

Движение в пространстве

11 класс

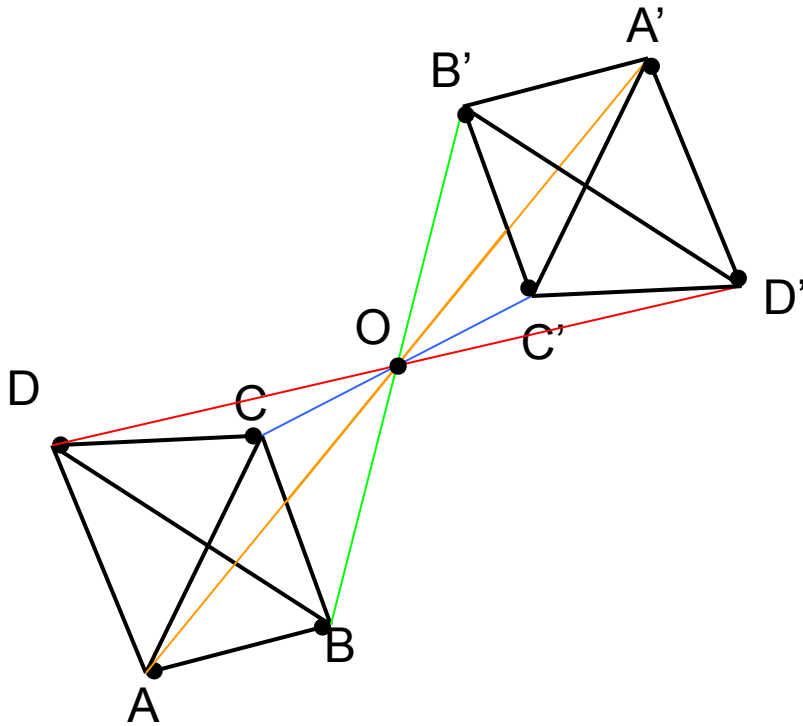
Понятие движения

Движение – это отображение
пространства на себя,
сохраняющее расстояния
между точками

Виды движения

- Центральная симметрия
- Осевая симметрия
- Зеркальная симметрия
- Параллельный перенос

Центральная симметрия



Центральная симметрия
— отображение
пространства на себя,
при котором любая точка
 M переходит в
симметричную ей точку
 M_1 относительно данного
центра O .

Центральная симметрия является движением.

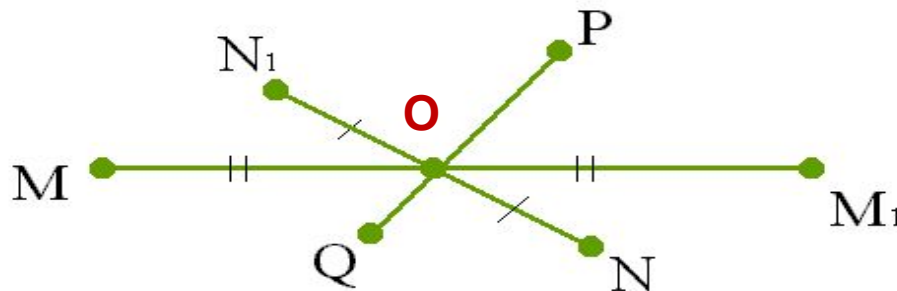
Обозначим буквой **O** центр симметрии и введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в точке O .

Установим связь между координатами двух точек $M(x; y; z)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, симметричных относительно точки O .

Если точка M не совпадает с центром O , то O — середина отрезка MM_1 . По формулам координат середины отрезка

получаем $\frac{x+x_1}{2}=0$ $\frac{y+y_1}{2}=0$ $\frac{z+z_1}{2}=0$,

откуда **$x_1 = -x$, $y_1 = -y$, $z_1 = -z$** . Эти формулы верны и в том случае, когда точки M и O совпадают.

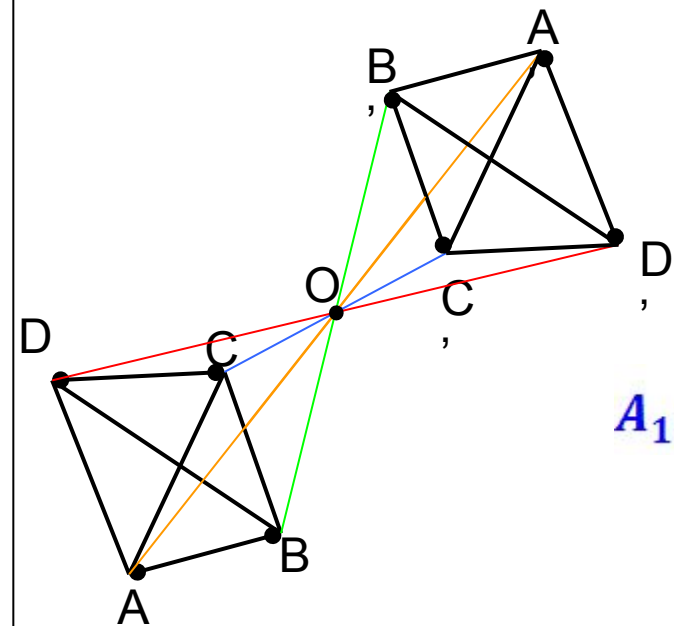


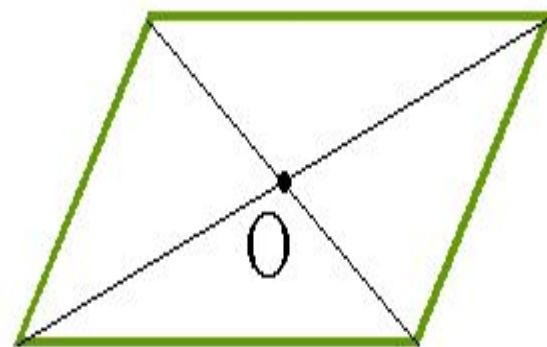
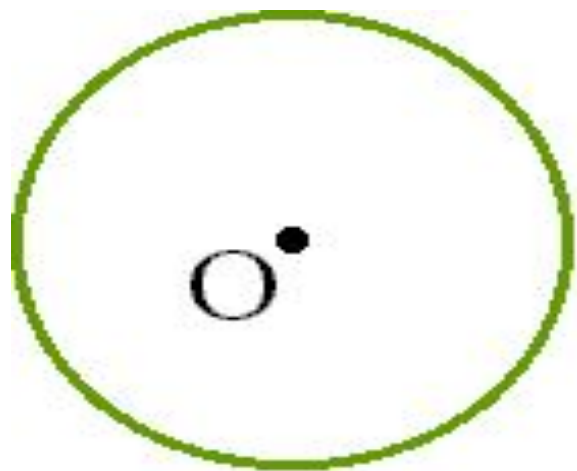
Рассмотрим теперь две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ и докажем, что расстояние между симметричными точками A_1 и B_1 равно AB . Точки A_1 и B_1 имеют координаты $A_1(-x_1; -y_1; -z_1)$ и $B_1(-x_2; -y_2; -z_2)$. По формуле расстояния между двумя точками

