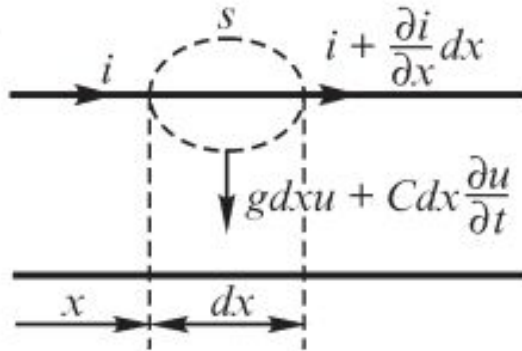


Электрические цепи с распределенными параметрами

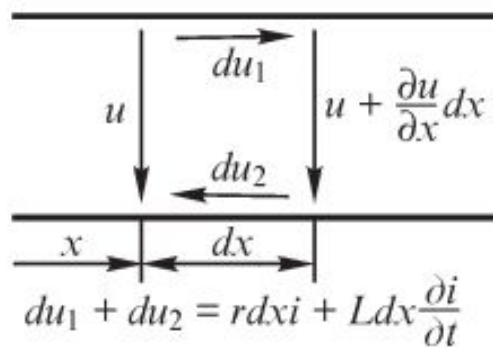
Электрические цепи с распределенными параметрами

Телеграфные уравнения



$$(-u) + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) + \left(r dx i + L dx \frac{\partial i}{\partial t} \right) = 0$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g u + C \frac{\partial u}{\partial t}$$



$$(-i) + \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) + \left(g dx u + C dx \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = r i + L \frac{\partial i}{\partial t}$$

Электрические цепи с распределенными параметрами

Телеграфные уравнения

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C \frac{\partial u}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \dots \\ -\frac{\partial u_k}{\partial x} = r_k i_k + L_k \frac{\partial i_k}{\partial t} + \sum_{m=1}^{m=n} M_{km} \frac{\partial i_m}{\partial t} \\ -\frac{\partial i_k}{\partial x} = g_k u_k + \sum_{m=1}^{m=n} g_{km} (u_k - u_m) + C_k \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{m=1}^{m=n} C_{km} \frac{\partial (u_k - u_m)}{\partial t} \\ \dots \end{array} \right.$$

Электрические цепи с распределенными параметрами

Решение уравнений однородной линии при установившемся синусоидальном режиме

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C \frac{\partial u}{\partial t} \end{array} \right. \xrightarrow{\begin{array}{l} u(t, x) \doteq \dot{U}(x) \\ i(t, x) \doteq \dot{I}(x) \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{d\dot{U}}{dx} = r\dot{I} + j\omega L\dot{I} \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} = g\dot{U} + j\omega C\dot{U} \end{array} \right.$$

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (r + j\omega L)(g + j\omega C)\dot{U} = \gamma^2\dot{U} \quad \dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}$$

$$\dot{I} = -\frac{1}{r + j\omega L} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{r + j\omega L} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{Z} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x})$$

$$\gamma = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \alpha + j\beta$$

$$Z = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}} = z e^{j\varphi_z}$$

Электрические цепи с распределенными параметрами

Решение уравнений однородной линии при установившемся синусоидальном режиме

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} \\ \dot{i} = \frac{1}{Z} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) \end{array} \right. \xrightarrow{\begin{array}{l} \dot{U}_1 = \dot{U} \text{ при } x = 0 \\ \dot{i}_1 = \dot{i} \text{ при } x = 0 \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1 = A_1 + A_2 \\ \dot{i}_1 = \frac{1}{Z} (A_1 - A_2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 + \dot{i}_1 Z) \\ A_2 = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - \dot{i}_1 Z) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \dot{U} = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 + \dot{i}_1 Z) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - \dot{i}_1 Z) e^{\gamma x} \\ \dot{i} = \frac{1}{Z} \left[\frac{1}{2} (\dot{U}_1 + \dot{i}_1 Z) e^{-\gamma x} - \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - \dot{i}_1 Z) e^{\gamma x} \right] \end{array} \right.$$

