Движение в пространстве

11 класс

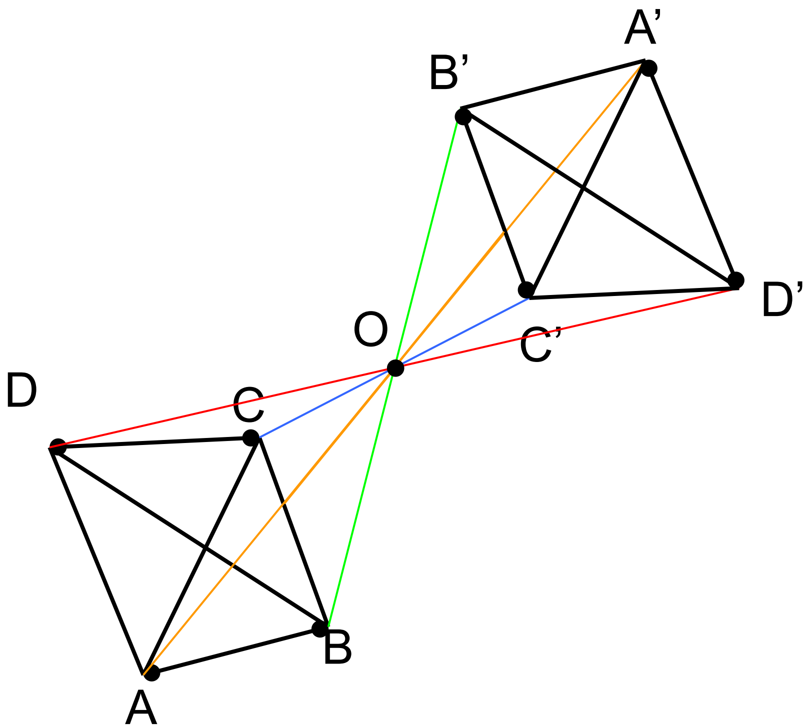
Понятие движения

Движение – это отображение пространства на себя, сохраняющее расстояния между точками

Виды движения

- Центральная симметрия
- Осевая симметрия
- Зеркальная симметрия
- Параллельный перенос

Центральная симметрия



Центральная симметрия — отображение пространства на себя, при котором любая точка *M* переходит в симметричную ей точку M_1 относительно данного центра *O*.

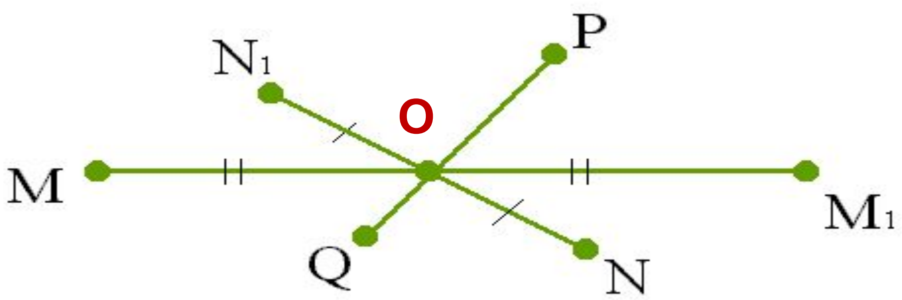
Центральная симметрия является движением.

Обозначим буквой ***O* центр симметрии** и введем прямоугольную систему координат *Oxyz* *с* началом в точке *O*.

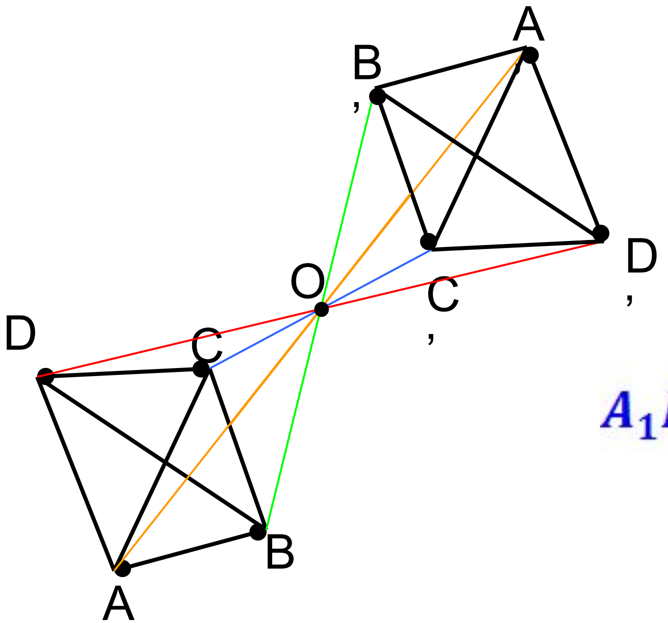
Установим связь между координатами двух точек $M\ (x;\ y;\ z)$ и $M_1\ (x_1,\ y_1;\ z_1)$, симметричных относительно точки *O*.

Если точка ***M* не совпадает с центром *O*, то *O* — середина отрезка $\mathbf{MM_1}$**. По формулам координат середины отрезка получаем $\frac{x+x_1}{2}=0$ $\frac{y+y_1}{2}=0$ $\frac{z+z_1}{2}=0$,

откуда $x_1 = -x,\ \ y_1 = -y,\ \ z_1 = -z.$ Эти формулы верны и в том случае, когда точки M и *O* совпадают.



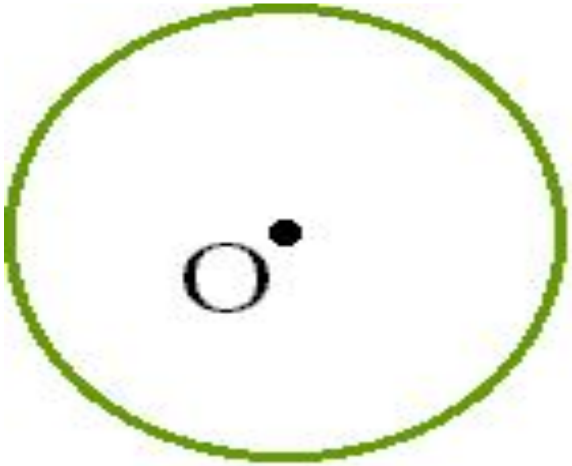
Рассмотрим теперь две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ и докажем, что расстояние между симметричными точками A_1 и B_1 равно AB. Точки A_1 и B_1 имеют координаты $A_1(-x_1; -y_1; -z_1)$ и $B_1(-x_2; -y_2; -z_2)$. По формуле расстояния между двумя точками