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}$$

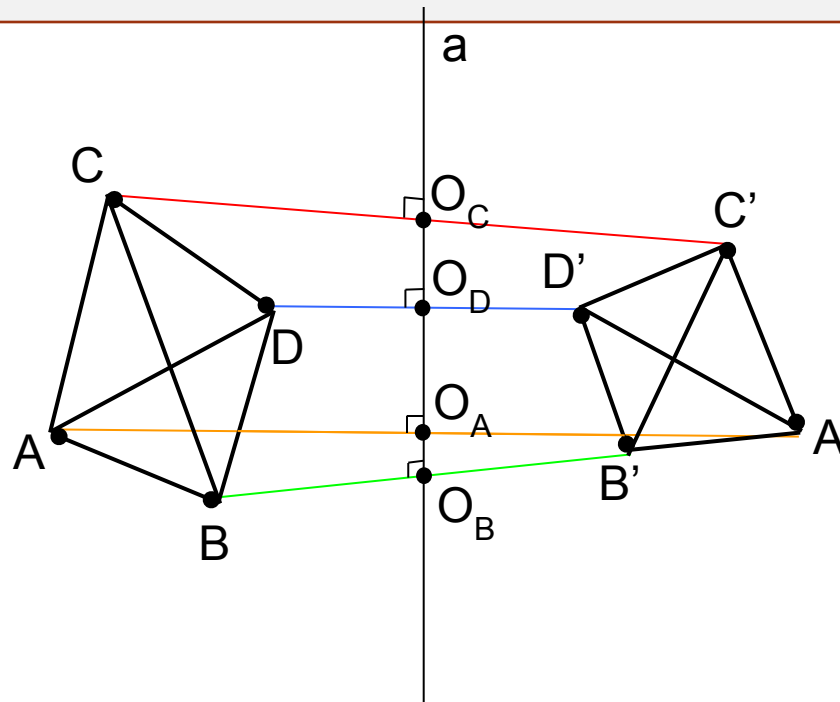
$$AB = A_1B_1$$





Осевая симметрия

Осевой симметрией с осью a называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в симметричную ей точку M_1 относительно оси a .



Осевая симметрия является движением.

Для этого введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы ось Oz совпала с осью симметрии, и установим связь между координатами двух точек $M(x; y; z)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, симметричных относительно оси Oz .

Если точка M не лежит на оси Oz , то ось Oz : 1) проходит через середину отрезка MM_1 и 2) перпендикулярна к нему.

Из первого условия по формулам для координат середины отрезка получаем $\frac{x+x_1}{2} = 0$ $\frac{y+y_1}{2} = 0$,
откуда $x_1 = -x$ и $y_1 = -y$.

Второе условие означает, что аппликаты точек M и M_1 равны: $z_1 = z_2$. Полученные формулы верны и в том случае, когда точка M лежит на оси Oz .

Рассмотрим теперь любые две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ и докажем, что **расстояние между симметричными им точками A_1 и B_1 равно AB .**

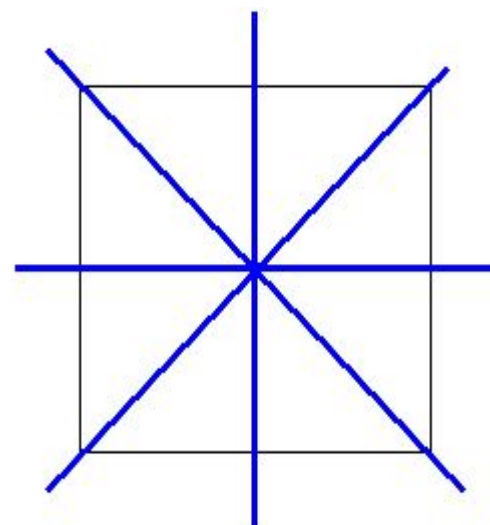
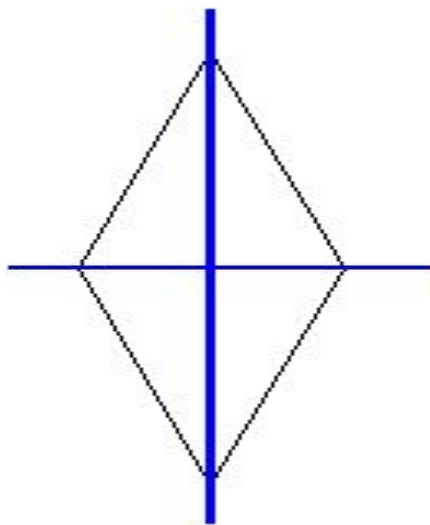
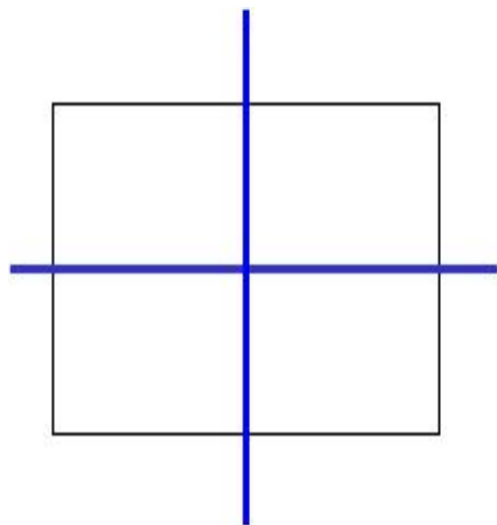
Точки A_1 и B_1 имеют координаты $A_1(-x_1; -y_1; -z_1)$ и $B_1(-x_2; -y_2; -z_2)$.

