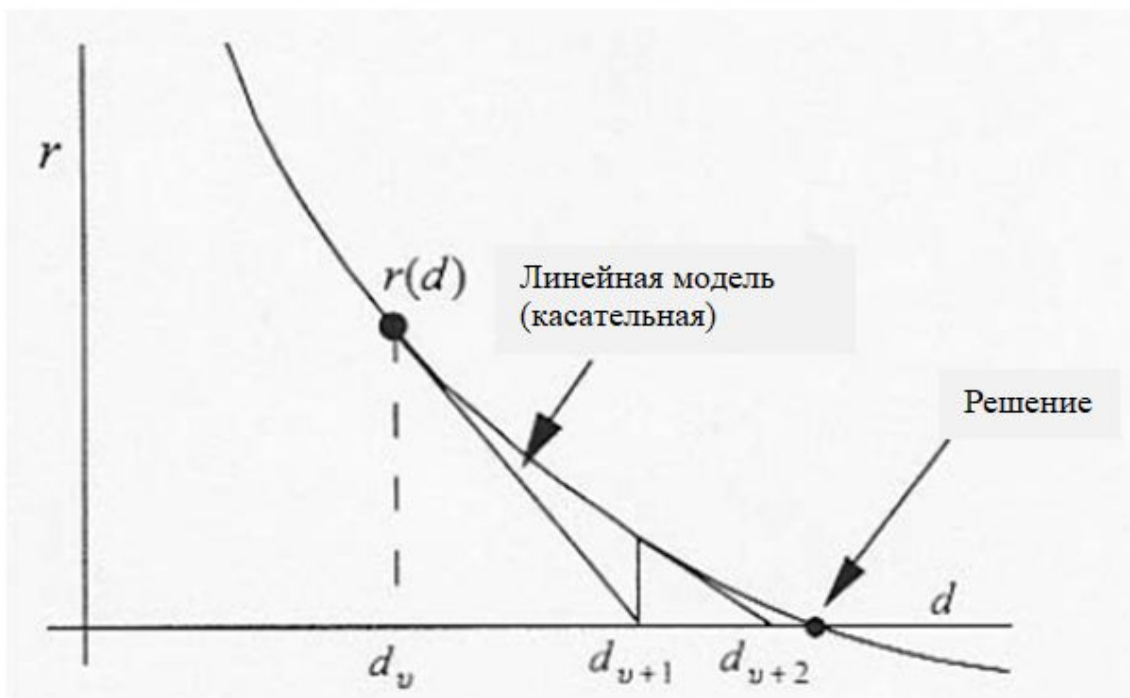
$$r(d_v, t^{n+1}) + \frac{\partial r(d_v, t^{n+1})}{\partial d}\Delta d = 0 \ (12)$$

Линейная модель касательна к нелинейной функции невязки, как показано на рисунке. Выражение (12) пересчитывается для Δd:

$$\Delta d = -\left(\frac{\partial r(d_v)}{\partial d}\right)^{-1} r(d_v) \ (13)$$

Неявный метод интегрирования

- В методе Ньютона-Рафсона осуществляется итерационный процесс и решение последовательности линейных решений (13). Новая неизвестная рассчитывается как $d_{v+1} = d_v + \Delta d$ и процесс продолжается до тех пор пока не достигнется ожидаемая точность. Данный метод проиллюстрирован на рисунке ниже для определенного времени.



Метод Ньютона для расчета n неизвестных

- Ранее указанные уравнения можно обобщить для n неизвестных

$$r(d_v, t^{n+1}) + \frac{\partial r(d_{v,} t^{n+1})}{\partial d} \Delta d = 0 = r\left(d_{v,} t^{n+1}\right) + A\Delta d \; (14)$$

Где A обозначена матрица Якоби или матрица эффективной касательной жесткости. Совместно с методом интегрирования Ньюмарка получается:

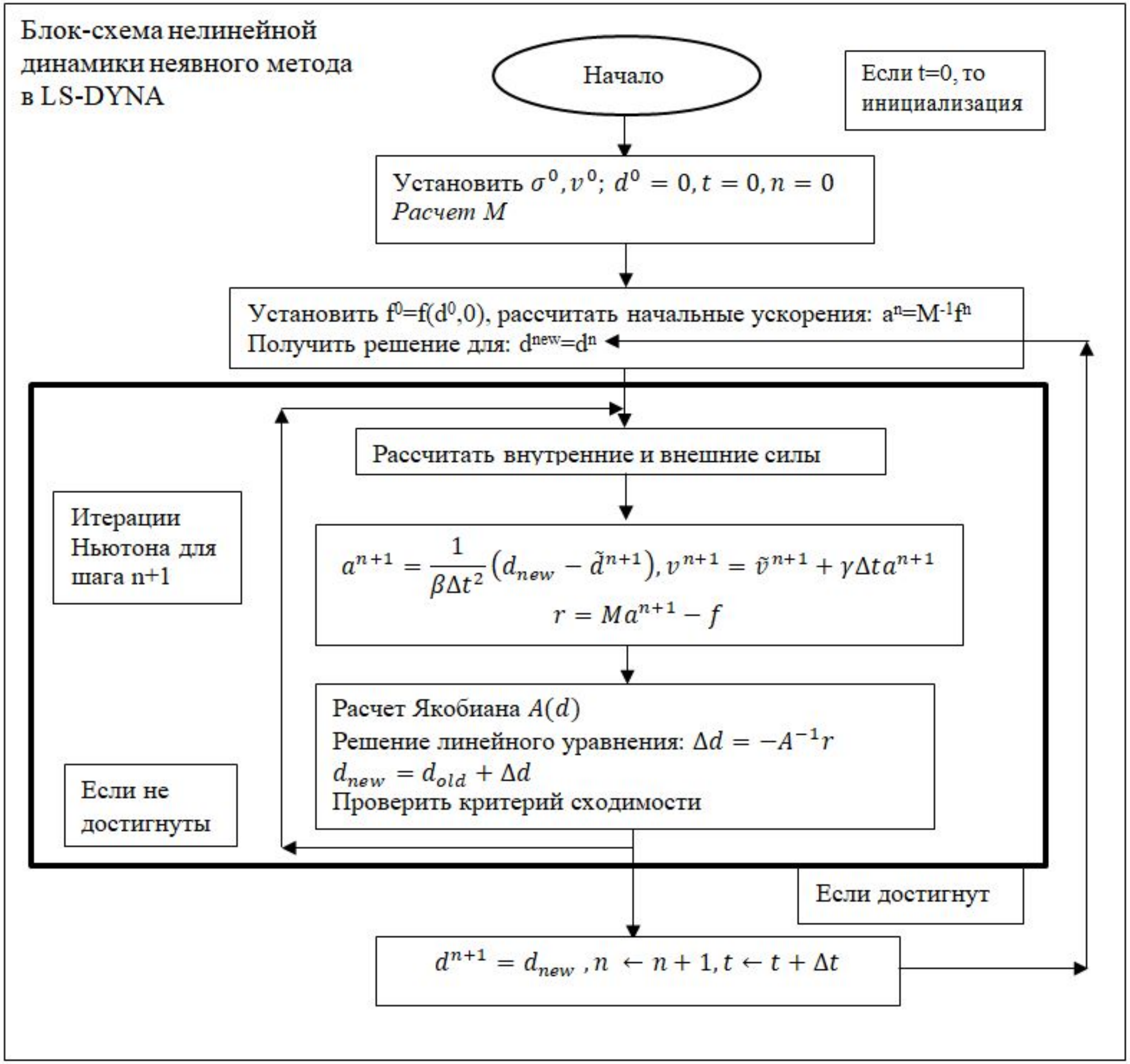
$$A = \frac{\partial r}{\partial d} = \frac{\delta}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\partial r^{\text{внут}}}{\partial d} - \frac{\partial r^{\text{внеш}}}{\partial d} = \frac{\delta}{\beta \Delta t^2} M + K^{\text{внут}} - K^{\text{внеш}} \; (15)$$

где $K^{внут}$ – касательная матрица жесткости;
$K^{внеш}$ – the матрица жесткости нагрузки.