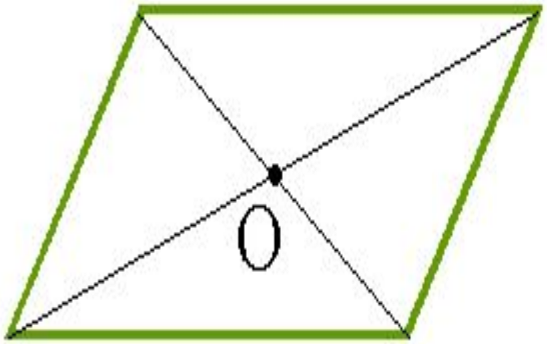


$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}$$

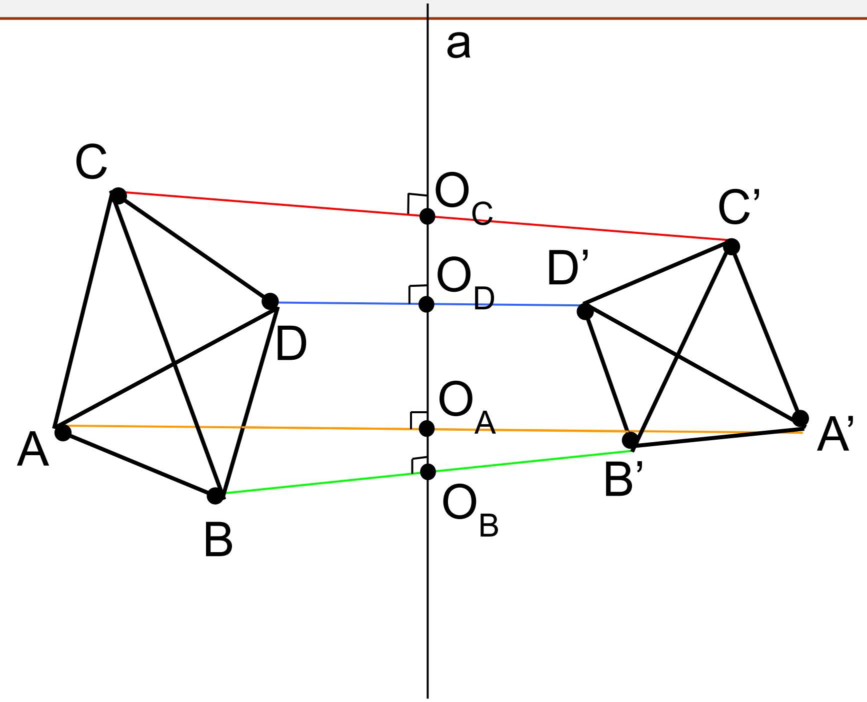
$$\boxed{AB = A_1B_1}$$


O


0

Осевая симметрия

Осевой симметрией с осью *a* называется **такое отображение пространства на себя, при котором любая точка *M* переходит в симметричную ей точку M_1 относительно оси *a*.**



Осевая симметрия является движением.

Для этого введем прямоугольную систему координат *Oxyz* так, чтобы ось *Oz* совпала с осью симметрии, и установим связь между координатами двух точек $M(x; y; z)$ **и** $M_1(x_1, y_1; z_1)$, симметричных относительно оси *Oz*.

Если точка *M* не лежит на оси *Oz* , то ось *Oz:* 1) проходит через середину отрезка MM_1 и 2) перпендикулярна к нему.

Из первого условия по формулам для координат середины отрезка получаем $\frac{x+x_1}{2}=0$ $\frac{y+y_1}{2}=0$,

откуда $x_1 = -x$ и $y_1 = -y$.

Второе условие означает, что **аппликаты точек *M* и M_1** равны: $z_1 = z_2$. Полученные формулы верны и в том случае, когда точка *M* лежит на оси *Oz*.

Рассмотрим теперь любые две точки **A(x_1; y_1; z_1)** и $B(x_2; y_2; z_2)$ и докажем, что **расстояние между симметричными им точками A_1 и B_1 равно AB**.

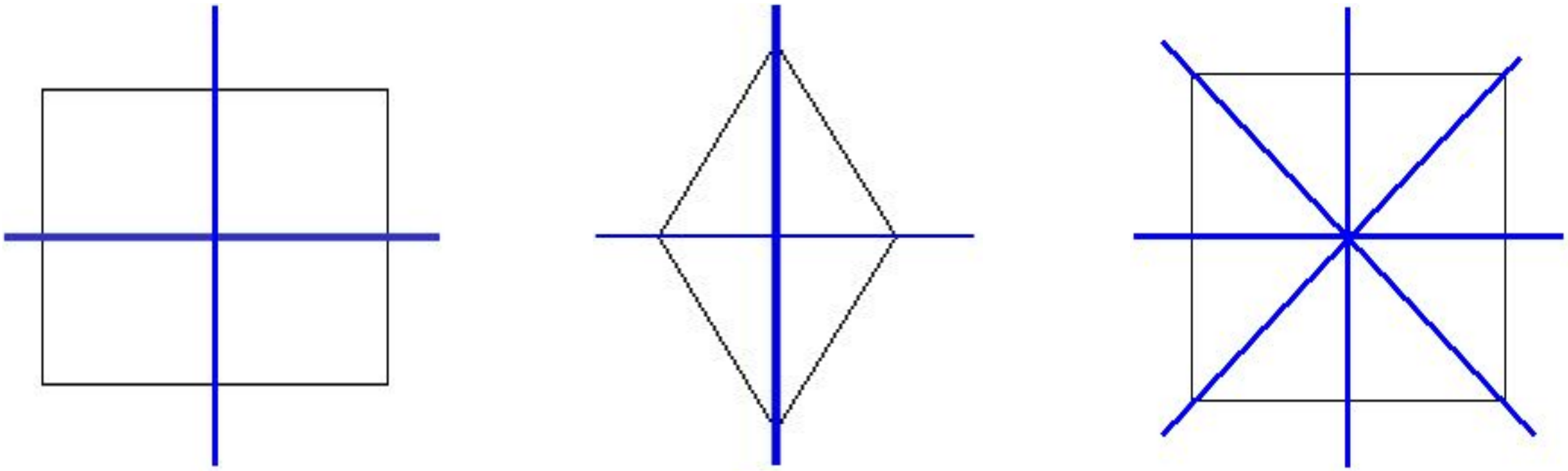
Точки A_1 и B_1 имеют координаты **$A_1(-x_1; -y_1; -z_1)$** и **$B_1(-x_2; -y_2; -z_2)$.**

По формуле расстояния между двумя точками находим:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