Электрические цепи с распределенными параметрами

Уравнения однородной линии, записанные через гиперболические функции

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{U} &= \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x} = \frac{1}{2} \dot{U}_1 (e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) - \frac{1}{2} \dot{I}_1 Z (e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) \\ \dot{I} &= \frac{1}{Z} \left[\frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} - \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\dot{U}_1}{Z} (e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) + \frac{1}{2} \dot{I}_1 (e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) \end{aligned} \right.$$

$$\frac{1}{2}(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) = \operatorname{ch} \gamma x \quad \frac{1}{2}(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) = \operatorname{sh} \gamma x \quad \operatorname{ch}^2 \gamma l - \operatorname{sh}^2 \gamma l = 1$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \dot{I}_1 Z \operatorname{sh} \gamma x \\ \dot{I} &= \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z} \operatorname{sh} \gamma x \end{aligned} \right.$$

Электрические цепи с распределенными параметрами

Уравнения однородной линии в А-параметрах

$$\left[\begin{array}{l} \dot{U}_2 = \dot{U} \text{ при } x = l \\ \dot{I}_2 = \dot{I} \text{ при } x = l \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_2 = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma l - \dot{I}_1 Z \operatorname{sh} \gamma l \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma l - \frac{\dot{U}_1}{Z} \operatorname{sh} \gamma l \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \operatorname{ch} \gamma l \\ + \\ \operatorname{sh} \gamma l \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \operatorname{sh} \gamma l \\ + \\ \operatorname{ch} \gamma l \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh} \gamma l \\ \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z} + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l \end{array} \right. \mathbf{A} = \left. \begin{array}{c|c} \operatorname{ch} \gamma l & Z \operatorname{sh} \gamma l \\ \hline \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z} & \operatorname{ch} \gamma l \end{array} \right.$$

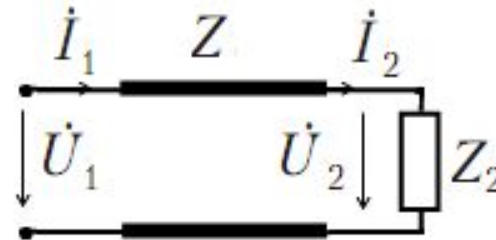
$$A = D$$

$$AD - BC = \operatorname{ch}^2 \gamma l - \operatorname{sh}^2 \gamma l = 1$$

Электрические цепи с распределенными параметрами

Основные характеристики линии (вторичные параметры)

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh} \gamma l \\ \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z} + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l \end{cases}$$



$$Z_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh} \gamma l}{\dot{U}_2 \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z} + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l} = \frac{\dot{I}_2 Z_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh} \gamma l}{\dot{I}_2 Z_2 \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z} + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l} = \frac{Z_2 \operatorname{ch} \gamma l + Z \operatorname{sh} \gamma l}{Z_2 \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z} + \operatorname{ch} \gamma l}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Режим ХХ } Z_2 \rightarrow \infty \implies \dot{I}_2 = 0 \implies Z_{1\text{ХХ}} = \frac{Z}{\operatorname{th} \gamma l} \\ \text{Режим КЗ } Z_2 = 0 \implies \dot{U}_2 = 0 \implies Z_{1\text{КЗ}} = Z \operatorname{th} \gamma l \end{array} \right\} \begin{array}{l} Z_{1\text{ХХ}} Z_{1\text{КЗ}} = Z^2 \\ \frac{Z_{1\text{КЗ}}}{Z_{1\text{ХХ}}} = \operatorname{th}^2 \gamma l \end{array}$$