По формуле расстояния между двумя точками находим:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}$$

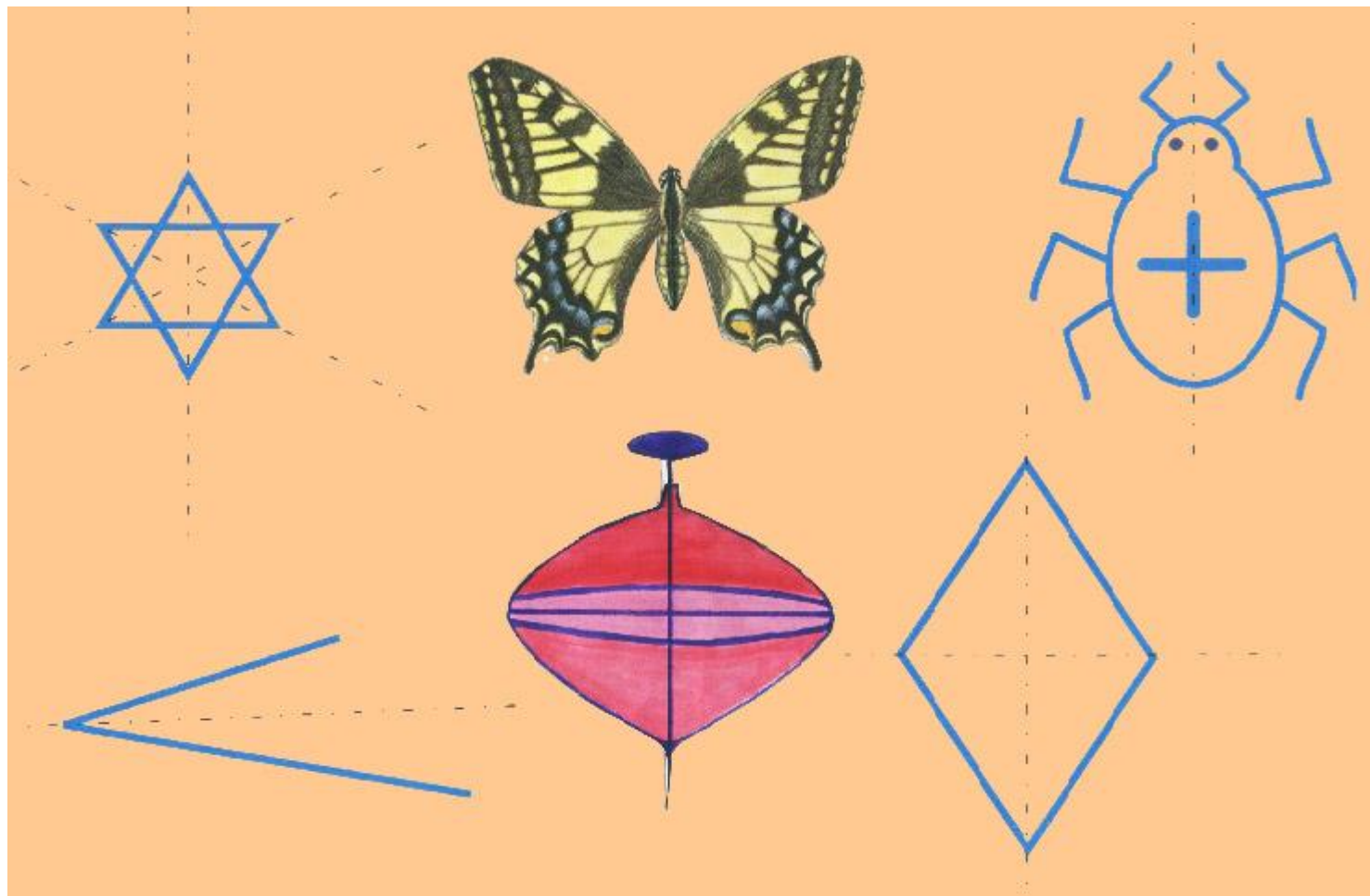
$$AB = A_1B_1$$



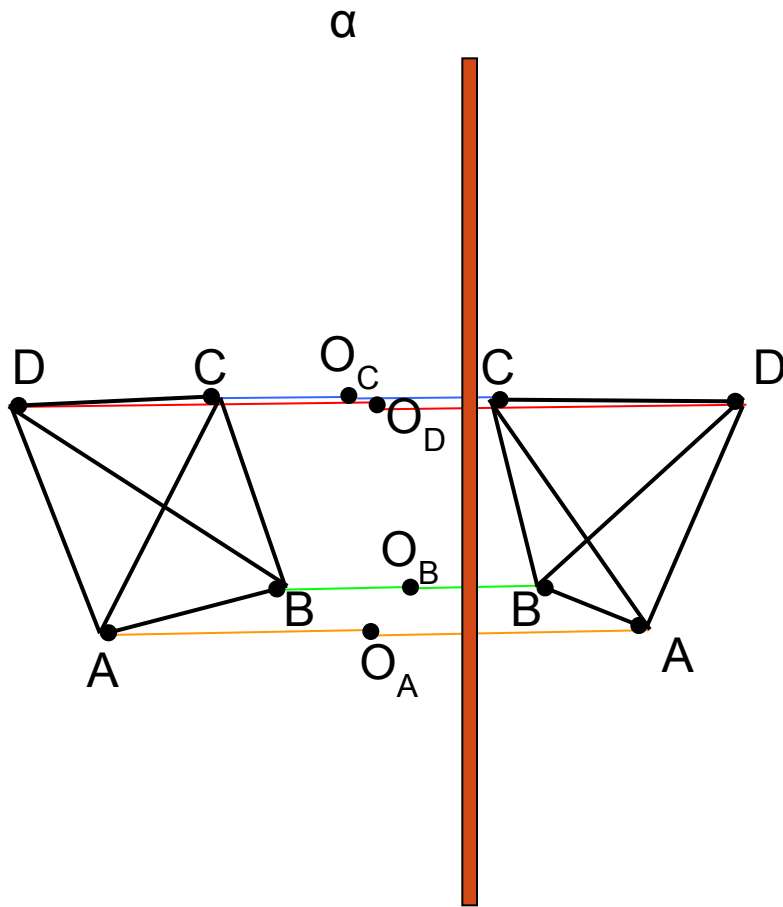
Осевая симметрия



Осевая симметрия вокруг нас



Зеркальная симметрия



Зеркальной симметрией (относительно плоскости α) называется такое **отображение пространства на себя**, при котором **любая точка M переходит в симметричную ей относительно плоскости α точку M_1 .**

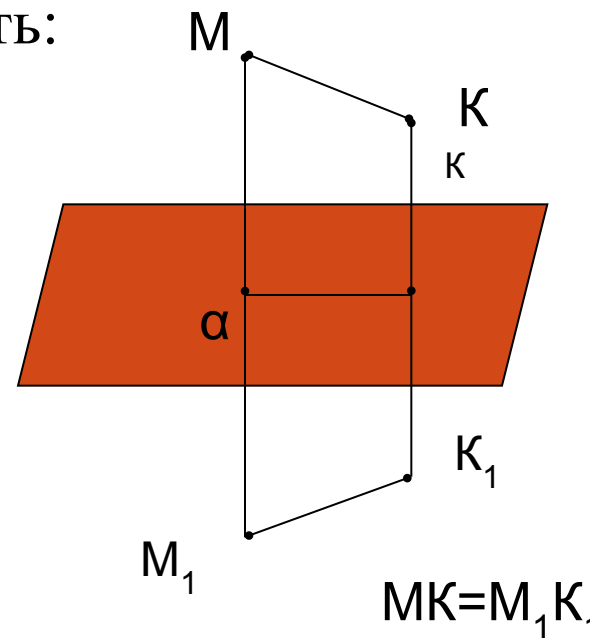
Зеркальная симметрия является движением.