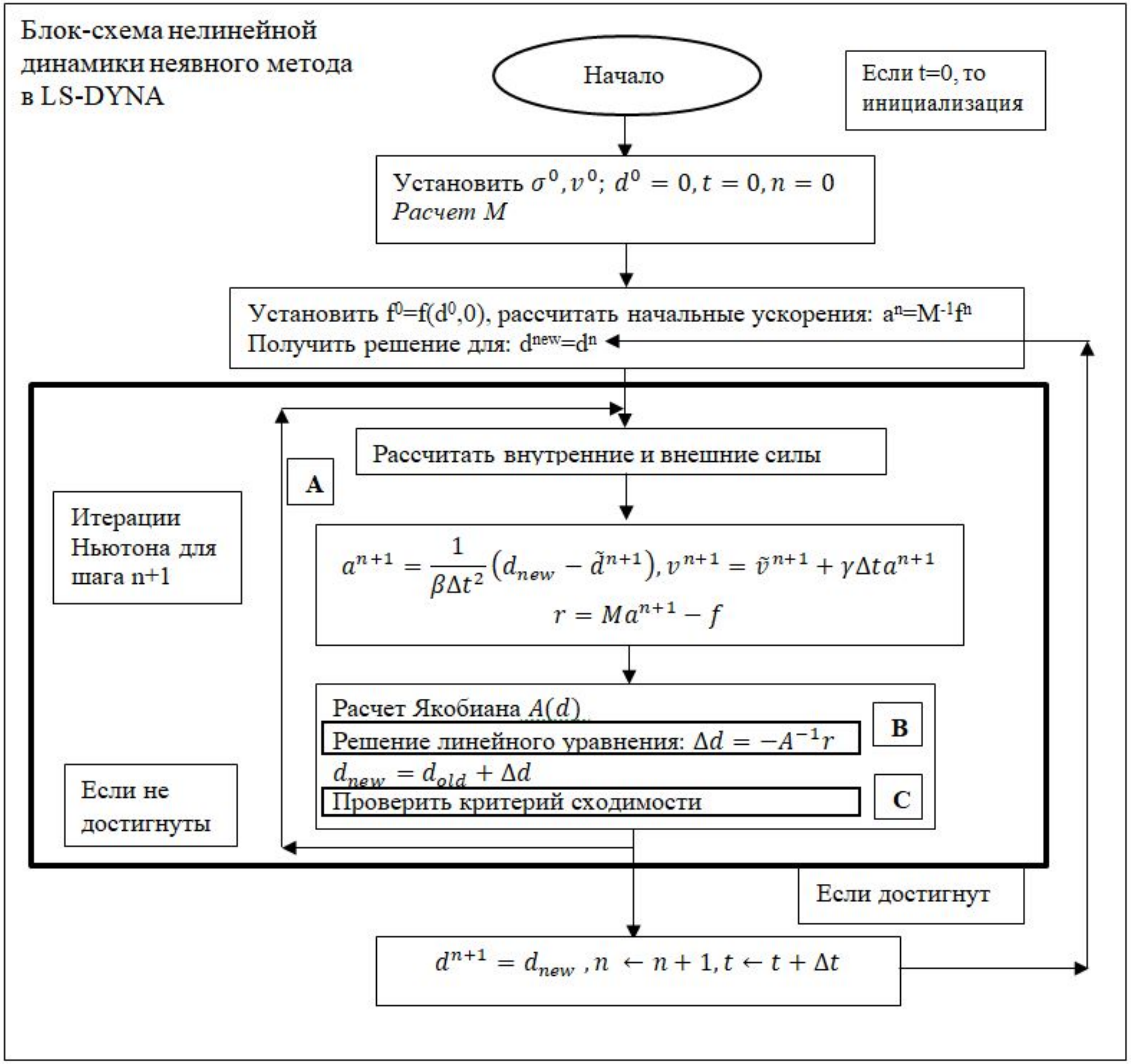
Как видно из (14) Необходимо найти обратную матрицу A matrix для того, чтобы вычислить Δd, что является недостатком неявного метода.

$$\Delta d = -A^{-1} r(d_v, t^{n+1}) \; (16)$$

Метод Ньютона для расчета n неизвестных



Метод Ньютона для расчета n неизвестных



Метод Ньютона для расчета n неизвестных

Ниже более детально описываются три аспекта, отраженные в блок-схеме:

А: Для решения уравнений равновесия используются итерационные методы. В данном пособии рассматривался метод Ньютона-Рафсона, хотя пользователь может выбрать любой другой метод, встроенный в программный комплекс LS-DYNA. Сделать это можно через карточку *CONTROL_IMPLICIT_SOLUTION, где также задаются параметры итерационного процесса. Более подробно эти методы рассмотрены в разделе Implicit in LS-DYNA.

B: Для нахождения Δd решается линейное уравнение, при этом матрица A инвертируется (находится обратная матрица). Выбрать решатель для этой задачи можно с помощью карточки *CONTROL_IMPLICIT_SOLVER.

C: Производится проверка критерия сходимости. В LS-DYNA существует три критерия. В карточке *CONTROL_IMPLICIT_SOLUTION можно задать критерий и другие параметры. Далее эти критерии рассмотрены более подробно. Настройки управления можно найти в разделе Implicit in LS-DYNA.

Метод Ньютона для расчета n неизвестных

- **Критерии сходимости**

Как видно из блок-схемы, методы Ньютона завершаются проверкой критерия сходимости. В LS-DYNA существуют три разных критерия, которые может задать пользователь: энергетический критерий, критерий перемещения и критерий невязки. Первые два критерия активируются по умолчанию. Для достижения сходимости все активируемые критерии должны быть выполнены.

Энергетический критерий

Проводится сравнение энергии в текущий момент времени и энергии на начальном шаге.

$$\frac{\|\Delta d \cdot r_{v+1}\|}{\|\Delta d_1 \cdot r_1\|} < ECTOL \ (17)$$

Значение ECTOL по умолчанию установлено 0,01 и может быть заменено в карточке *CONTROL_IMPLICIT_SOLUTION.

Метод Ньютона для расчета n неизвестных

Видно, что, если внешняя нагрузка не изменяется после предыдущего шага, то величина невязки r будет изначально равна нулю. Это вызовет проблемы для энергетического критерия, поскольку знаменатель обратится в ноль. В этом случае LS-DYNA отображает критерий энергии 1,000. Рекомендуется применять нагрузку, которая меняется на каждом шаге.

