

# Движение в пространстве

**11 класс**

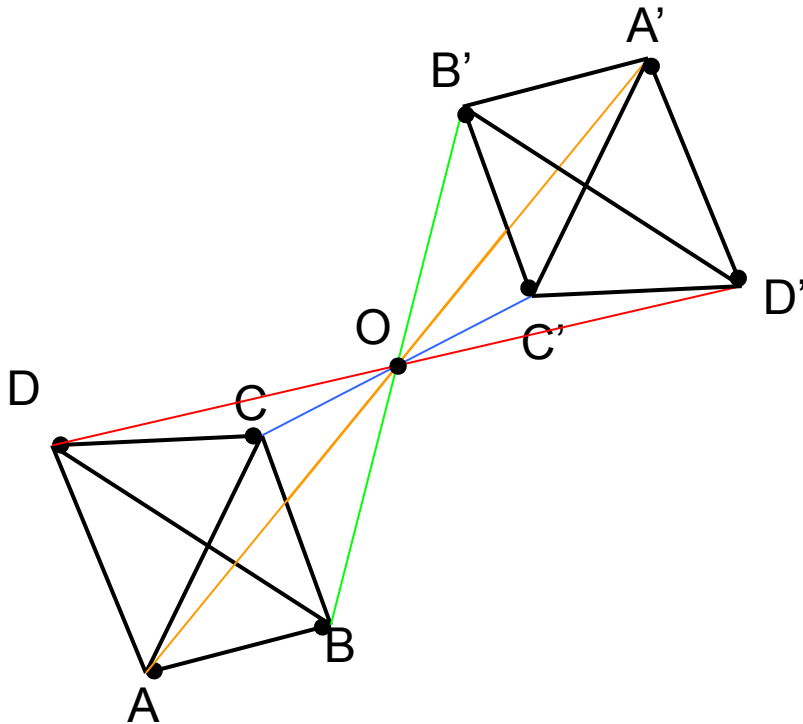
# Понятие движения

**Движение** – это отображение  
пространства на себя,  
сохраняющее расстояния  
между точками

# Виды движения

- Центральная симметрия
- Осевая симметрия
- Зеркальная симметрия
- Параллельный перенос

# Центральная симметрия



**Центральная симметрия**  
— отображение  
пространства на себя,  
при котором любая точка  
 $M$  переходит в  
симметричную ей точку  
 $M_1$  относительно данного  
центра  $O$ .

## Центральная симметрия является движением.

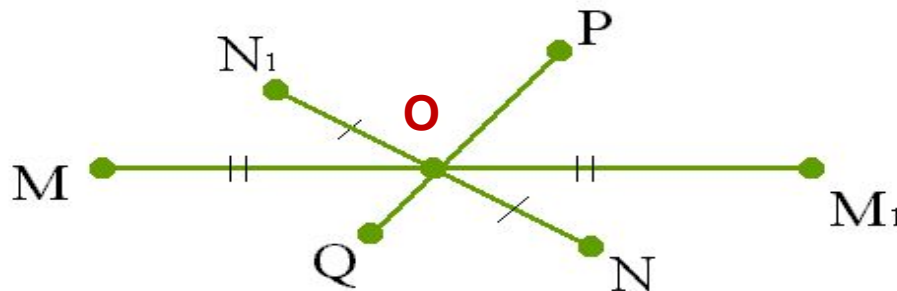
Обозначим буквой  **$O$**  центр симметрии и введем прямоугольную систему координат  $Oxyz$  с началом в точке  $O$ .

Установим связь между координатами двух точек  $M(x; y; z)$  и  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ , симметричных относительно точки  $O$ .

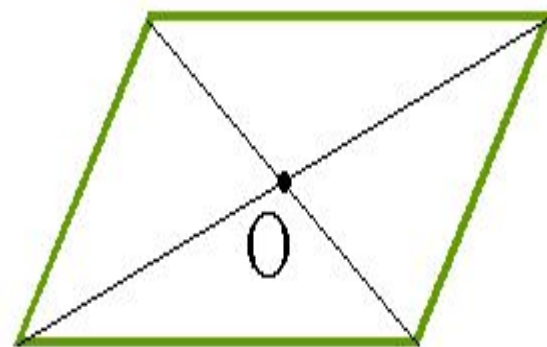
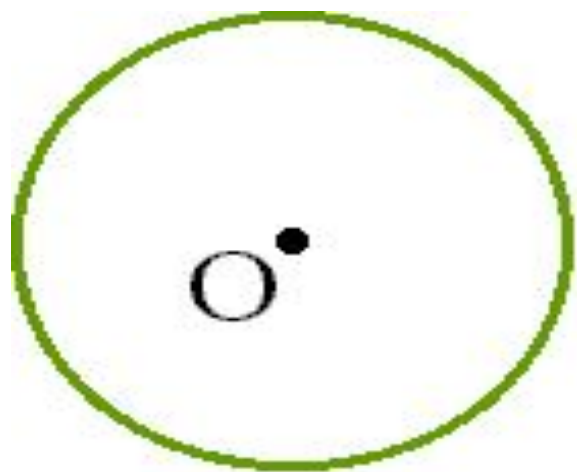
Если точка  $M$  не совпадает с центром  $O$ , то  $O$  — середина отрезка  $MM_1$ . По формулам координат середины отрезка

получаем  $\frac{x+x_1}{2}=0$      $\frac{y+y_1}{2}=0$      $\frac{z+z_1}{2}=0$ ,

откуда  **$x_1 = -x$ ,  $y_1 = -y$ ,  $z_1 = -z$** . Эти формулы верны и в том случае, когда точки  $M$  и  $O$  совпадают.