Для этого введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы плоскость Oxy совпала с плоскостью симметрии, и установим связь между координатами двух точек $M(x; y; z)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, симметричных относительно плоскости Oxy .

Если точка M не лежит в плоскости Oxy , то эта

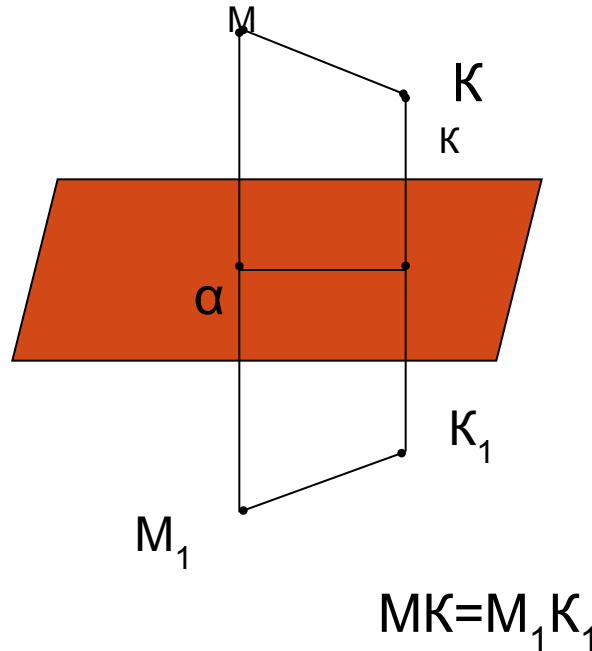
ПЛОСКОСТЬ:

- 1) проходит через середину отрезка MM_1 ;
- 2) перпендикулярна к нему.



Из первого условия по формуле координат середины отрезка получаем : $\frac{z + z_1}{2} = 0$, значит $z = -z_1$

Второе условие означает, что отрезок MM_1 параллелен оси Oz , и, следовательно, $x_1 = x$, $y_1 = y$. Полученные формулы верны и в том случае, когда точка M лежит в плоскости Oxy .



Рассмотрим теперь две точки $A(x_1, y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ и докажем, что расстояние между симметричными им точками A_1 и B_1 равно AB . Точки A_1 и B_1 имеют координаты $A_1(x_1; y_1; -z_1)$ и $B_1(x_2; y_2; -z_2)$. По формуле расстояния между двумя точками находим:

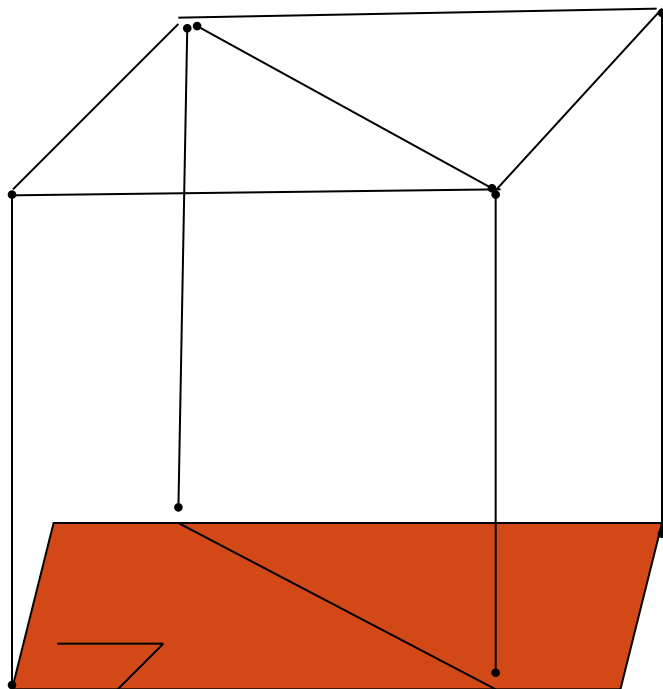
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}$$

$$AB = A_1B_1$$

Фигуры, симметричные относительно плоскости

Фигура (тело) называется симметричной относительно некоторой плоскости, если эта плоскость разбивает фигуру на две равные симметричные части.

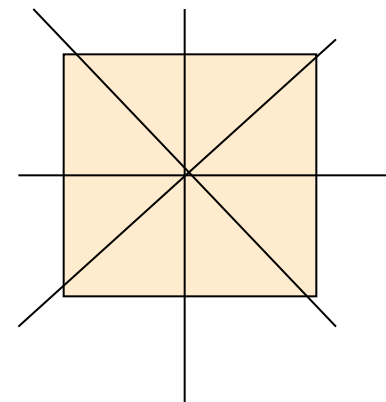
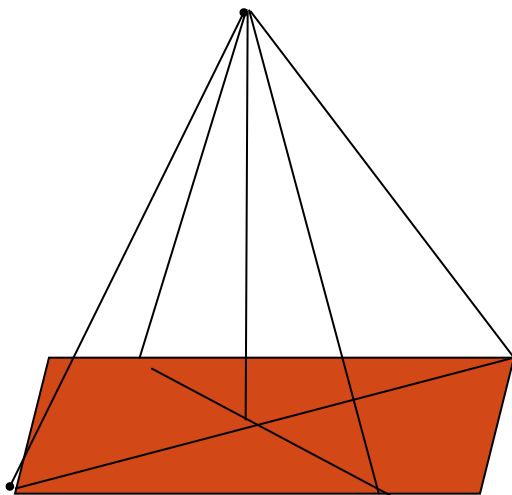


Сколько плоскостей симметрии имеет куб?