Метод Ньютона для расчета n неизвестных

- **Схождение невязки**

Критерий невязки сравнивает отношение остатка с заданным пользователем допуском. Критерий по умолчанию не активен, но его можно активировать с помощью параметра RCTOL в * CONTROL_IMPUCIT_SOLUTION.

$$\frac{\|r_{\nu+1}\|}{\|r_1\|} < RCTOL \; (18)$$

Сходимость перемещения

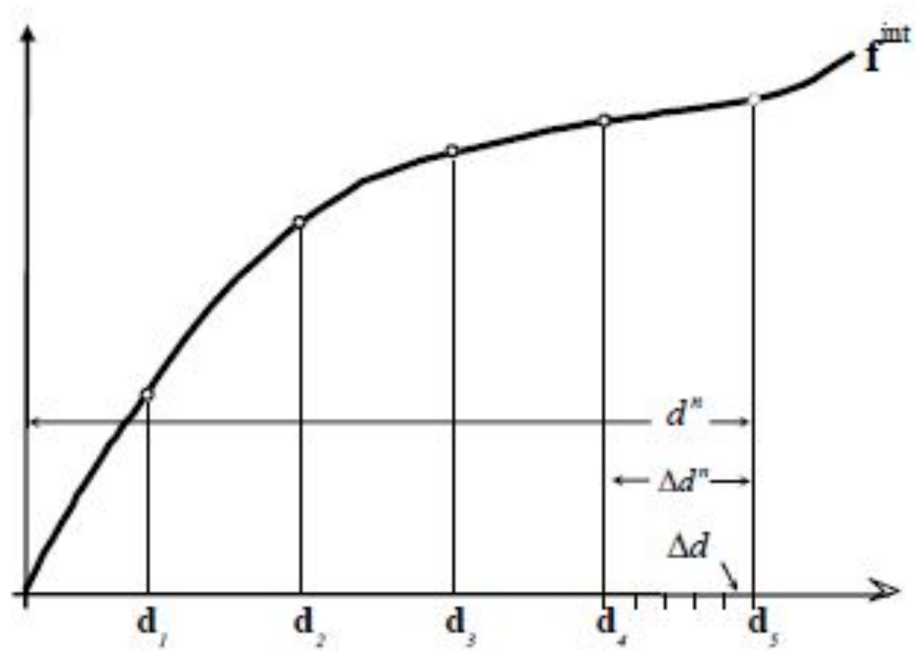
Критерий допуска перемещений сравнивает скорость перемещения с допуском DCTOL. Значение DCTOL по умолчанию равно 0,001 и может быть изменено в карточке * CONTROL_IMPLICIT_SOLUTION. В LS-DYNA есть два варианта для вычисления знаменателя в критерии допуска перемещений. Активируется флажком DNORM.

$$\frac{\|\Delta d\|}{\|d^n\|} < DCTOL \qquad (\,DNORM = 2, \text{по умолчанию}) \;\; (19)$$

Метод Ньютона для расчета n неизвестных

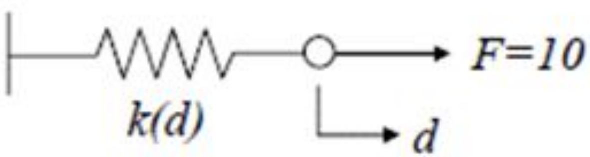
- $$\frac{\|\Delta d\|}{\|\Delta d^n\|} < DCTOL \qquad (DNORM = 1) \qquad (20)$$

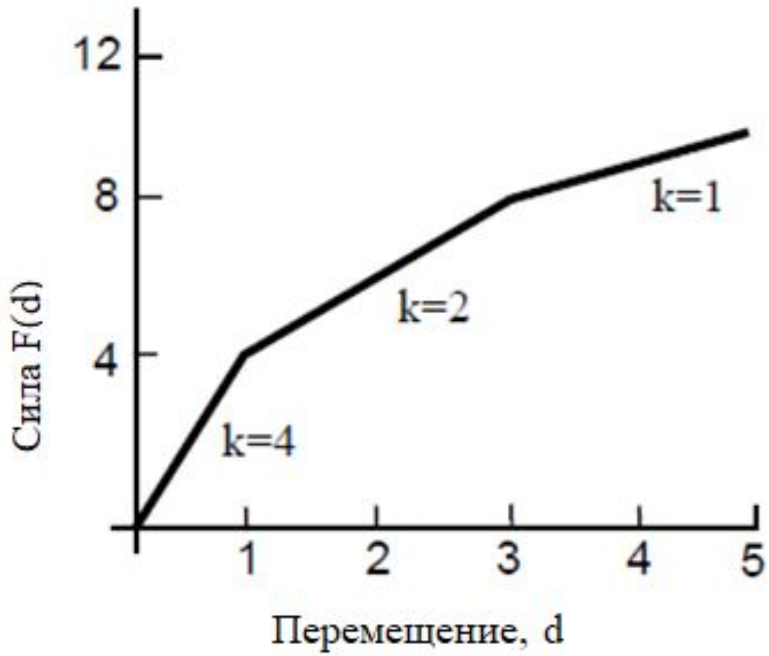
DNORM = 2 (по умолчанию) использует полное перемещение и таким образом становится менее точным, как только общее перемещение увеличивается. Опция DNORM = 1 использует перемещение текущего шага и таким образом можно использовать большее значение переменной DCTOL.