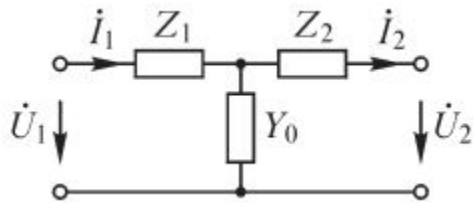
$$Z = \sqrt{Z_{1\text{ХХ}} Z_{1\text{КЗ}}}$$

$$\operatorname{th} \gamma l = \sqrt{Z_{1\text{КЗ}} / Z_{1\text{ХХ}}}$$

Электрические цепи с распределенными параметрами

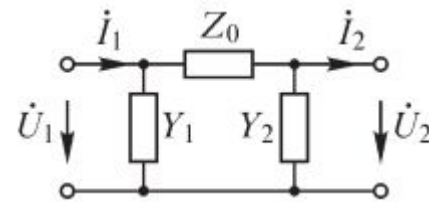
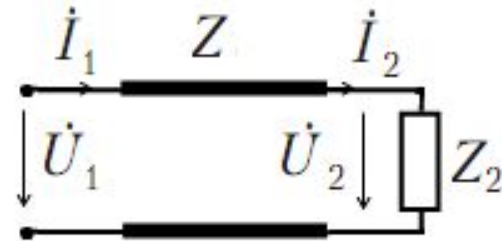
Моделирование линии

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh} \gamma l \\ \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z} + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l \end{cases}$$



$$Y_0 = \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z}$$

$$Z_1 = Z_2 = \frac{A - 1}{C} = \frac{\operatorname{ch} \gamma l - 1}{\frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z}}$$



$$Z_0 = B = Z \operatorname{sh} \gamma l$$

$$Y_1 = Y_2 = \frac{A - 1}{B} = \frac{\operatorname{ch} \gamma l - 1}{Z \operatorname{sh} \gamma l}$$

Электрические цепи с распределенными параметрами

Бегущие волны

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{U} &= A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z) e^{\gamma x} = \dot{U}_\varphi + \dot{U}_\psi \\ \dot{I} &= \frac{1}{Z}(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{Z} \left[\frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z) e^{-\gamma x} - \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z) e^{\gamma x} \right] = \dot{I}_\varphi + \dot{I}_\psi \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_\varphi &= \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z) e^{-\gamma x} = \dot{U}_{\varphi 1} e^{-\gamma x} = U_{\varphi 1} e^{j\xi} e^{-\alpha x} & \dot{I}_\varphi &= \frac{1}{2Z}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z) e^{-\gamma x} \\ \dot{U}_\psi &= \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z) e^{\gamma x} = \dot{U}_{\psi 1} e^{\gamma x} = U_{\psi 1} e^{j\eta} e^{\alpha x} & \dot{I}_\psi &= -\frac{1}{2Z}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z) e^{\gamma x} \end{aligned}$$

$$\dot{U} = \dot{U}_\varphi + \dot{U}_\psi = \dot{U}_{\varphi 1} e^{-\gamma x} + \dot{U}_{\psi 1} e^{\gamma x} = U_{\varphi 1} e^{-\alpha x} e^{j(\xi - \beta x)} + U_{\psi 1} e^{\alpha x} e^{j(\eta + \beta x)}$$

$$u = u_\varphi + u_\psi = \sqrt{2} U_{\varphi 1} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \xi - \beta x) + \sqrt{2} U_{\psi 1} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \eta + \beta x)$$

$$i = i_\varphi + i_\psi = \sqrt{2} \frac{U_{\varphi 1}}{Z} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \xi - \beta x - \varphi_z) - \sqrt{2} \frac{U_{\psi 1}}{Z} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \eta + \beta x - \varphi_z)$$

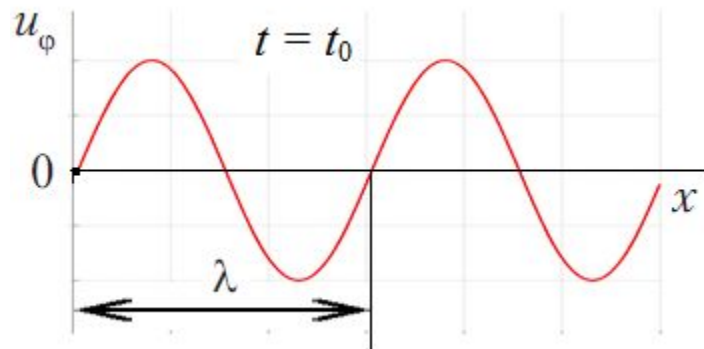
Электрические цепи с распределенными параметрами