Ответы : 2; 4; 5; 6; 9

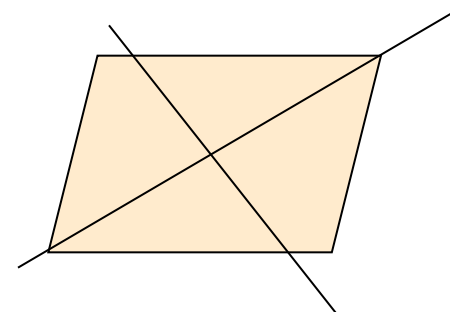
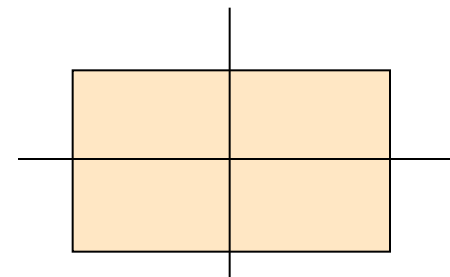
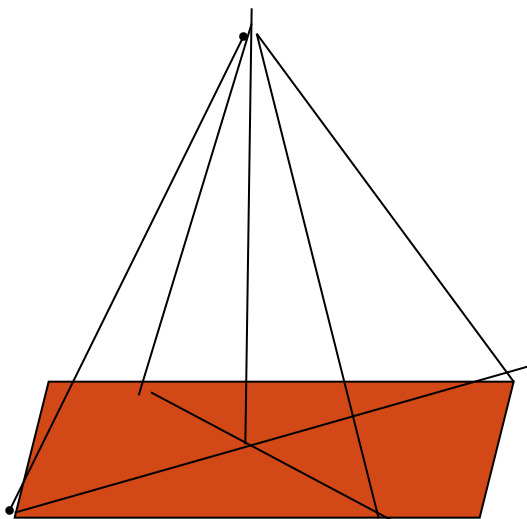
Симметрия в пирамиде

Верно ли высказывание: **правильная четырехугольная пирамида имеет четыре плоскости симметрии**



Задачи

1. Сколько плоскостей симметрии имеет пирамида, в основании которой лежит прямоугольник, ромб?



Зеркальная симметрия в архитектуре г. Санкт- Петербурга



Исаакиевский собор



Александринский
театр

Улица России

имеет плоскость симметрии в общем обзоре, но не все детали в архитектуре зданий симметричны.



Зеркальная симметрия

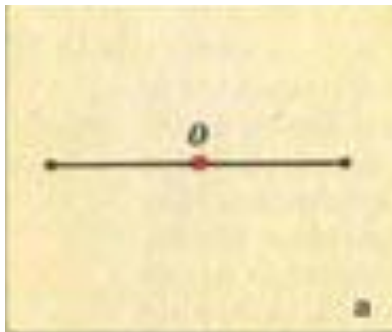


Пример зеркальной симметрии

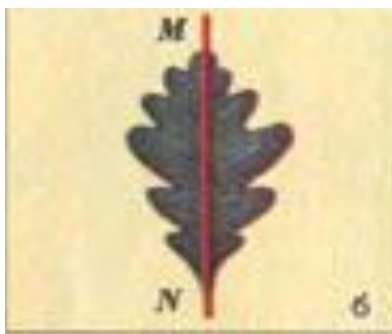


Центральный зал станции

объекты



Центральная симметрия



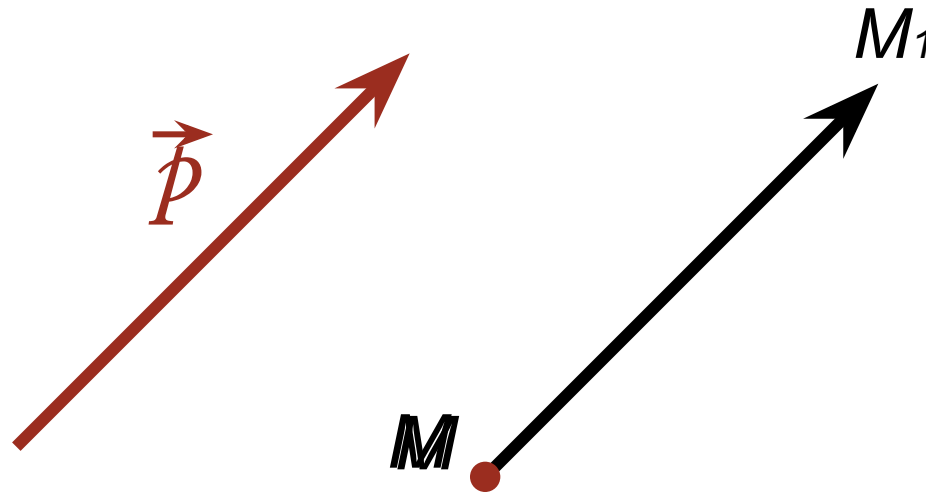
Осевая симметрия



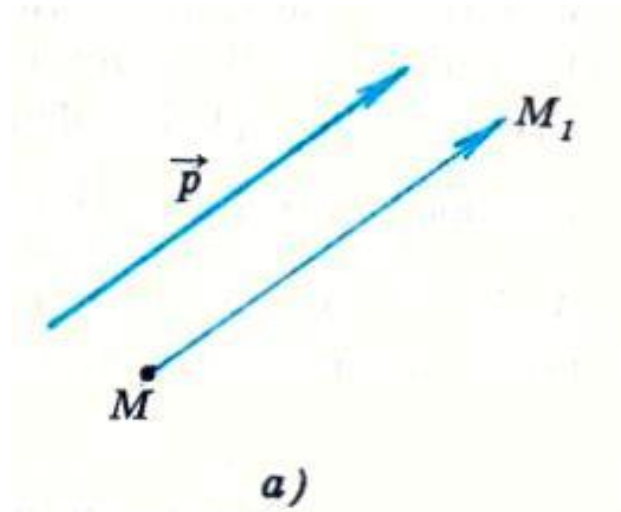
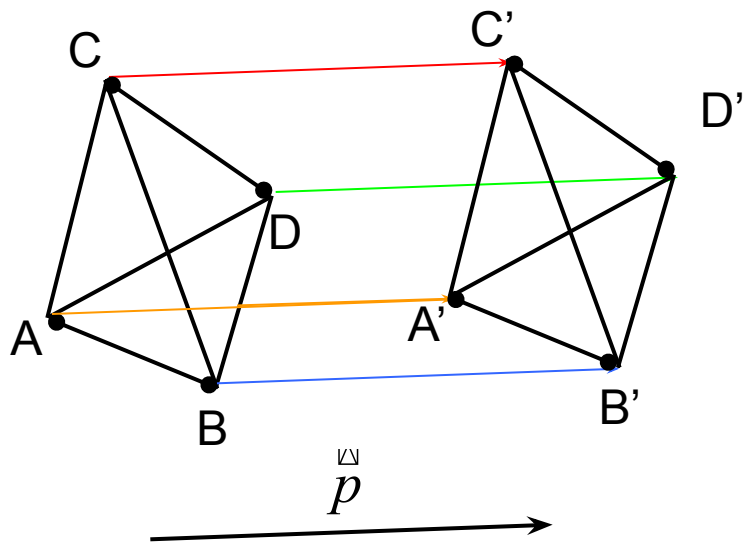
Зеркальная симметрия