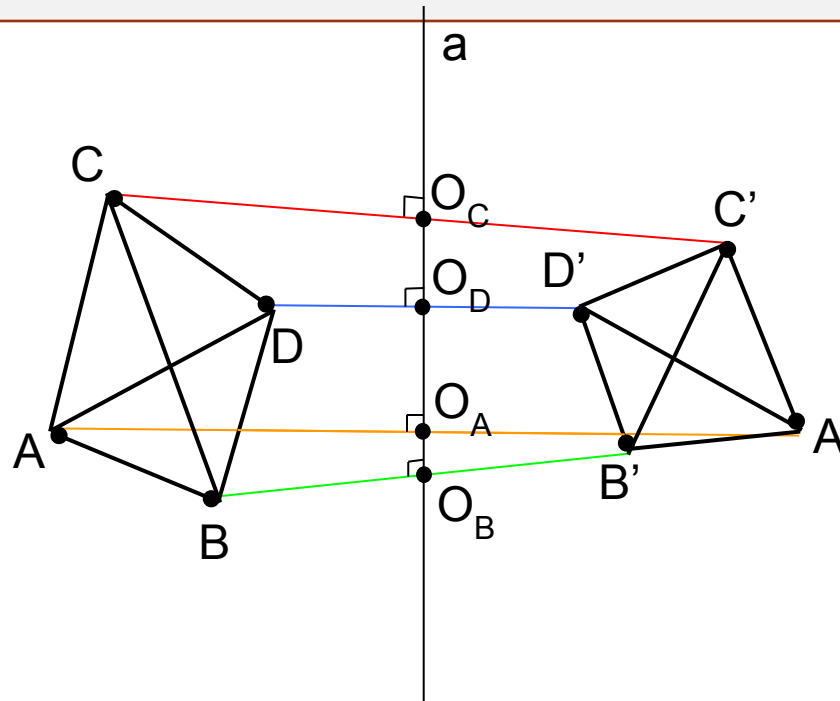






# Осевая симметрия

**Осевой симметрией с осью  $a$**  называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка  $M$  переходит в симметричную ей точку  $M_1$  относительно оси  $a$ .





# Осевая симметрия является движением.

Для этого введем прямоугольную систему координат  $Oxyz$  так, чтобы ось  $Oz$  совпала с осью симметрии, и установим связь между координатами двух точек  $M(x; y; z)$  и  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ , симметричных относительно оси  $Oz$ .

Если точка  $M$  не лежит на оси  $Oz$ , то ось  $Oz$ : 1) проходит через середину отрезка  $MM_1$  и 2) перпендикулярна к нему.

Из первого условия по формулам для координат середины отрезка получаем  $\frac{x+x_1}{2} = 0$   $\frac{y+y_1}{2} = 0$ ,  
откуда  $x_1 = -x$  и  $y_1 = -y$ .

Второе условие означает, что аппликаты точек  $M$  и  $M_1$  равны:  $z_1 = z_2$ . Полученные формулы верны и в том случае, когда точка  $M$  лежит на оси  $Oz$ .

Рассмотрим теперь любые две точки  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$  и докажем, что **расстояние между симметричными им точками  $A_1$  и  $B_1$  равно  $AB$ .**

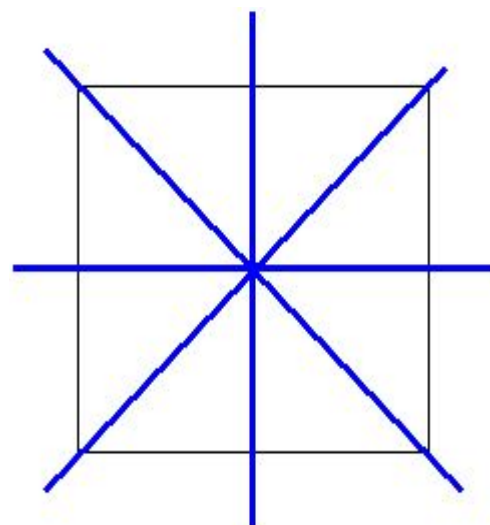
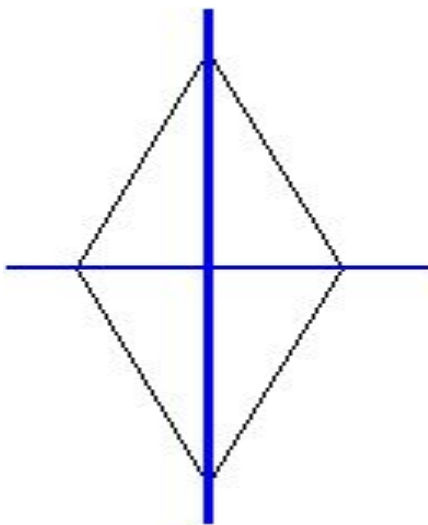
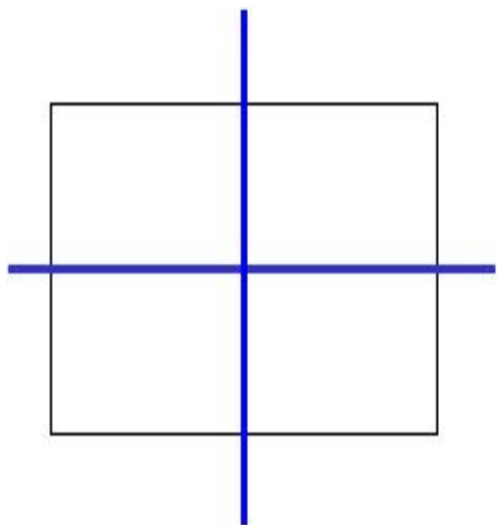
Точки  $A_1$  и  $B_1$  имеют координаты  $A_1(-x_1; -y_1; -z_1)$  и  $B_1(-x_2; -y_2; -z_2)$ .

По формуле расстояния между двумя точками находим:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}$$