Бегущие волны

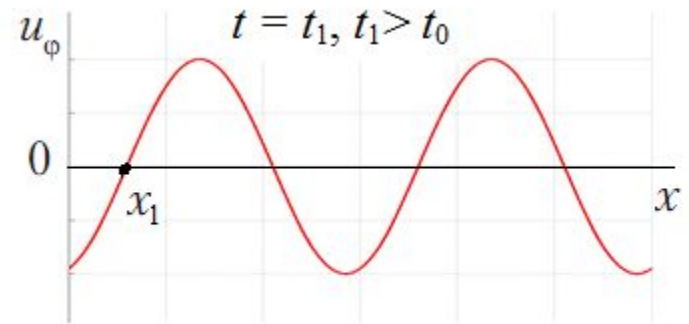
$$u_{\varphi} = \sqrt{2}U_{\varphi 1}e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \xi - \beta x)$$

при $x = \text{const}$ $u_{\varphi} \sim \sin(t)$

при $t = \text{const}$, $\alpha = 0$ и $e^{-\alpha x} = 1$ $u_{\varphi} \sim \sin(x)$

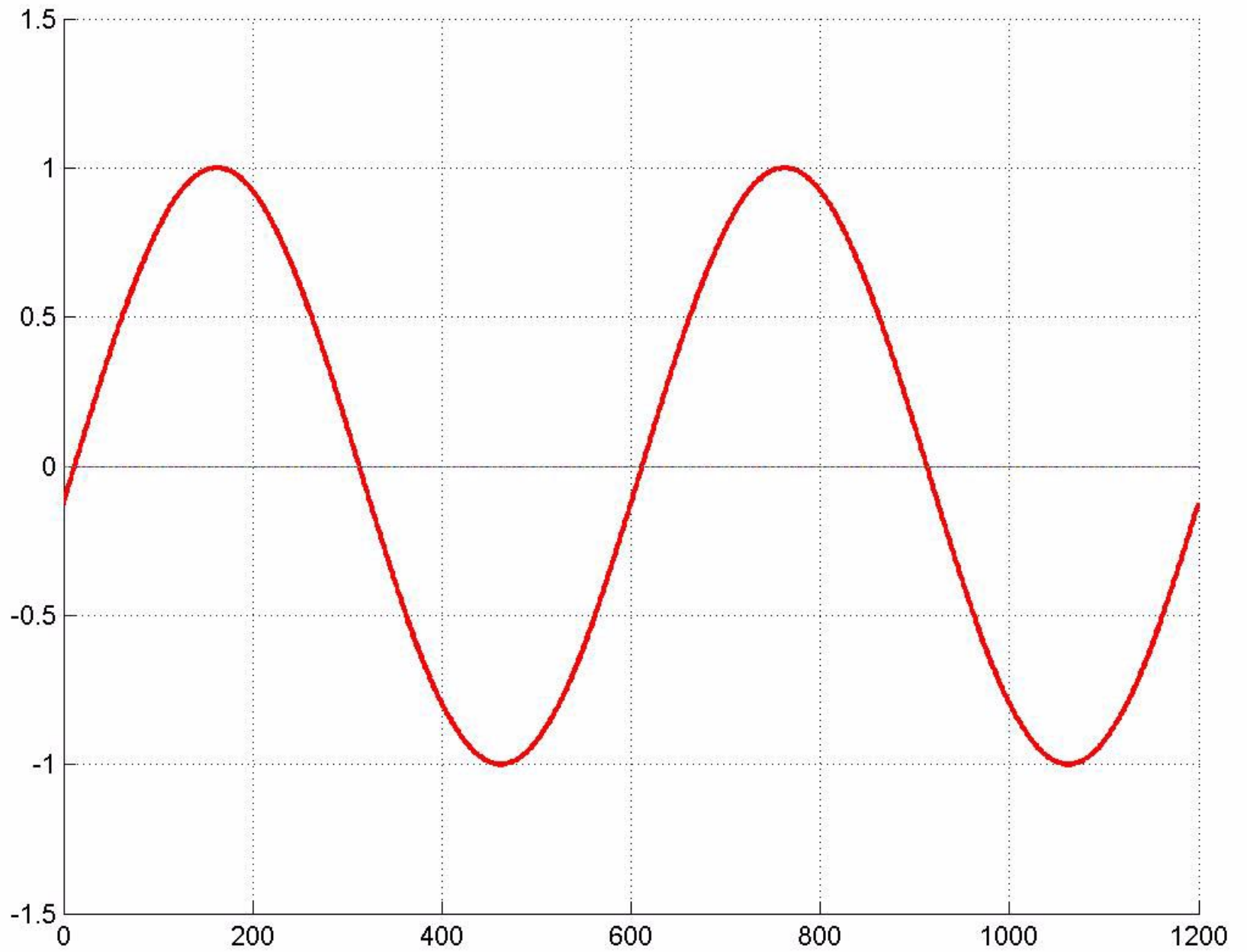


$$\frac{\omega t + \xi - \beta x}{\omega t + \xi - \beta(x + \lambda)} \quad \lambda = 2\pi/\beta$$