Параллельный перенос

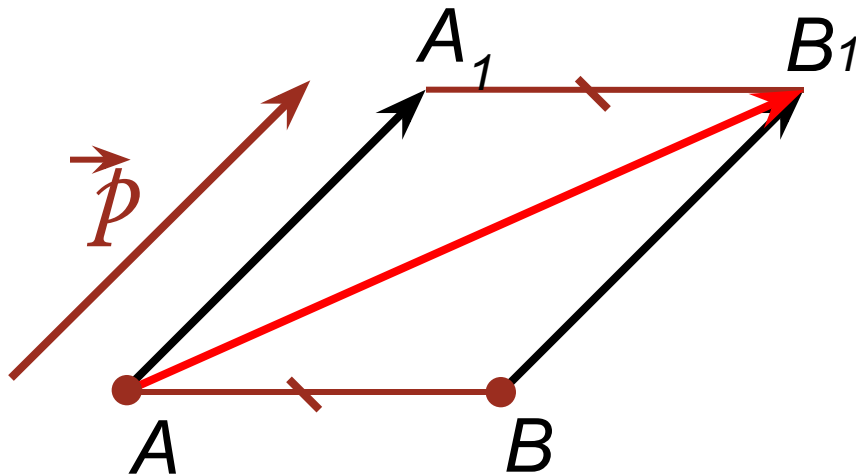
Параллельным переносом на вектор p называется отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в такую точку M_1 , что $\overrightarrow{MM_1} = p$



Параллельный перенос



Параллельный перенос является движением.



При параллельном переносе на вектор p любые две точки A и B переходят в точки A_1 и B_1 такие, что $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{p}$. Требуется доказать, что $A_1B_1 = AB$.

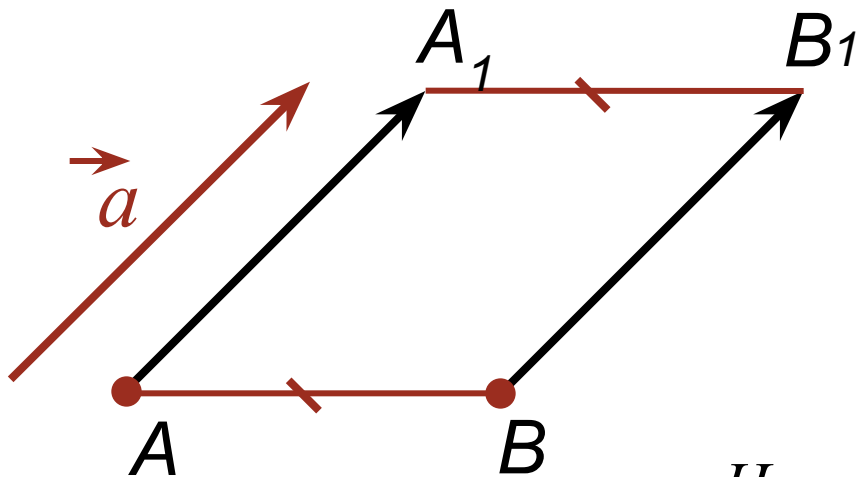
По правилу треугольника

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}$$

С другой стороны, $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$

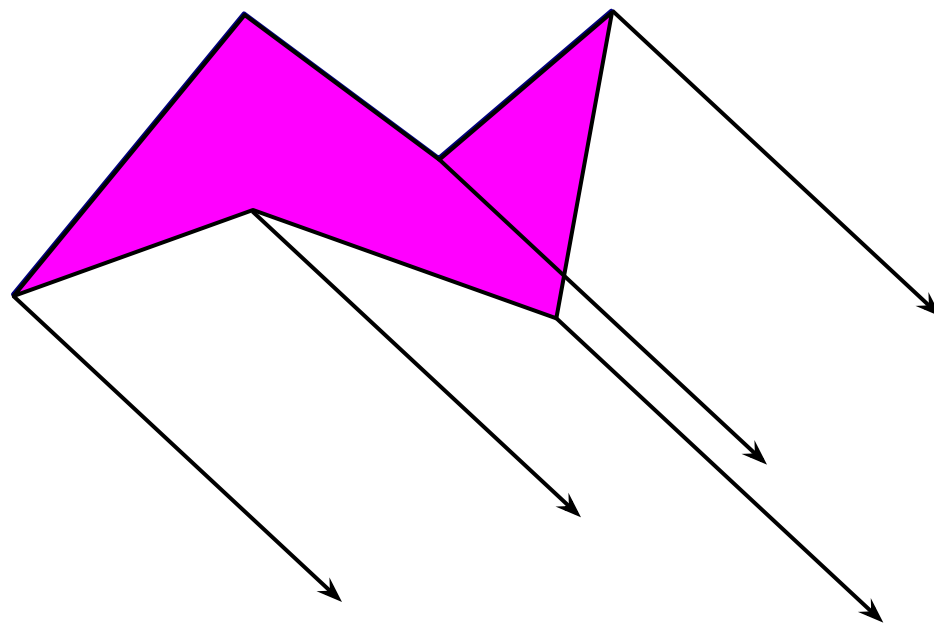
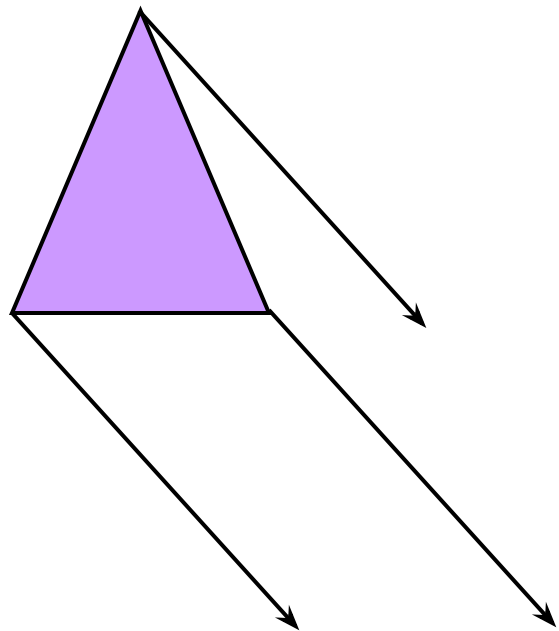
Из этих двух равенств получаем $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{p}$,
или $\overrightarrow{p} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{p}$, откуда $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$. Следовательно,
 $A_1B_1 = AB$, что и требовалось доказать.