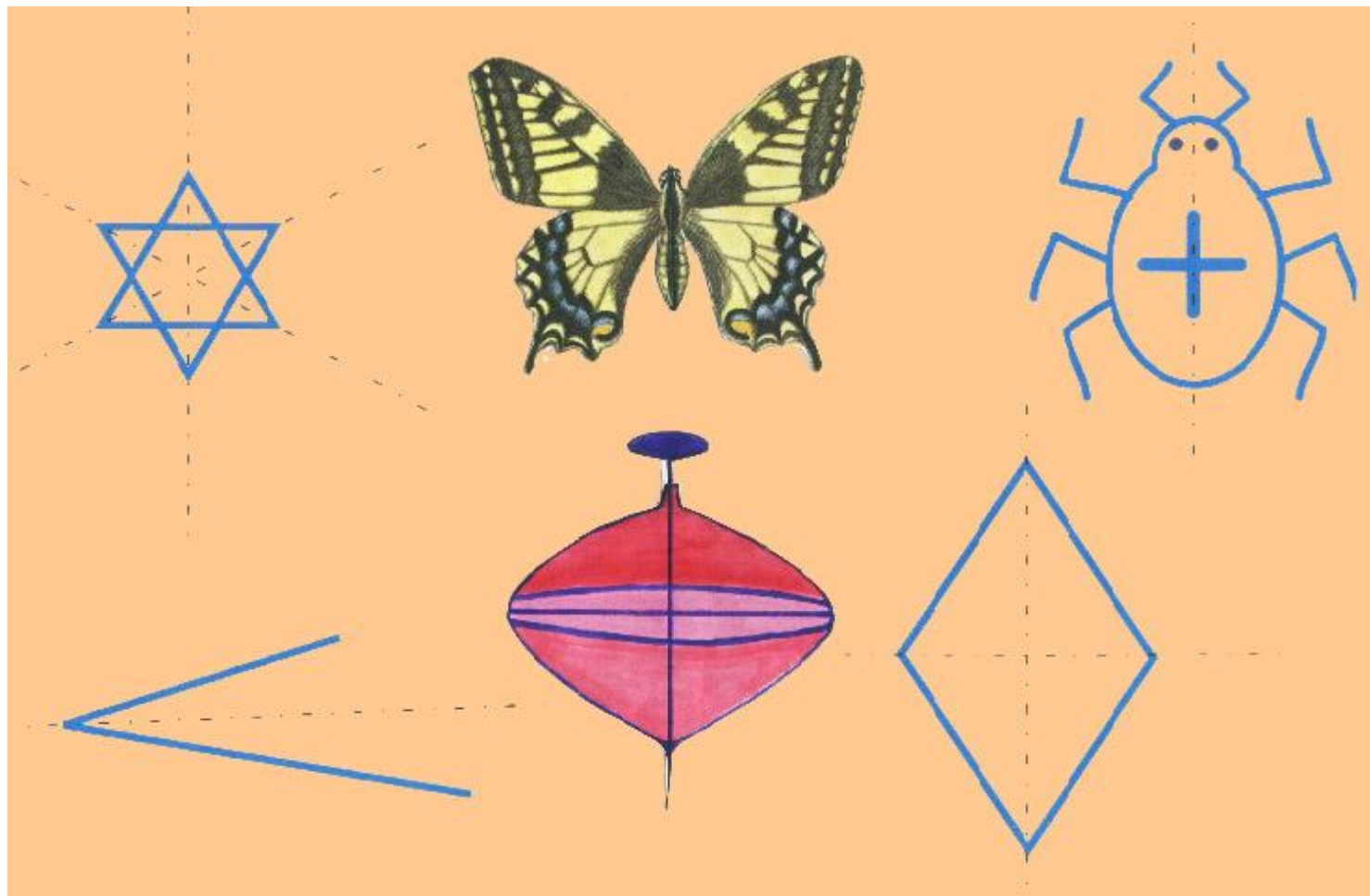
$$AB = A_1B_1$$



# Осевая симметрия



# Осевая симметрия вокруг нас





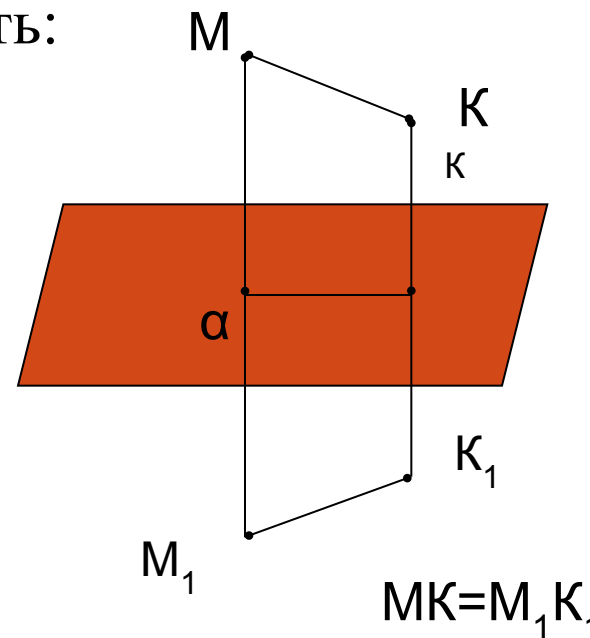
## Зеркальная симметрия является движением.

Для этого введем прямоугольную систему координат  $Oxyz$  так, чтобы плоскость  $Oxy$  совпала с плоскостью симметрии, и установим связь между координатами двух точек  $M(x; y; z)$  и  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ , симметричных относительно плоскости  $Oxy$ .

Если точка  $M$  не лежит в плоскости  $Oxy$ , то эта

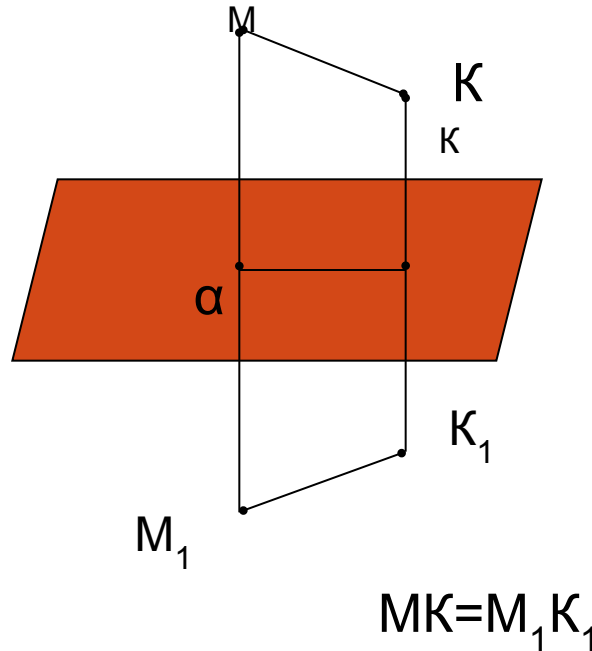
ПЛОСКОСТЬ:

- 1) проходит через середину отрезка  $MM_1$ ;
- 2) перпендикулярна к нему.



Из первого условия по формуле координат середины отрезка получаем :  $\frac{z + z_1}{2} = 0$  , значит  $z = -z_1$

Второе условие означает, что **отрезок  $MM_1$  параллелен оси  $Oz$ , и, следовательно,  $x_1 = x$ ,  $y_1 = y$** . Полученные формулы верны и в том случае, когда точка  $M$  лежит в плоскости  $Oxy$ .