Пример. Одномерная нелинейная пружина

Для того, что проиллюстрировать метод Ньютона, рассмотрим простую нелинейную пружину.





Пример. Одномерная нелинейная пружина

- Итерация №1

$$d_0 = 0, \qquad k(0) = 4, \qquad d_1 = \frac{10}{4} = 2.5$$

Если нелинейный метод решения линейный, то расчет останавливается и предполагается, что решение верное. Проверять равновесие нет необходимости.

При нелинейной задаче, необходимо проверить условия равновесия определением внутренних сил и разуравновешивающей силы R:

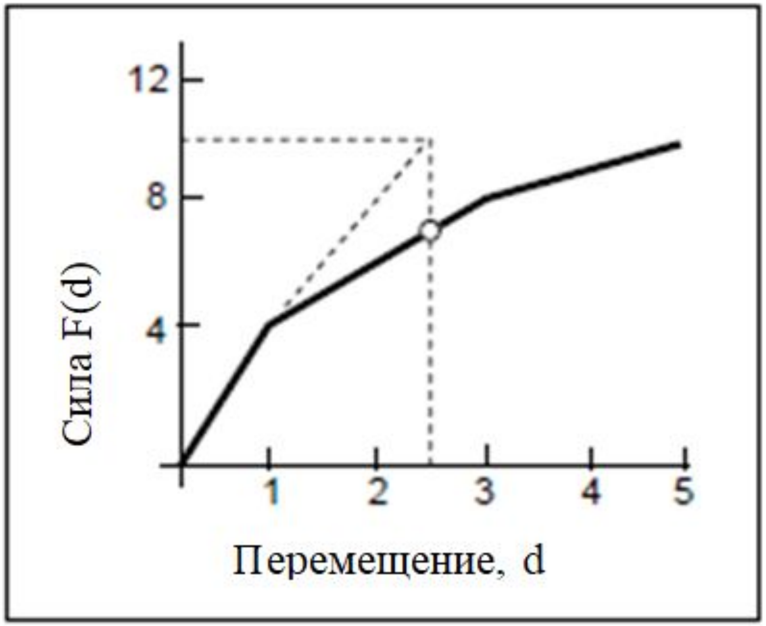
$$d_1 = 2.5, \qquad F(d_1) = 7$$
$$R_1 = F^{\text{внеш}} - F^{\text{внут}} = 3$$

Пример. Одномерная нелинейная пружина

- Проверка сходимости условия равновесия итерации путем расчета перемещения и энергии:

$$\left\| \frac{\Delta d}{d} \right\| = \frac{2.5}{2.5} = 1.000$$

$$\left\| \frac{e}{e_0} \right\| = \frac{\Delta d \cdot R_0}{d_1 \cdot R_0} = \frac{2.5 \cdot 10}{2.5 \cdot 10} = 1.000$$