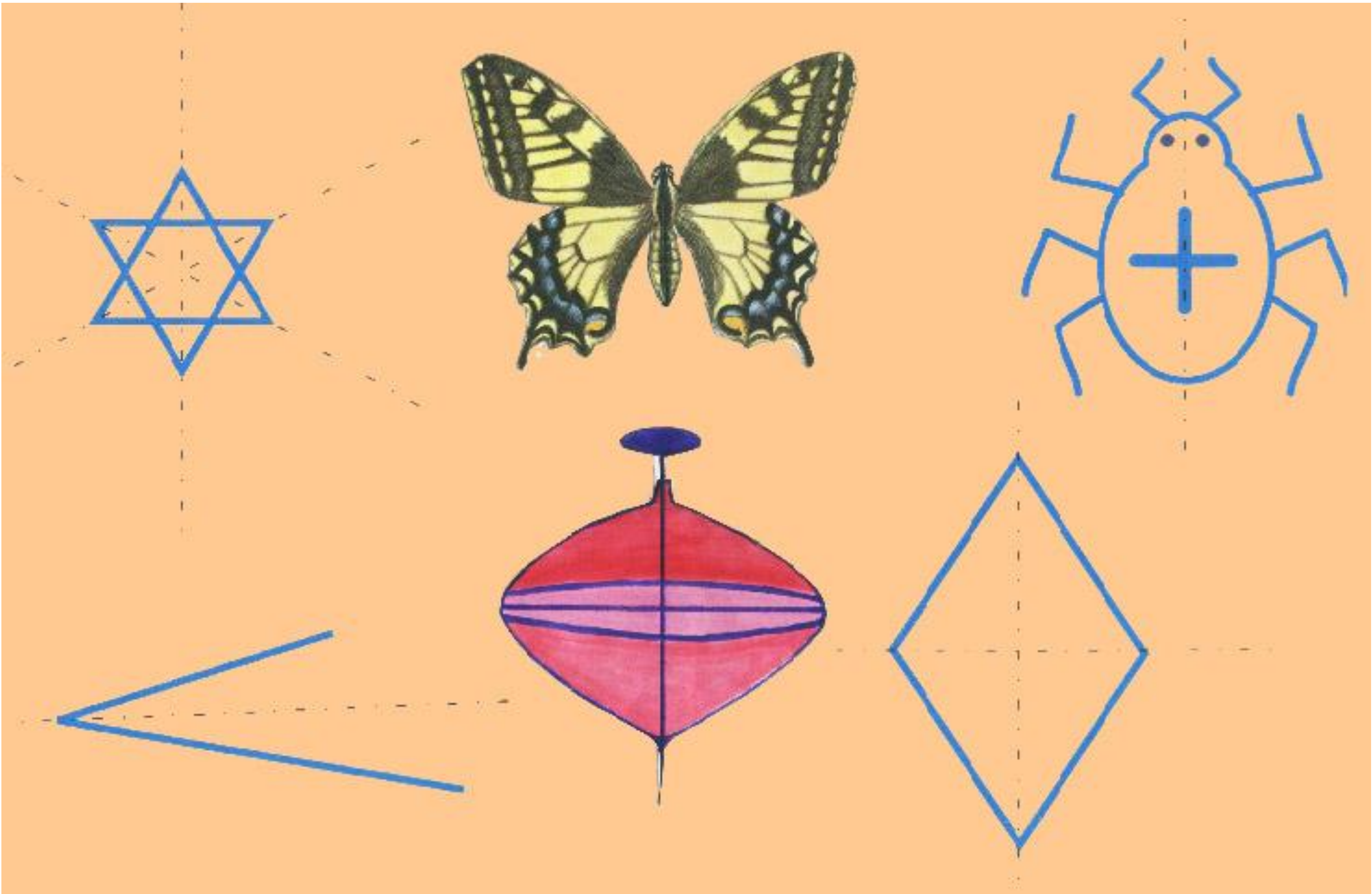
$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}$$

$$AB = A_1B_1$$

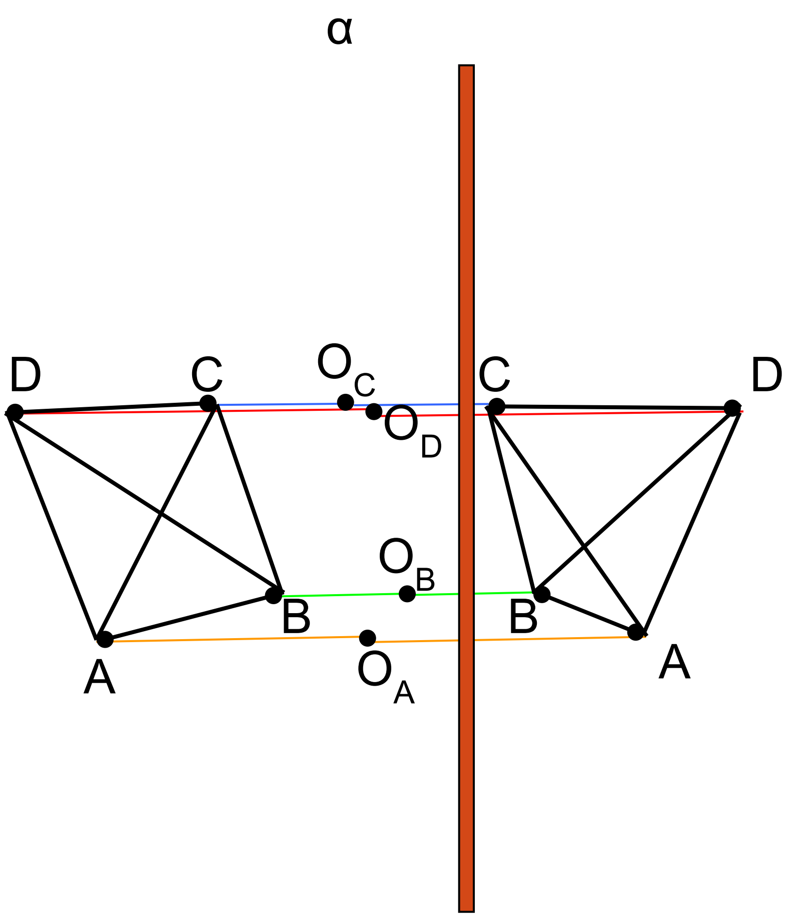


Осевая симметрия

Осевая симметрия вокруг нас



Зеркальная симметрия



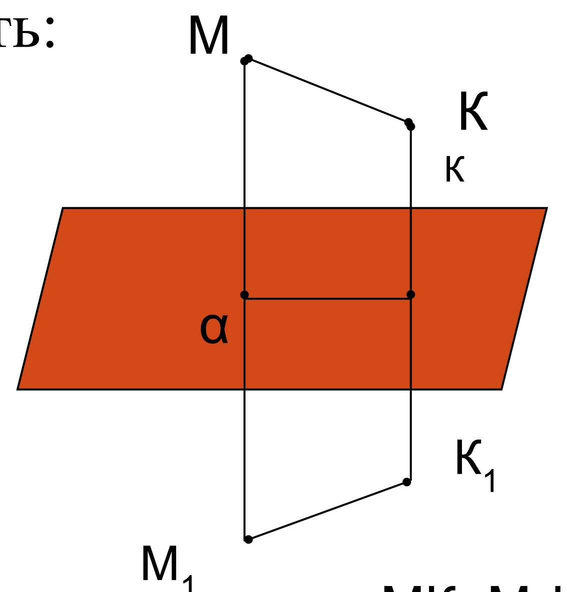
Зеркальной симметрией (относительно плоскости α) называется такое **отображение пространства на себя, при котором любая точка *M* переходит в симметричную ей относительно плоскости α точку *M_1*.**

Зеркальная симметрия является движением.