$$\beta \lambda = 2\pi$$



$$\omega t_1 + \xi - \beta x_1 = \text{const.}$$

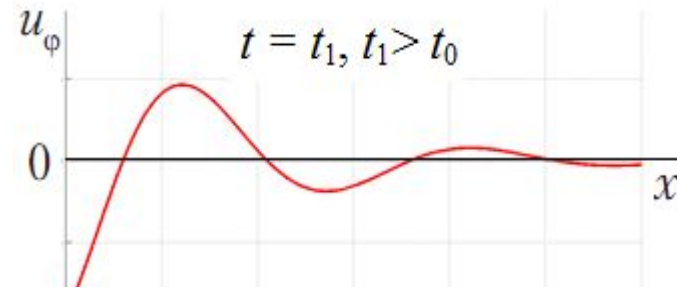
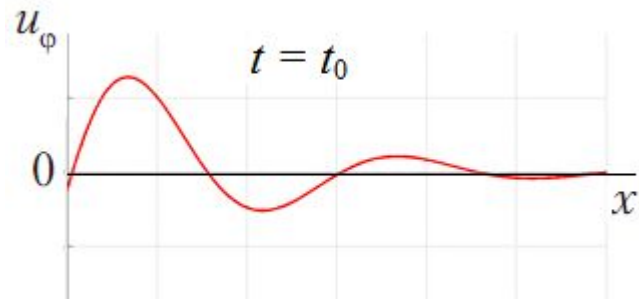
$$v_{\Phi} = x_1/t_1 = \omega/\beta$$



Электрические цепи с распределенными параметрами

Бегущие волны

$$u_{\varphi} = \sqrt{2}U_{\varphi 1}e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \xi - \beta x) \quad \text{при } t = \text{const} \text{ и } \alpha > 0$$