Рассмотрим теперь две точки  $A(x_1, y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$  и докажем, что расстояние между симметричными им точками  $A_1$  и  $B_1$  равно  $AB$ . Точки  $A_1$  и  $B_1$  имеют координаты  $A_1(x_1; y_1; -z_1)$  и  $B_1(x_2; y_2; -z_2)$ . По формуле расстояния между двумя точками находим:

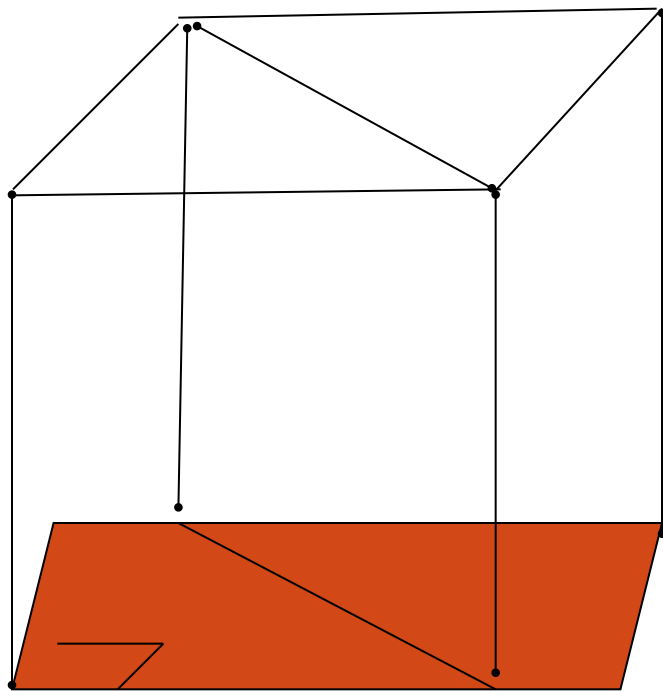
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}$$

$$AB = A_1B_1$$

# Фигуры, симметричные относительно плоскости

**Фигура ( тело) называется симметричной относительно некоторой плоскости, если эта плоскость разбивает фигуру на две равные симметричные части.**

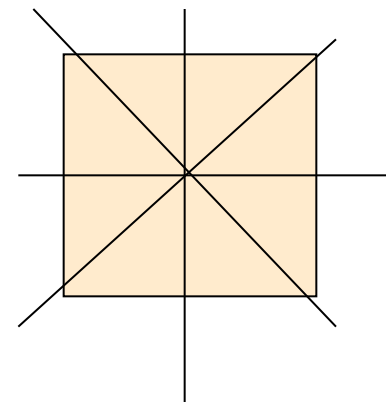
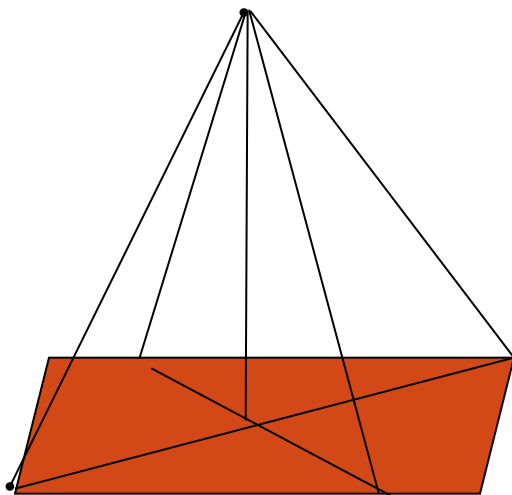


Сколько плоскостей симметрии имеет куб?

Ответы : 2; 4; 5; 6; 9

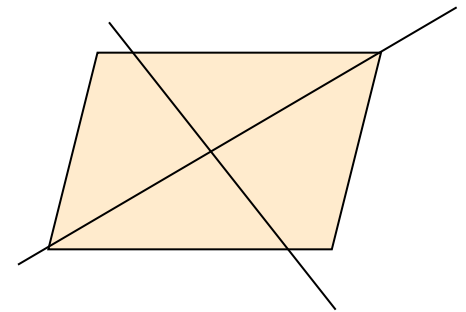
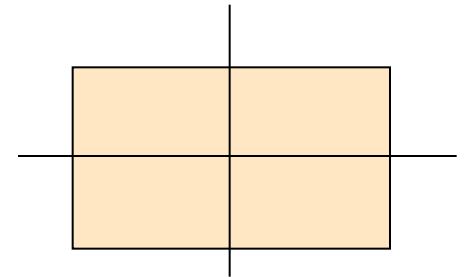
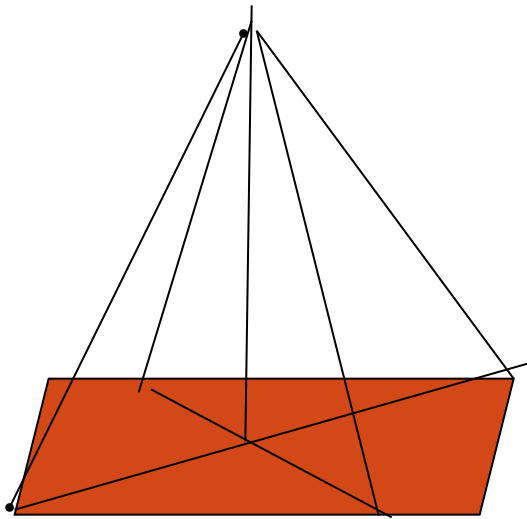
# Симметрия в пирамиде

Верно ли высказывание: **правильная четырехугольная пирамида имеет четыре плоскости симметрии**