Для этого введем прямоугольную систему координат *Oxyz* так, чтобы плоскость *Oxy* совпала с плоскостью симметрии, и установим **связь между координатами двух точек М(х; *y;z*) и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, симметричных относительно плоскости *Oxy***.

Если точка *М* не лежит в плоскости *Оху*, то эта плоскость:

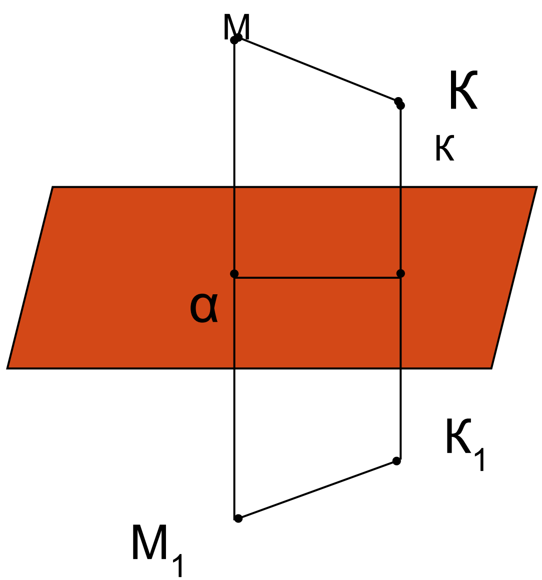
1) **проходит через середину отрезка MM_1 ;**
2) **перпендикулярна к нему**.



$MK=M_1K_1$

Из первого условия по формуле координат середины отрезка получаем : $\frac{z + z_1}{2} = 0$, значит **z = -z**

Второе условие означает, что **отрезок MM_1 параллелен оси *Oz*, и, следовательно, $x_1 = x$, $y_1 = y$**. Полученные формулы верны и в том случае, когда точка *M* лежит в плоскости *Oxy*.



$MK = M_1K_1$

Рассмотрим теперь две точки $A(x_1, y_1; z_1)$ и В $(x_2; y_2; z_2)$ и докажем, что расстояние между симмеричными им точками A_1 и В$_1$ равно AB. Точки A_1 и В$_1$ имеют координаты $A_1(x_1 ; y_1 ; - z_1)$ и $B_1(x_2; y_2; -z_2)$. По формуле расстояния между двумя точками находим:

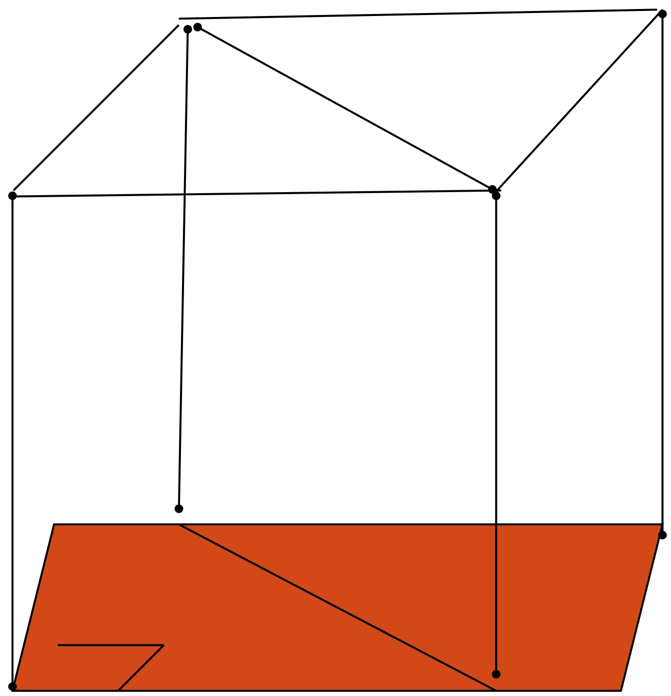
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}$$

$$AB = A_1B_1$$

Фигуры, симметричные относительно плоскости

Фигура (тело) называется симметричной относительно некоторой плоскости, если эта плоскость разбивает фигуру на две равные симметричные части.

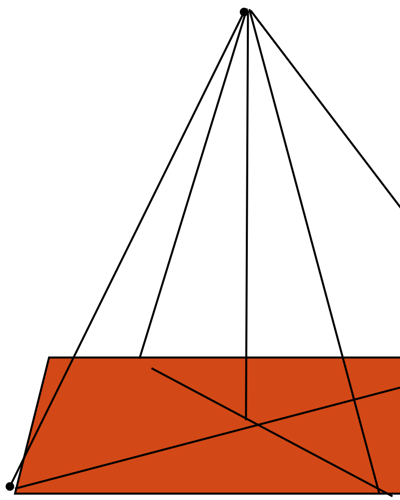


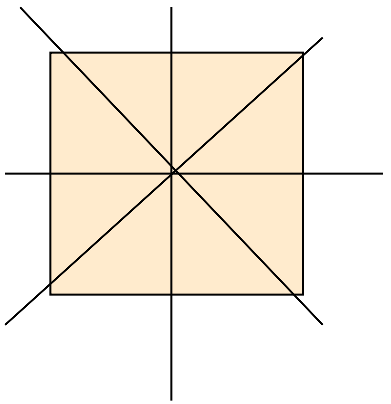
Сколько плоскостей симметрии имеет куб?

Ответы : 2; 4; 5; 6;   9

Симметрия в пирамиде

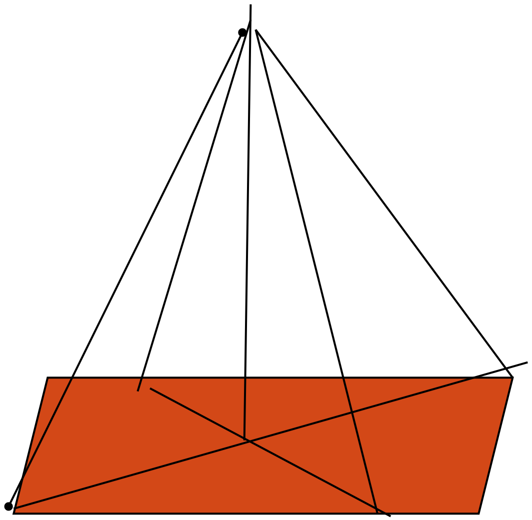
Верно ли высказывание: **правильная четырехугольная пирамида имеет четыре плоскости симметрии**