Параллельный перенос

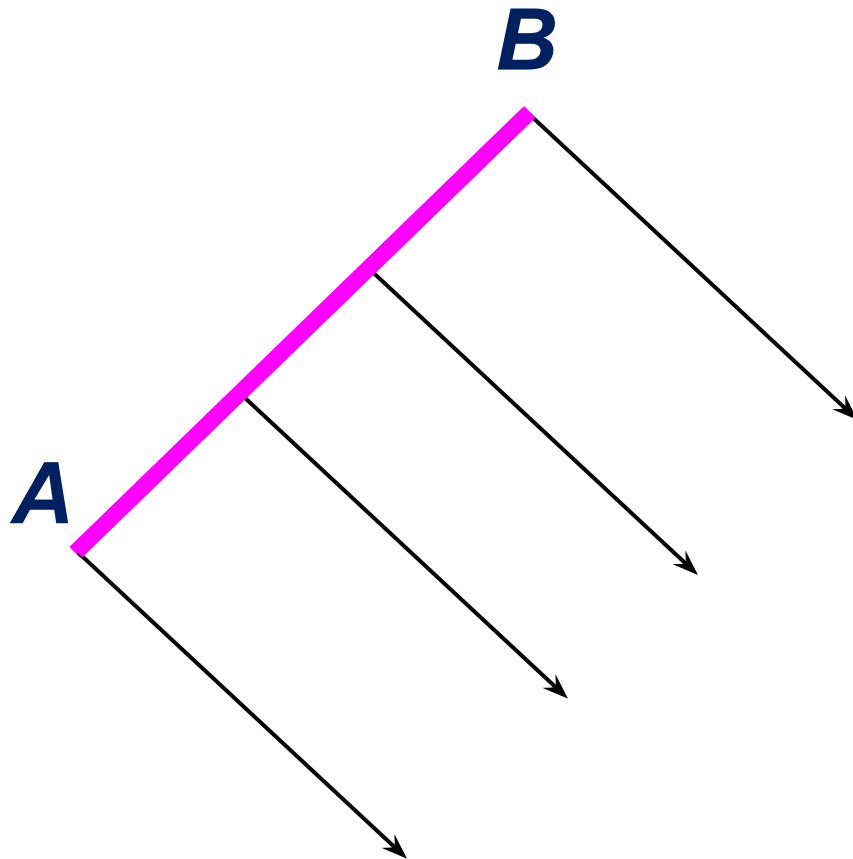


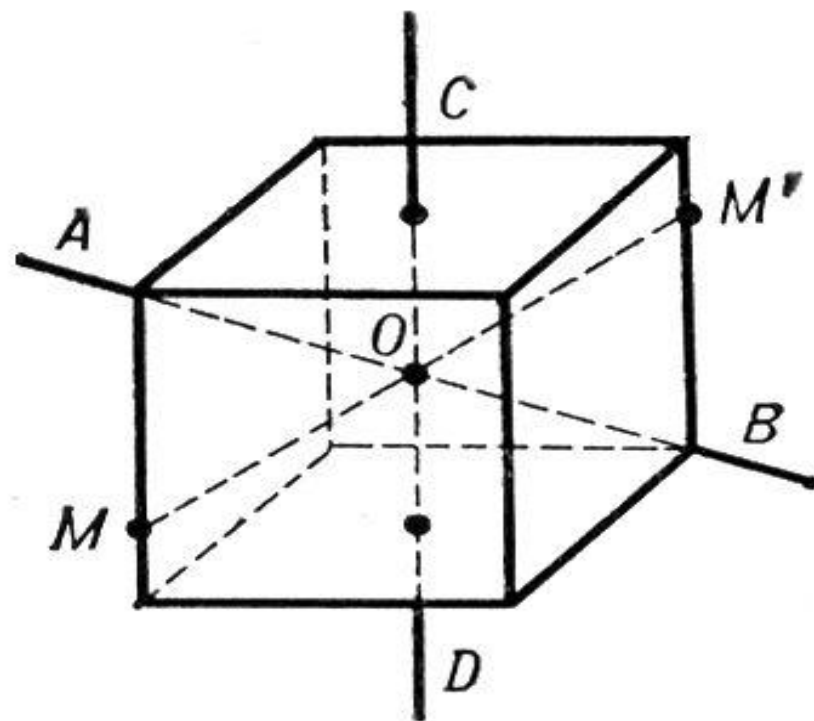
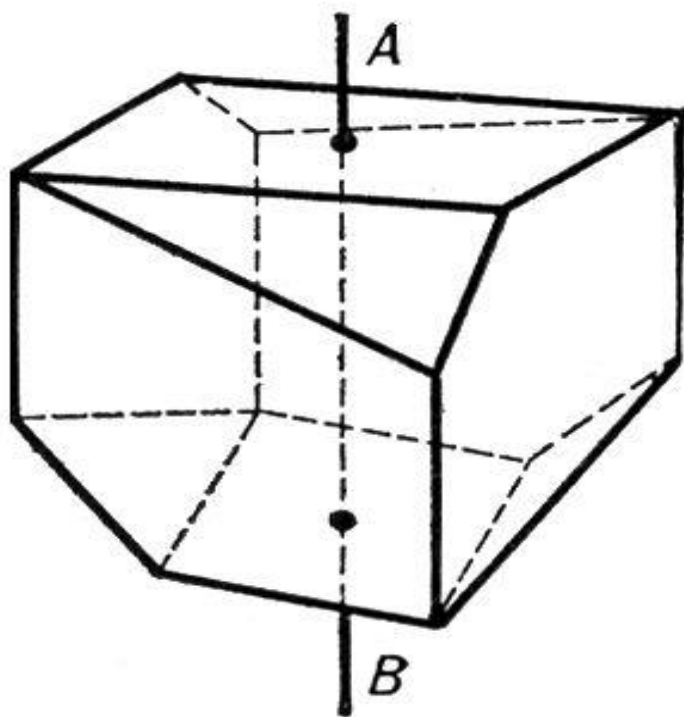
Наглядно это движение можно представить себе как сдвиг всей плоскости в направлении данного вектора на его длину.