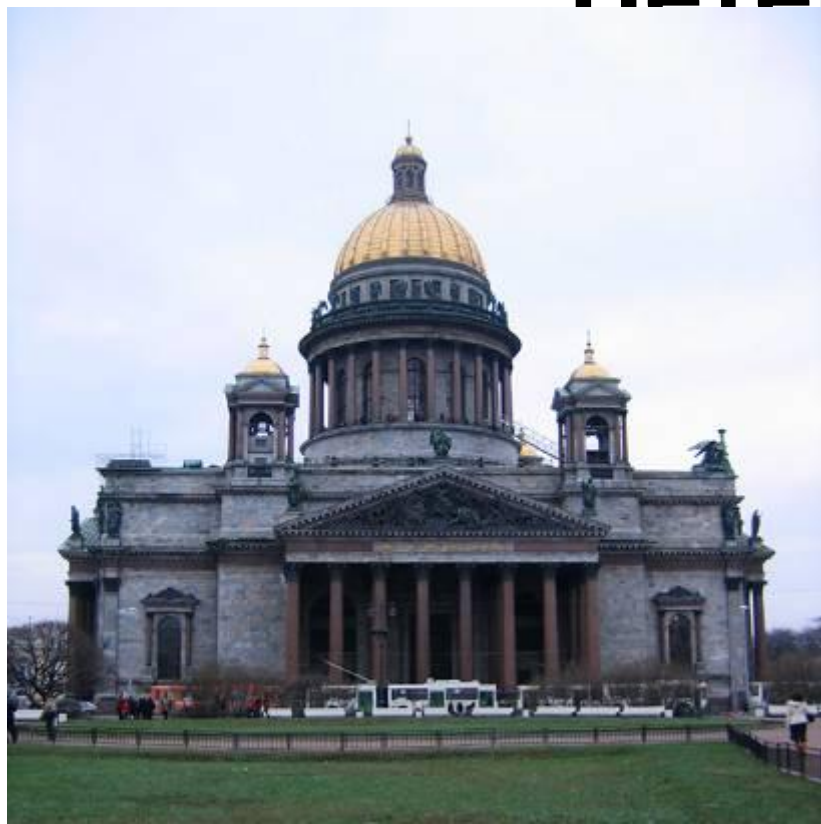


# Задачи

1. Сколько плоскостей симметрии имеет пирамида, в основании которой лежит прямоугольник, ромб?



# Зеркальная симметрия в архитектуре г. Санкт- Петербурга



Исаакиевский собор



Александринский  
театр

# Улица России

имеет плоскость симметрии в общем обзоре, но не все детали в архитектуре зданий симметричны.



# Зеркальная симметрия



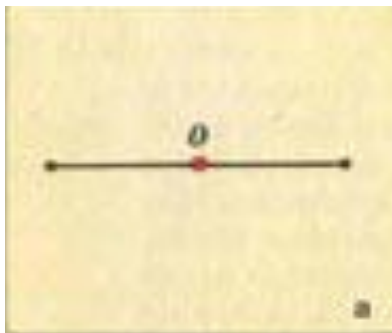
# Пример зеркальной симметрии



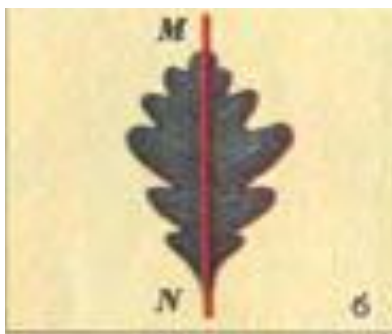
**Центральный зал станции**



# объекты



Центральная симметрия



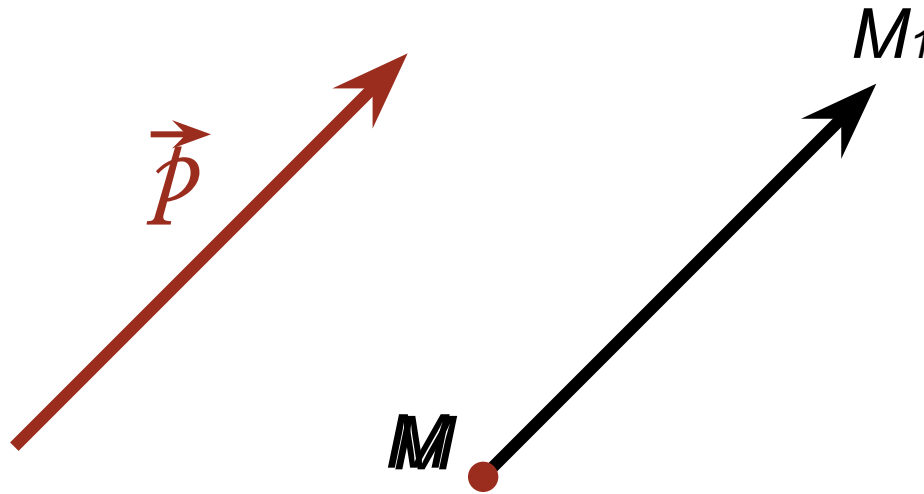
Осевая симметрия



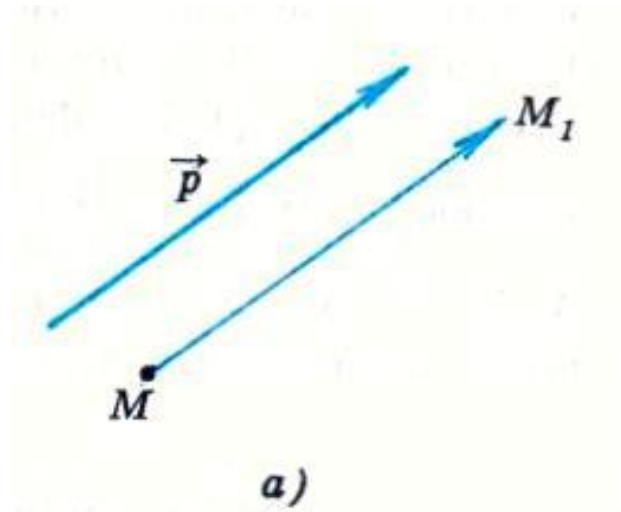
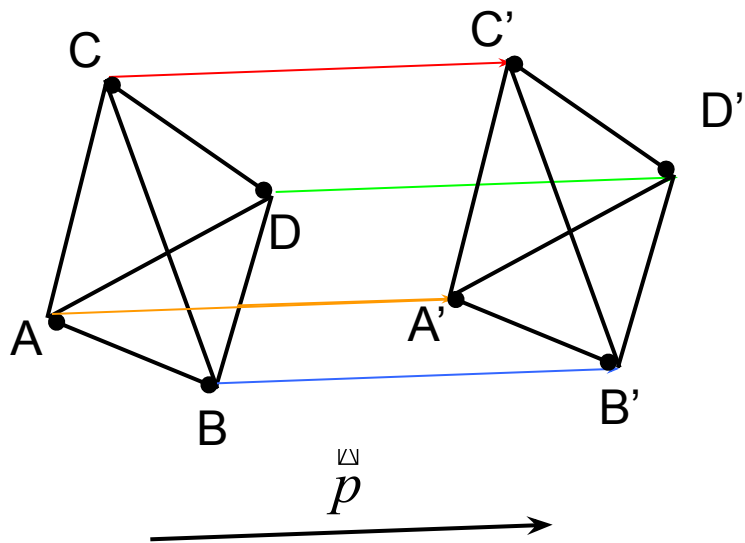
Зеркальная симметрия