Примечание энергия рассчитана при помощи силы, которая произвела перемещение Δd

Пример. Одномерная нелинейная пружина

Итерация №2:
Решить KΔd=R, обновить d=d+Δd

$$d_1 = 2.5, \qquad k(2.5) = 2$$

$$\Delta d_2 = \frac{R}{k} = \frac{3}{2} = 1.5,$$

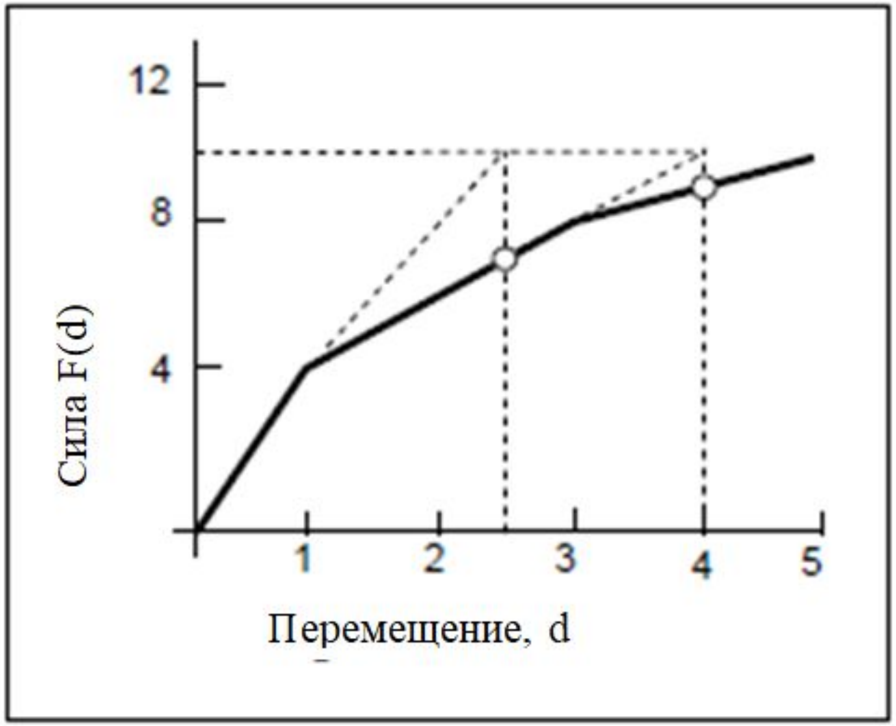
$$d_2 = d_1 + \Delta d_2 = 4.0$$

Рассчитать новое значение невязки R, проверить критерии сходимости

$$F(d_2) = 9, \qquad R_2 = F^{ext} - F^{int} = 1$$

$$\left\|\frac{\Delta d}{d}\right\| = \frac{1.5}{4} = 0.375$$

$$\left\|\frac{e}{e_0}\right\| = \frac{\Delta d \cdot R_1}{d_1 \cdot R_0} = \frac{1.5 \cdot 3}{2.5 \cdot 10} = 0.180$$



Пример. Одномерная нелинейная пружина

Итерация #3:
Решить KΔd=R, обновить d=d+Δd

$$d_2 = 4.0, \qquad k(4.0) = 1$$

$$\Delta d_3 = \frac{R}{k} = \frac{1}{1} = 1.0,$$

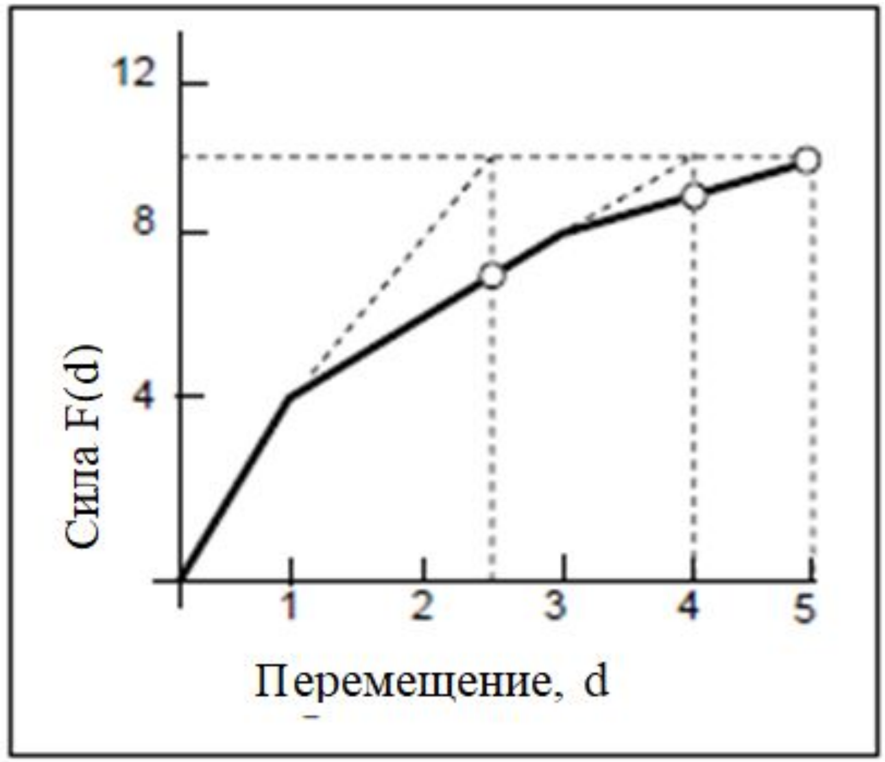
$$d_3 = d_2 + \Delta d_3 = 5.0$$

Рассчитать новое значение невязки R, проверить критерии сходимости:

$$F(d_3) = 10, \qquad R_3 = F^{ext} - F^{int} = 0$$

$$\left\|\frac{\Delta d}{d}\right\| = \frac{1.0}{5.0} = 0.2$$

$$\left\|\frac{e}{e_0}\right\| = \frac{\Delta d \cdot R_2}{d_1 \cdot R_0} = \frac{1.0 \cdot 1.0}{2.5 \cdot 10} = 0.040$$



Пример. Одномерная нелинейная пружина

- Метод Ньютона-Рафсона часто дает хорошее направление решения Δd, но не обязательно оптимальный размер шага (|| Δd||). Линейный поиск находит приводит к параметру s, который минимизирует меру невязки вдоль линии:

$$d = d_{\text{стар}} + s\Delta d \text{ (21)}$$

Расчет пробного перемещения:

$$d^{\text{пр}} = d_i + s\Delta d,\ 0 \le\ s \le 1 \text{ (22)}$$

Расчет разуравновешивающей силы:

$$r(d^{\text{пр}}) = f^{\text{внеш}}(d^{\text{пр}}) - f^{\text{внут}}(d^{\text{пр}}) \text{ (23)}$$

Поиск (итерационный) параметра s, который минимизирует разуравновешивающую силу. Если значение параметра s становится меньше 0,001, то Δd сбрасывается и переформировывается A.