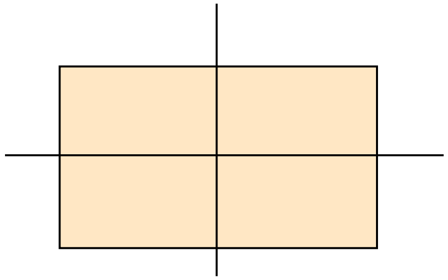


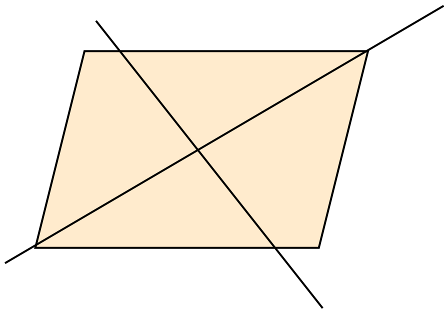


Задачи

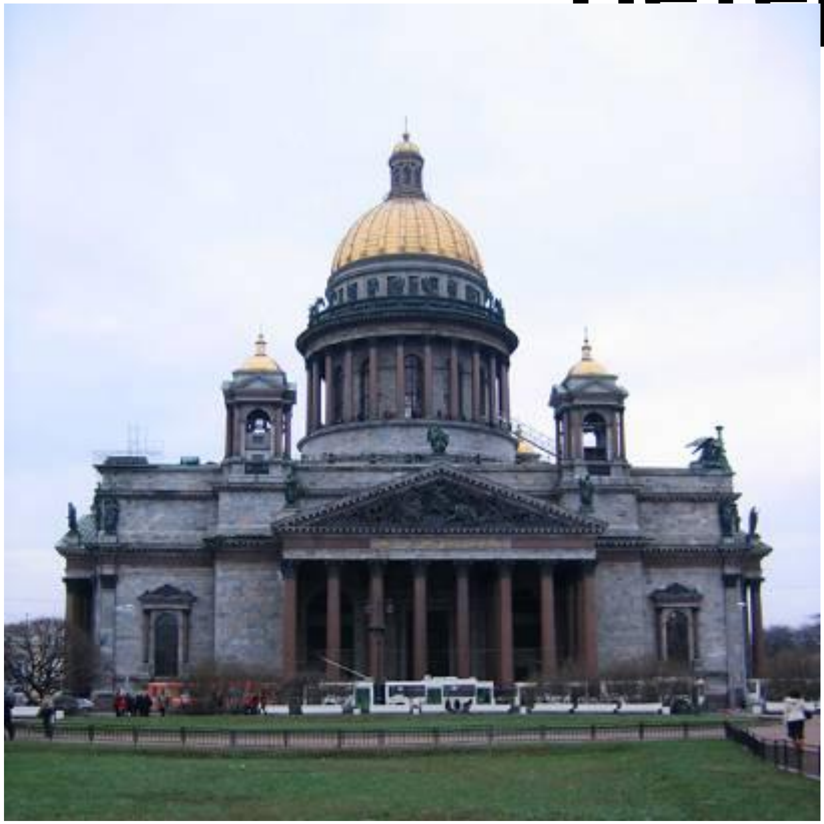
1. **Сколько плоскостей симметрии имеет пирамида, в основании которой лежит прямоугольник, ромб**?







Зеркальная симметрия в архитектуре г. Санкт-Петербурга



Исаакиевский собор

Александринский театр

Улица России

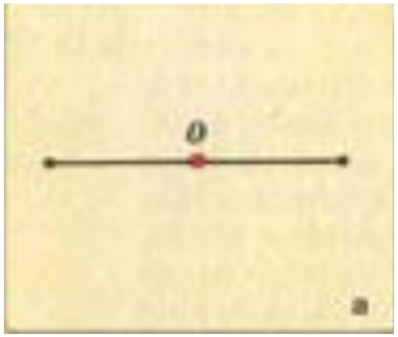
имеет плоскость симметрии в общем обзоре, но не все детали в архитектуре зданий симметричны.