# Параллельный перенос

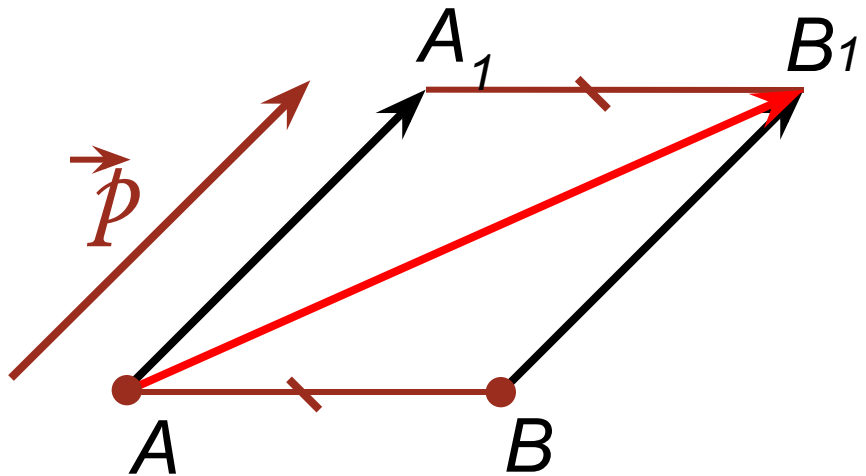
**Параллельным переносом на вектор  $p$**  называется отображение пространства на себя, при котором любая точка  $M$  переходит в такую точку  $M_1$ , что  $\overrightarrow{MM_1} = p$



# Параллельный перенос



# Параллельный перенос является движением.



При параллельном переносе на вектор  $p$  любые две точки  $A$  и  $B$  переходят в точки  $A_1$  и  $B_1$  такие, что  $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{p}$  и  $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{p}$ . Требуется доказать, что  $A_1B_1 = AB$ .

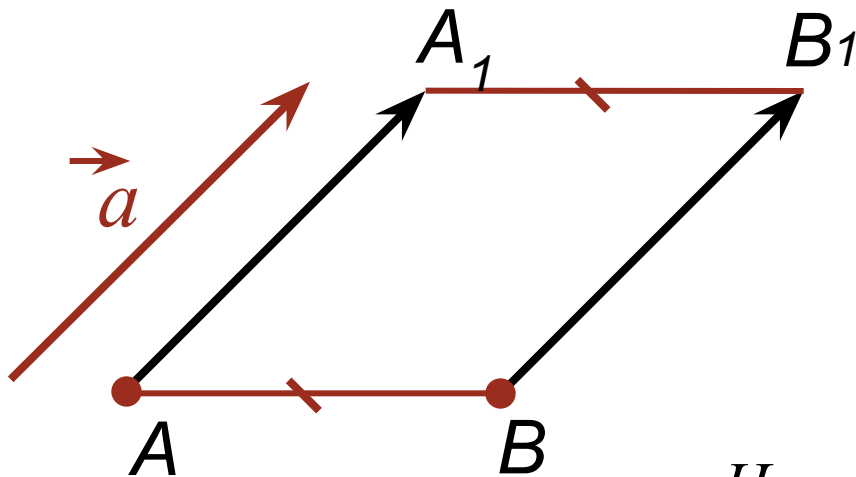
По правилу треугольника

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}$$

С другой стороны,  $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$

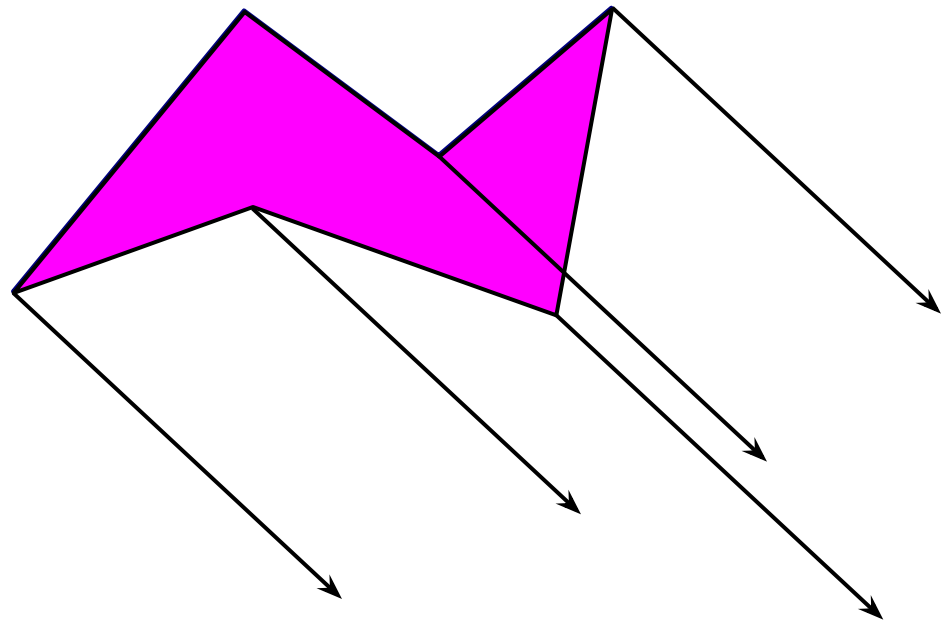
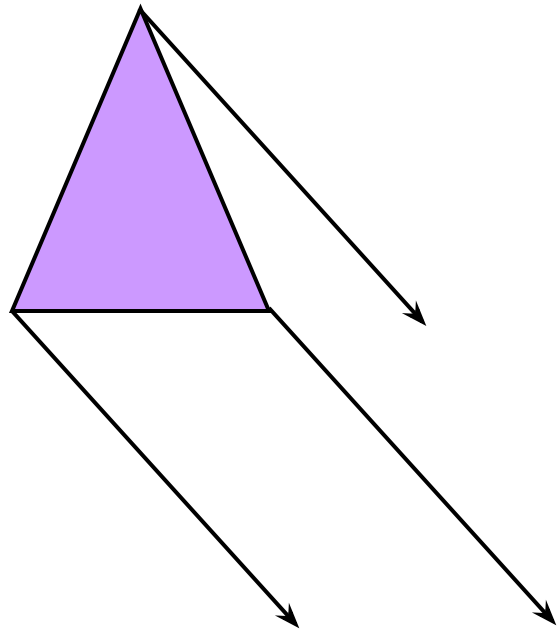
Из этих двух равенств получаем  $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{p}$ , или  $\overrightarrow{p} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{p}$ , откуда  $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$ . Следовательно,  $A_1B_1 = AB$ , что и требовалось доказать.