Параллельный перенос различных фигур

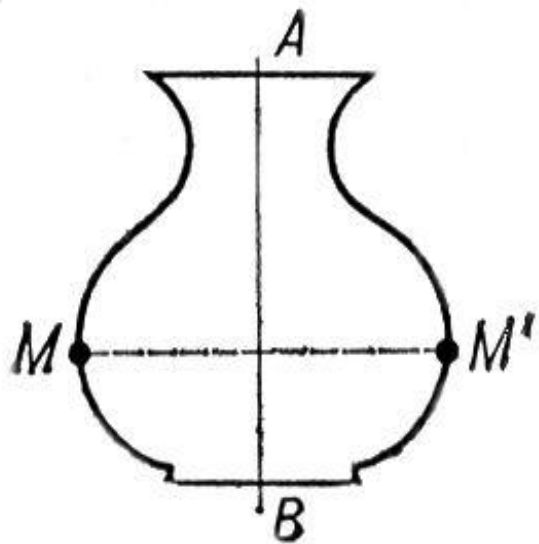


Параллельный перенос

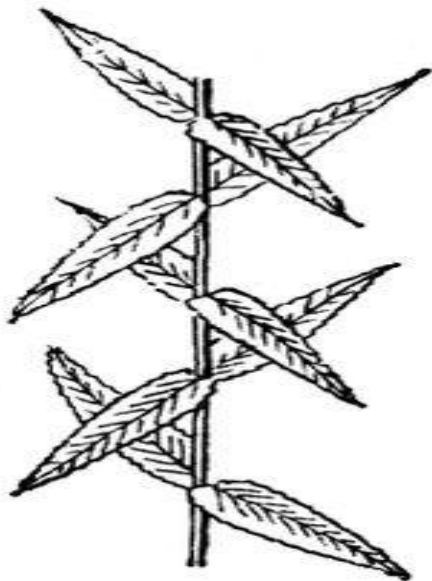




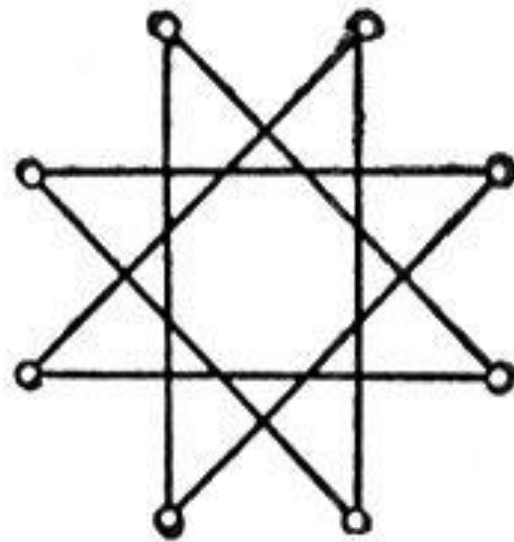
Многогранник. Зеркально-осевая симметрия. Куб. Симметрия третьего порядка.



Кувшин. Плоская симметричная фигура.



Крапива. Винтовая симметрия.



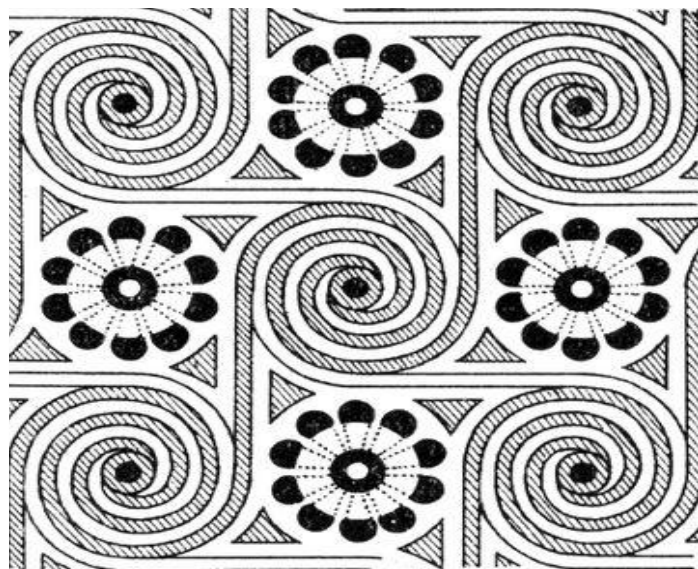
Звезда. Симметрия восьмого порядка.

Зеркальная симметрия в природе

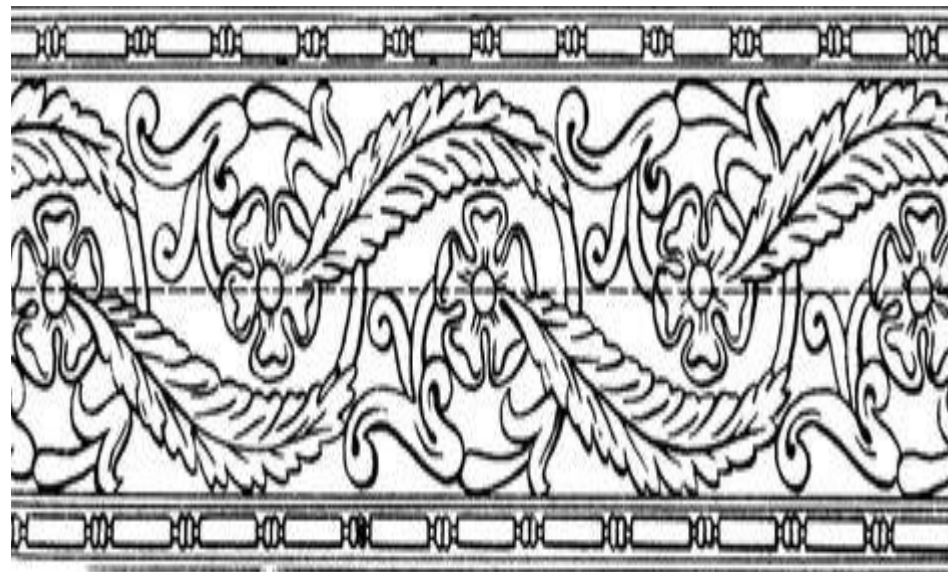


Зеркальная симметрия в природе





Симметрия переноса.



Симметрия. Орнамент.