Зеркальная симметрия

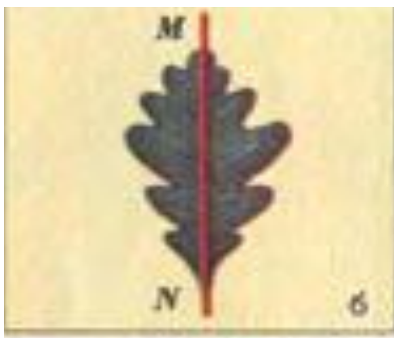
Пример зеркальной симметрии

Центральный зал станции

объекты



Центральная симметрия

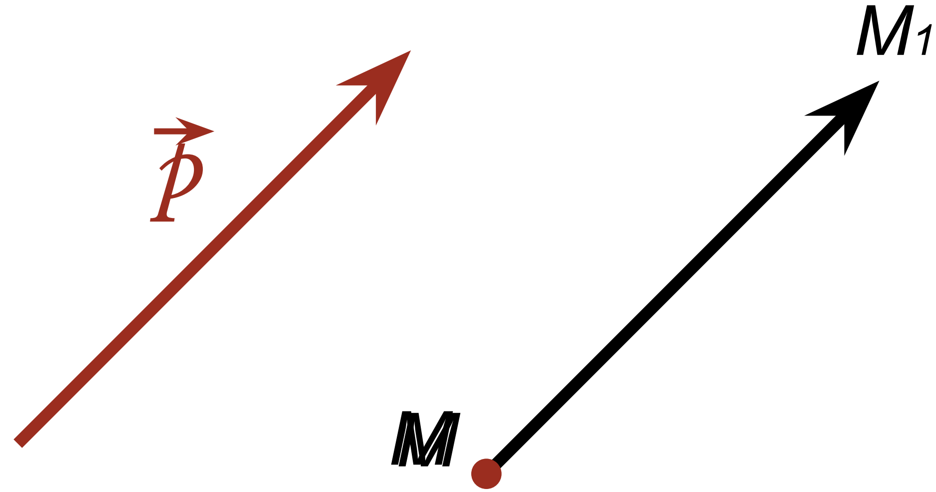


Осевая симметрия

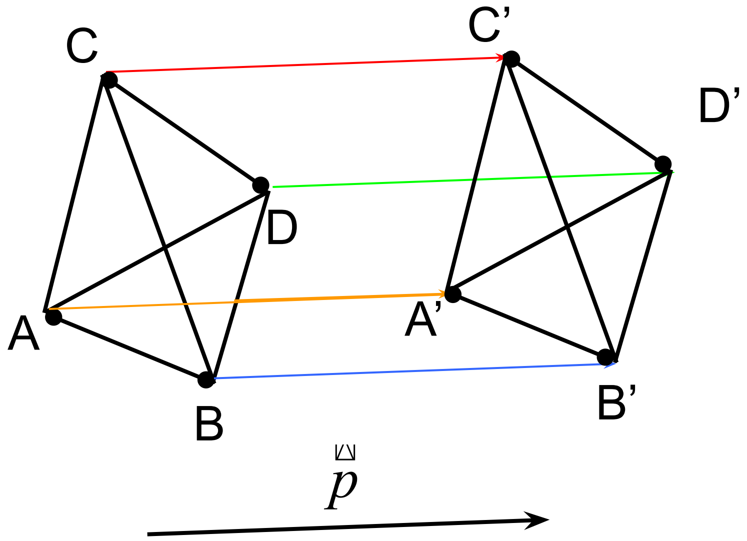
Зеркальная симметрия

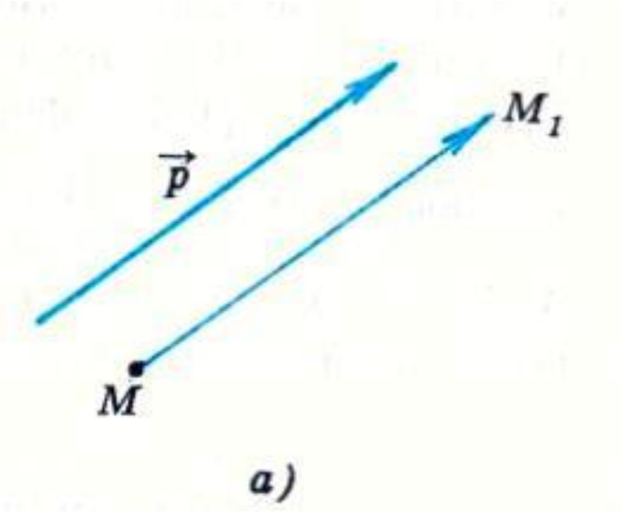
Параллельный перенос

Параллельным переносом на вектор *p* называется отображение пространства на себя, при котором любая точка *M* переходит в такую точку M_1, *что* $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{p}$

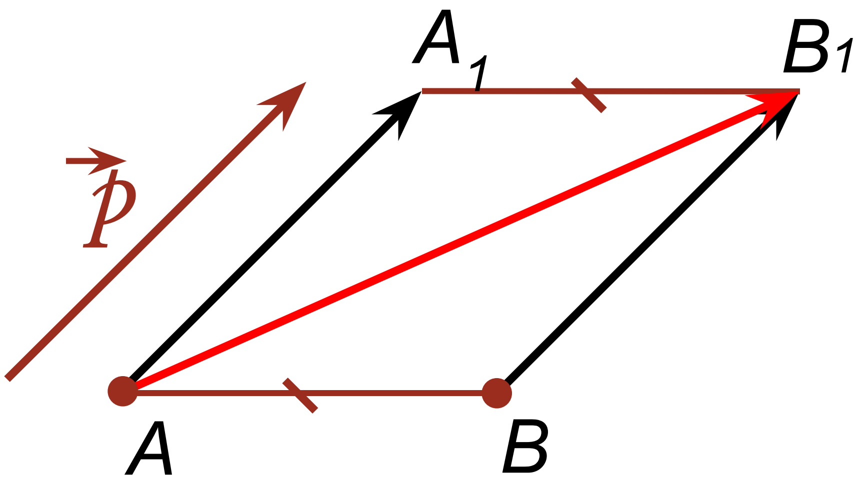


Параллельный перенос





Параллельный перенос является движением.



При параллельном переносе на вектор *p* любые две точки А и В переходят в точки A_1 и B_1 такие, что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{p}$ и $\overrightarrow{BB_1} = \vec{p}$. Требуется доказать, что

$A_1B_1 = AB.$

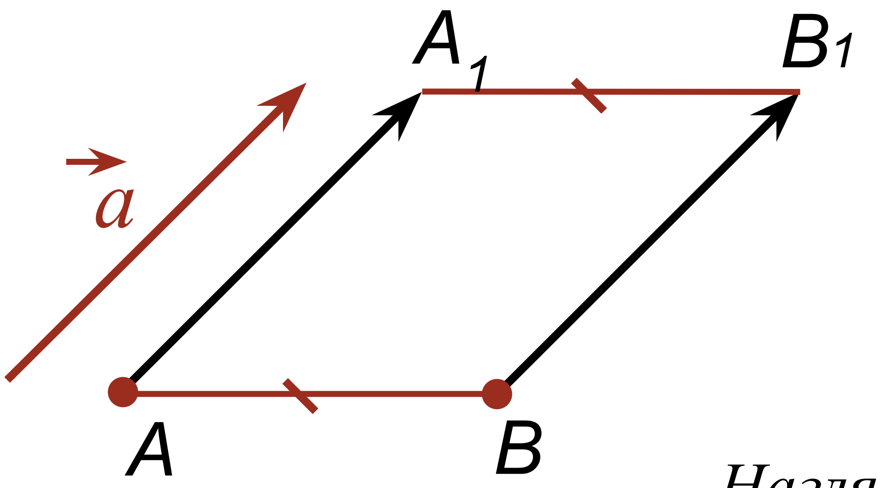
По правилу треугольника

$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}$

С другой стороны, $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$

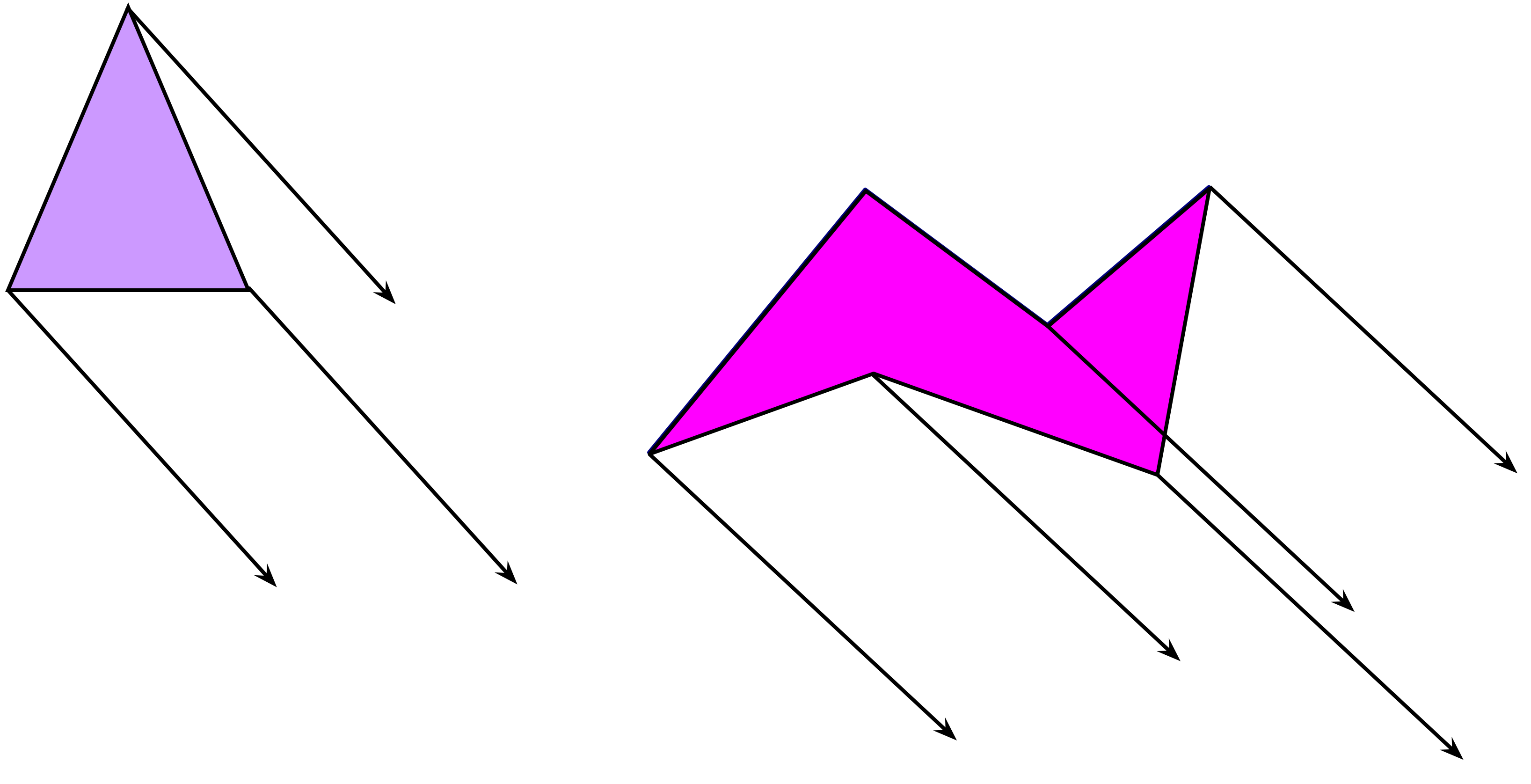
Из этих двух равенств получаем $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} + \vec{p}$, или $\vec{p} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} + \vec{p}$, откуда $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$. Следовательно, $A_1B_1 = AB$, что и требовалось доказать.