# Параллельный перенос

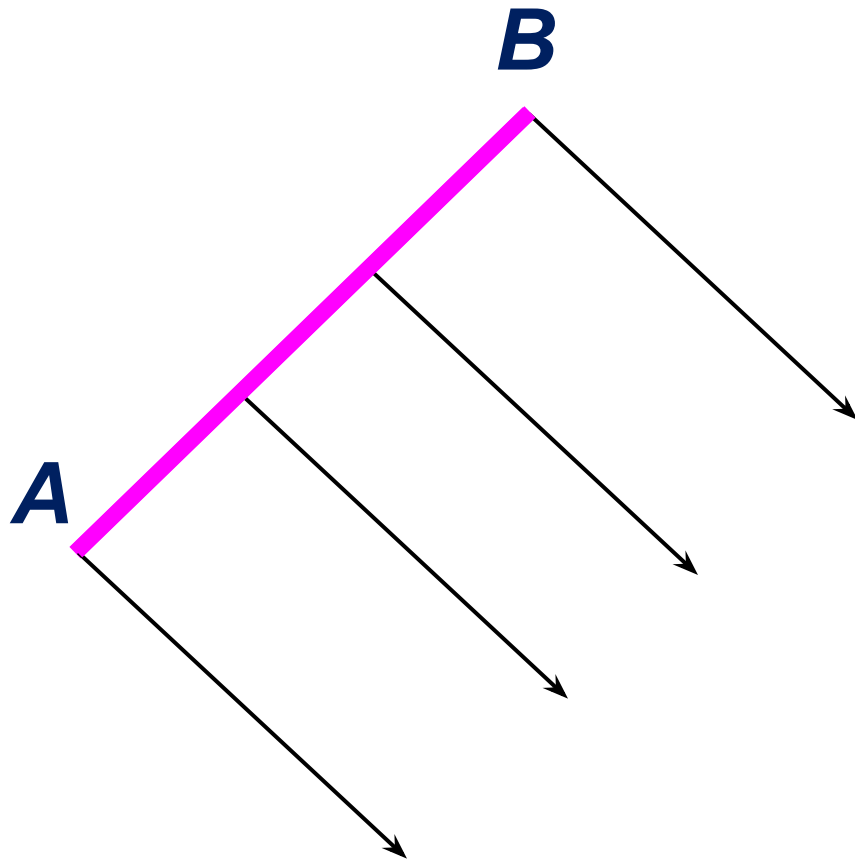


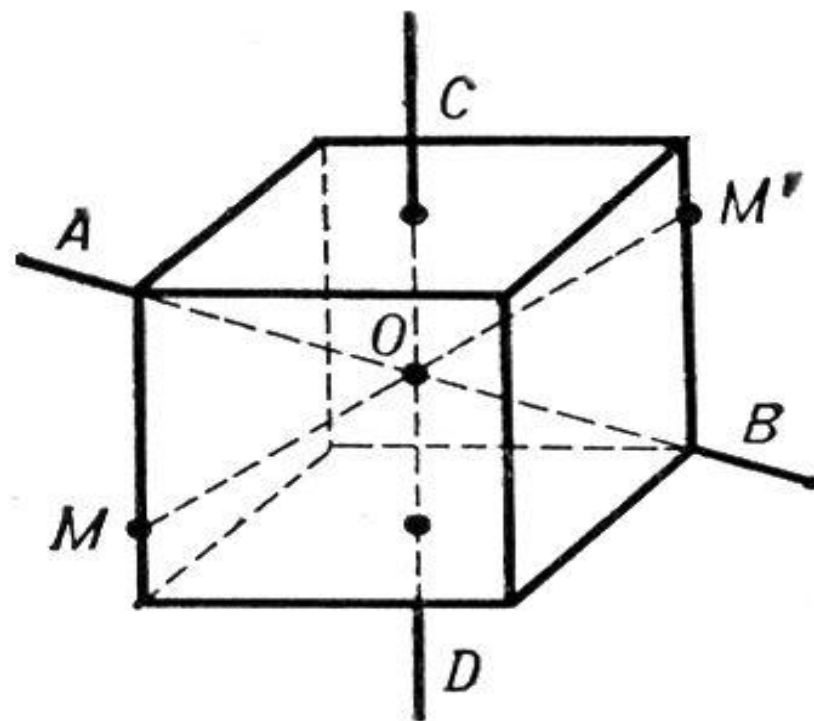
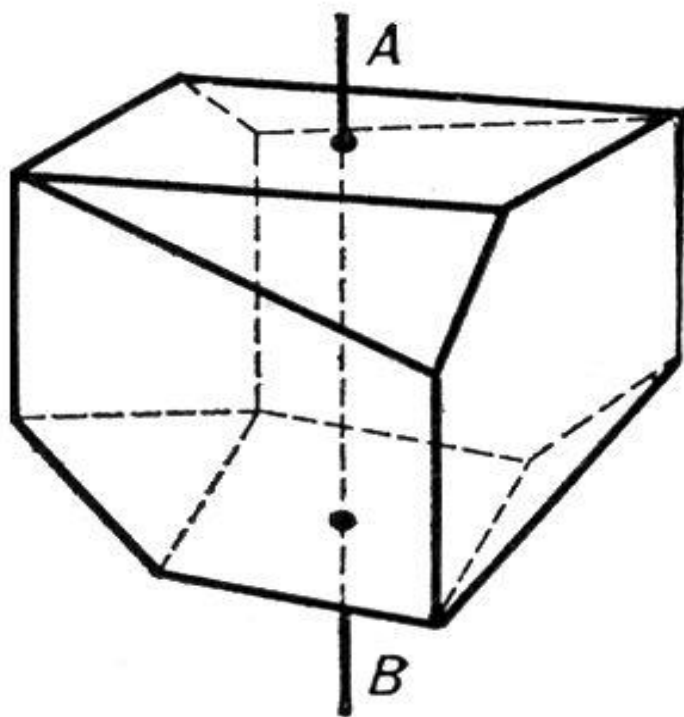
*Наглядно это движение можно представить себе как сдвиг всей плоскости в направлении данного вектора на его длину.*