Пример. Одномерная нелинейная пружина

- Показанный линейный поиск минимизирует разницу в невязке. Начиная с версии LS-Dyna 971 есть возможность выбора между разными методами сходимости линейного поиска. Эта возможность реализована при помощи флажка LSMTD в карточке *CONTROL_IMPLICIT_SOLUTION.

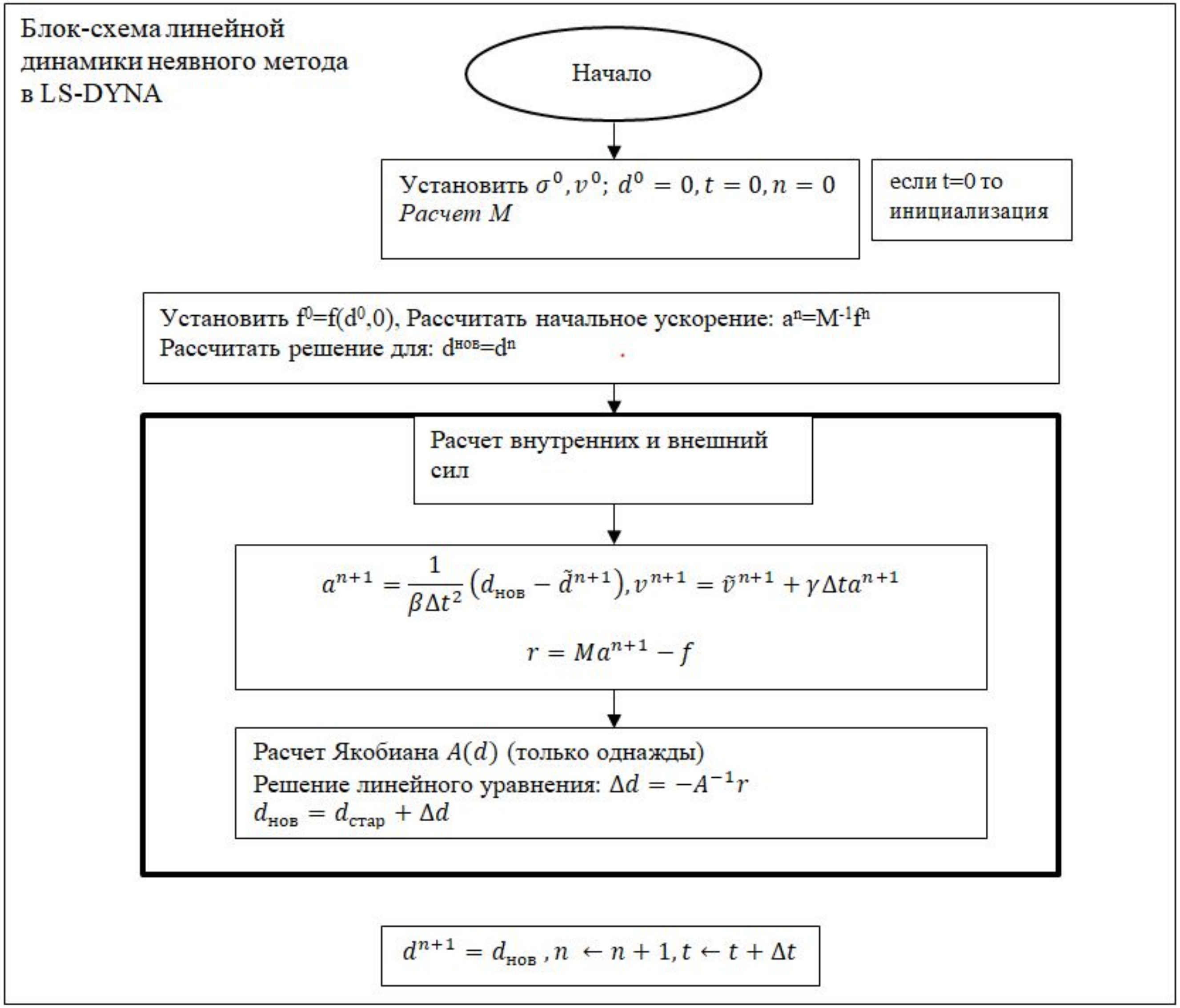
Существуют 3 разным метода:

- LSMTD=1 Энергетический метод с использованием только переменные поступательного движения. Энергия $(r^T \Delta d)$ должна быть минизирована. Этот метод установлен по умолчанию.
- LSMTD=2 Включает ранее показанный метод минимизирования невязки.
- LSMTD=3 Энергетический метод с использованием как переменных поступательного, так и вращательного движения

Линейная динамика неявного метода

Ранее была показана нелинейная динамика, но иногда модель может быть рассчитана как линейная. Это значит, что деформация, материалы и т.д. линейно зависимы. Как задать линейный анализ в LS-DYNA показано в разделах Activate the Implicit Solver и Implicit in LS- DYNA. Ниже дана блок-схема. Стоит запомнить одну вещь, что если задан любой вид контакта в задаче, то это превращает модель в нелинейную.