Параллельный перенос

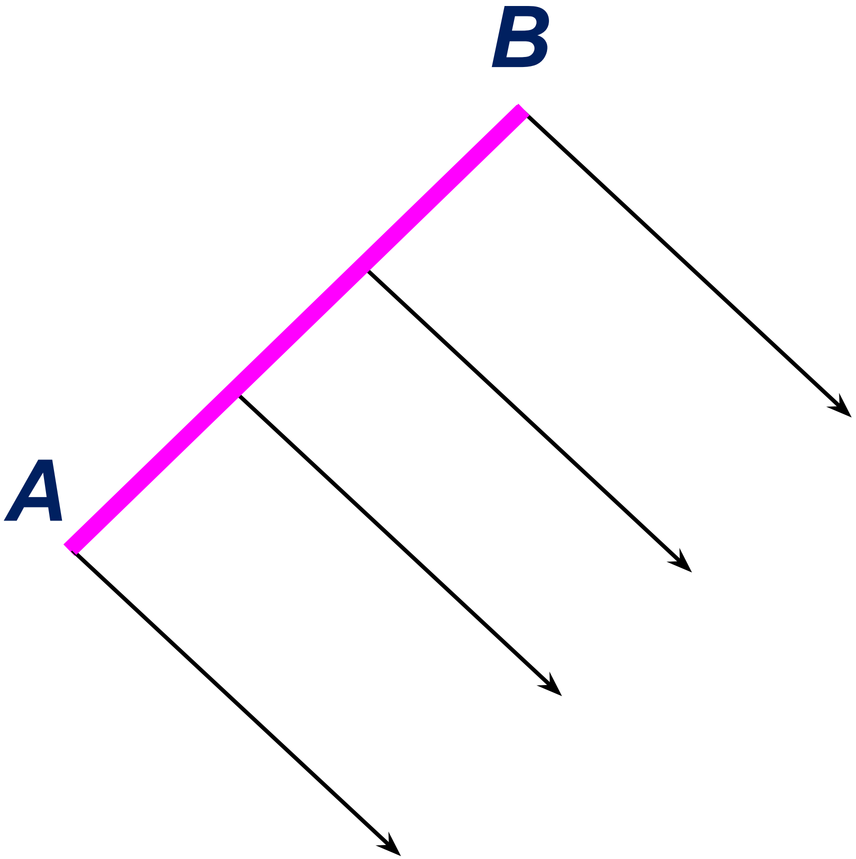


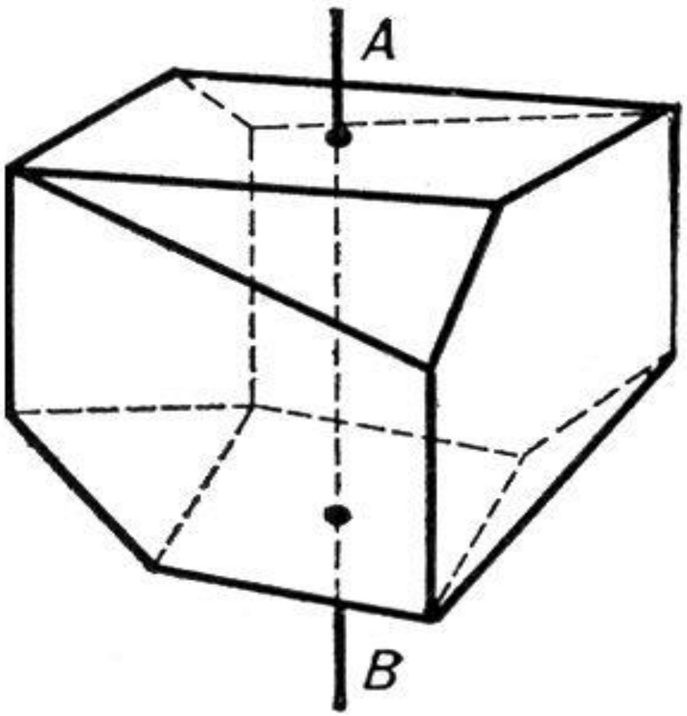
Наглядно это движение можно представить себе как сдвиг всей плоскости в направлении данного вектора на его длину.