# Параллельный перенос различных фигур



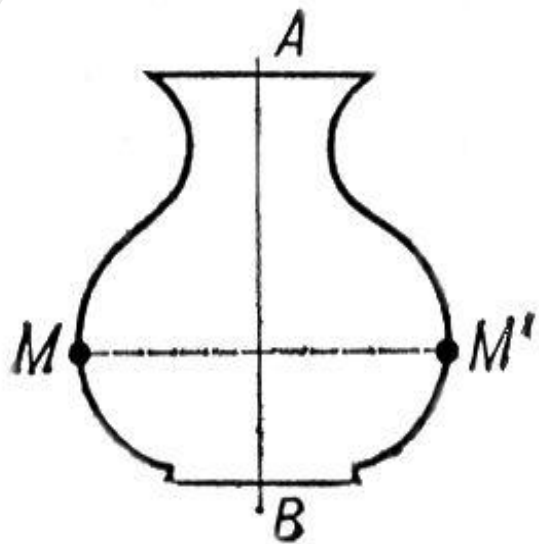
# Параллельный перенос



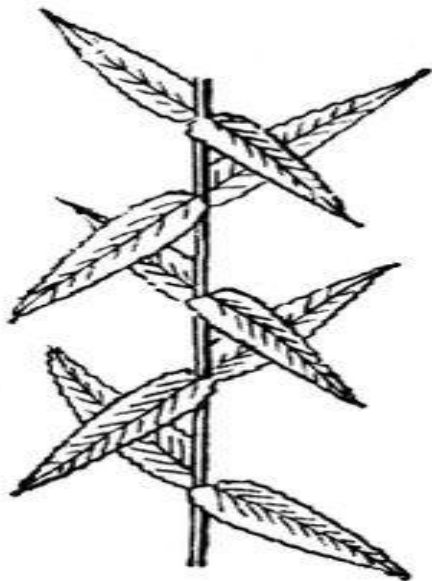


Многогранник. Зеркально-осевая симметрия. Куб. Симметрия третьего порядка.

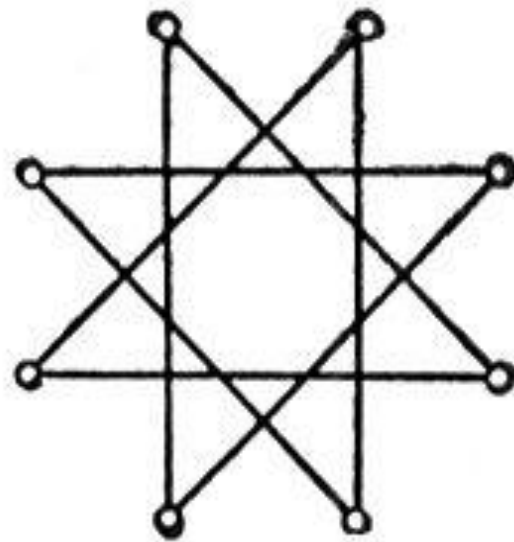




Кувшин. Плоская симметричная фигура.



Крапива. Винтовая симметрия.



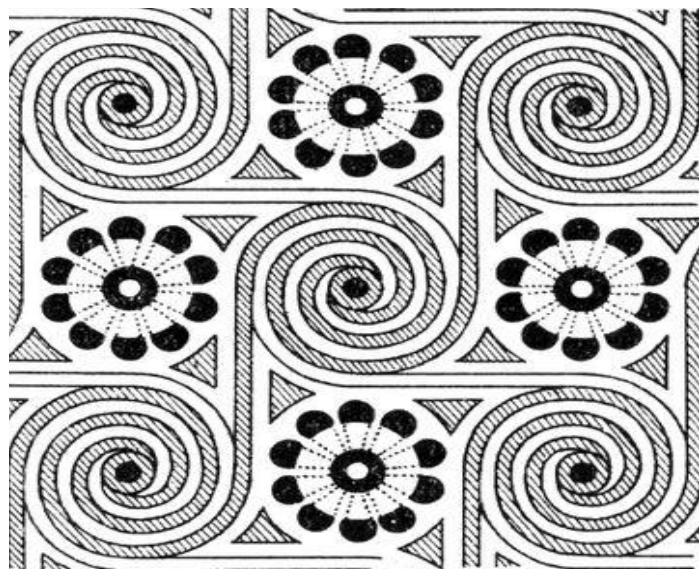
Звезда. Симметрия восьмого порядка.

# Зеркальная симметрия в природе

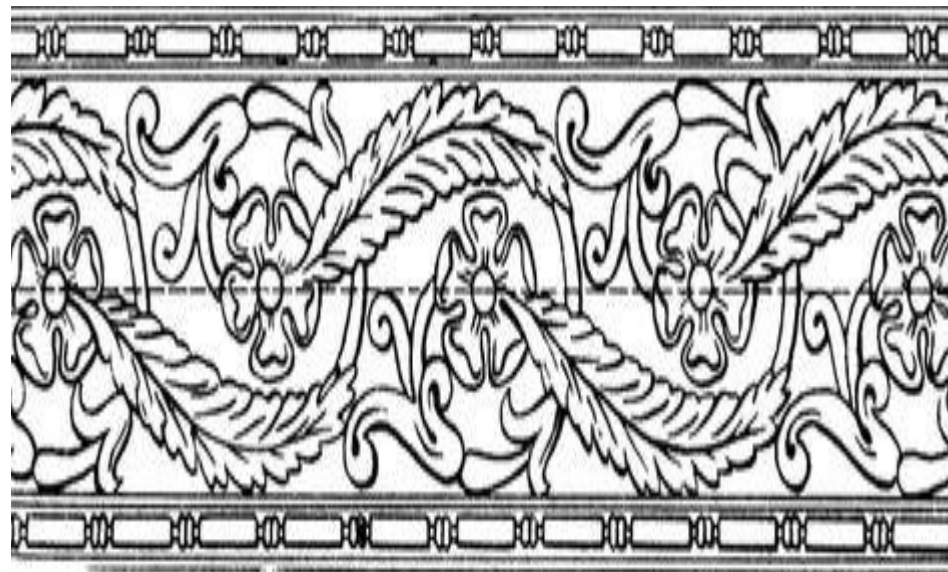


# Зеркальная симметрия в природе





Симметрия переноса.



Симметрия. Орнамент.