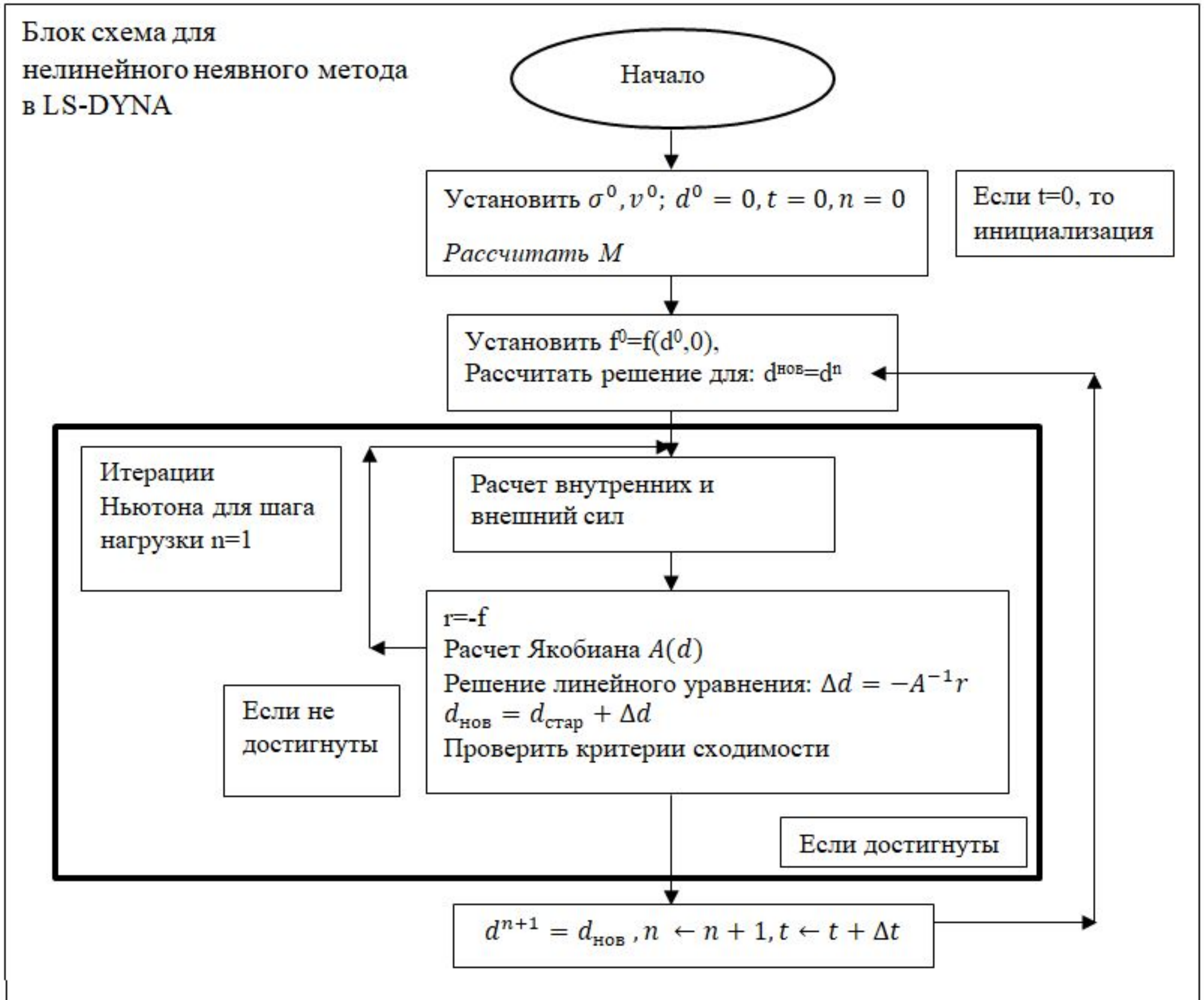
Линейная динамика неявного метода



Статический нелинейный неявный метод

Некоторые расчетный модели могут считаться статическими, уравнение (4) не учитывая массу ($\delta=0$). Блок схема для статического нелинейного неявного метода показана на рисунке ниже. Статический расчет установлен по умолчанию в LS-DYNA, можно изменить в карточке *CONTROL_IMPLICIT_DYNAMICS.

Статический нелинейный неявный метод



Статический линейный неявный метод