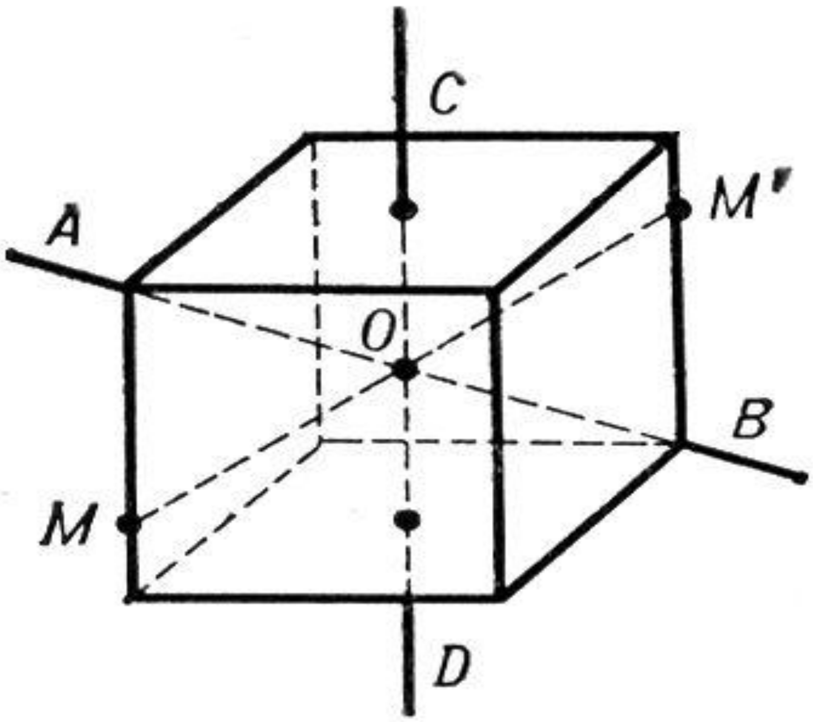
Параллельный перенос различных фигур



Параллельный перенос

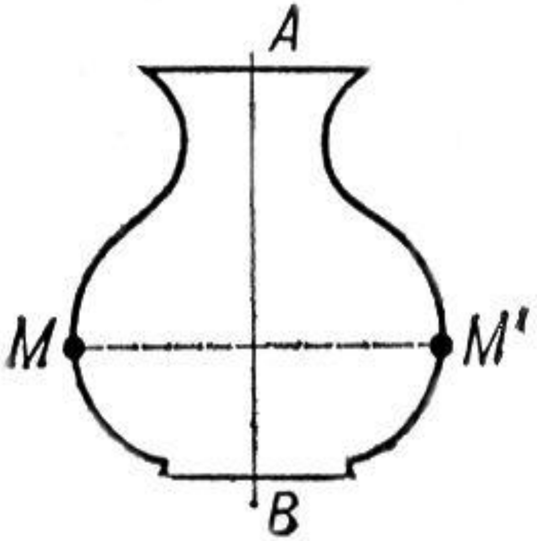




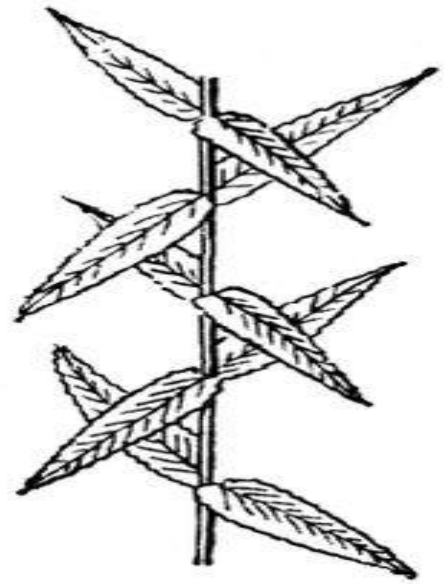


Многогранник. Зеркально-осевая симметрия.

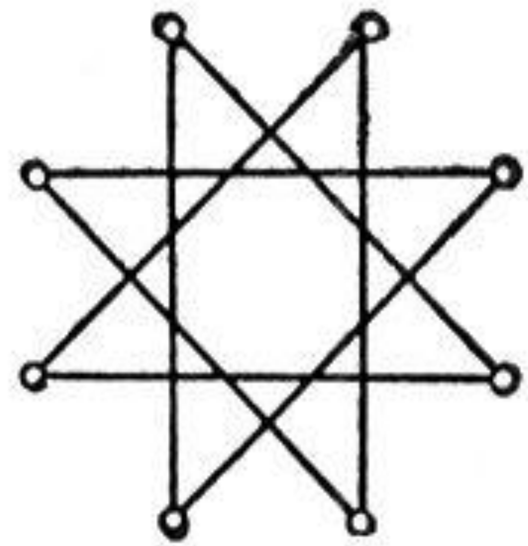
Куб. Симметрия третьего поря



Кувшин. Плоская симметричная фигура.



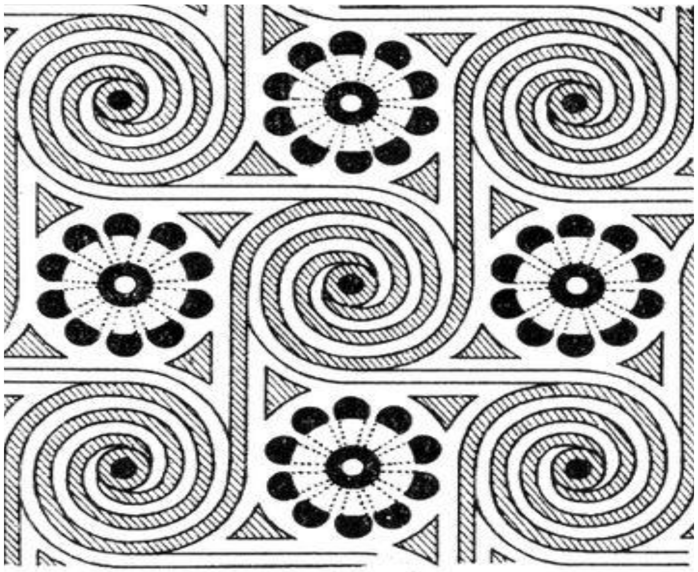
Крапива. Винтовая симметрия.



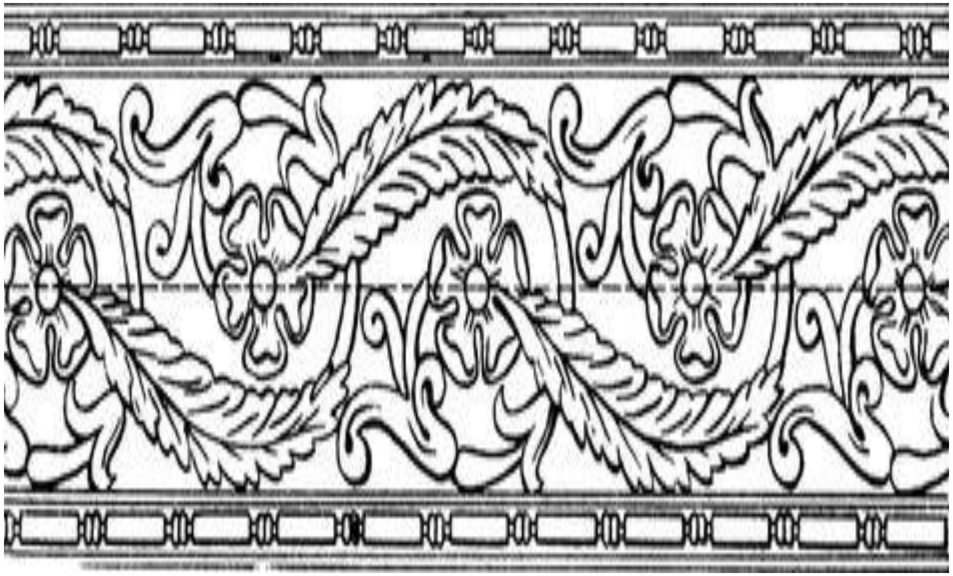
Звезда. Симметрия восьмого порядка.

Зеркальная симметрия в природе

Зеркальная симметрия в природе



Симметрия переноса.



Симметрия. Орнамент.