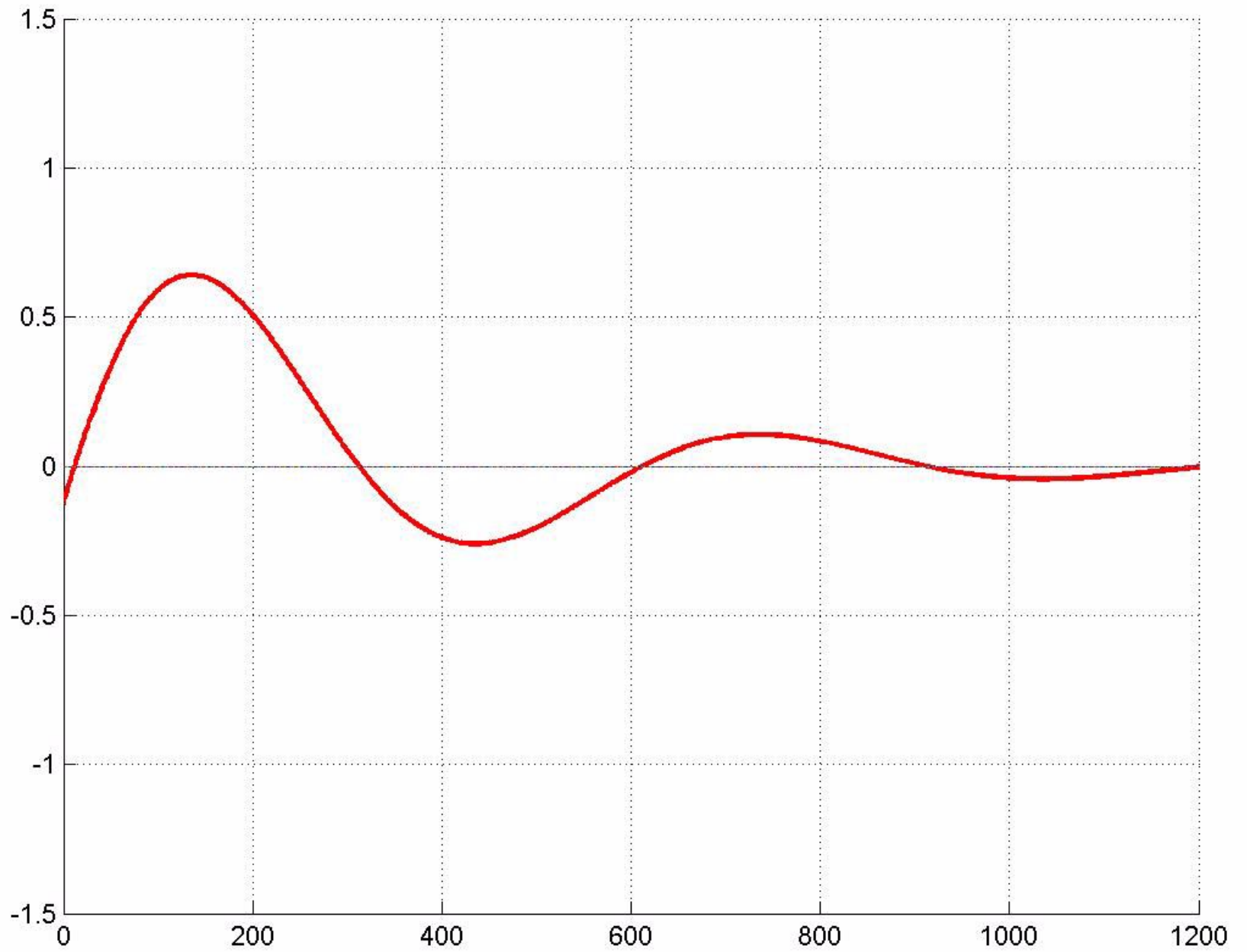
u_{φ} перемещается вдоль линии от начала к ее концу с постоянной скоростью $v = \omega/\beta$

$$u_{\psi} = \sqrt{2} U_{\psi 1}e^{\alpha x} \sin (\omega t + \eta + \beta x)$$

u_{ψ} перемещается вдоль линии от начала к ее концу с постоянной скоростью $v = -\omega/\beta$

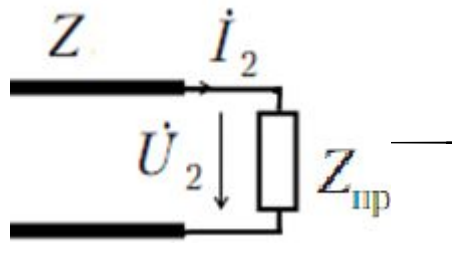
u_{ψ} перемещается вдоль линии от конца линии к ее началу со скоростью $v = \omega/\beta$

$$\frac{\dot{U}_{\varphi}}{\dot{I}_{\varphi}} = Z; \quad \frac{\dot{U}_{\psi}}{\dot{I}_{\psi}} = -Z$$



Электрические цепи с распределенными параметрами

Коэффициенты отражения


$$\left[\begin{array}{l} \dot{U}_2 = \dot{U}_{\varphi_2} + \dot{U}_{\psi_2} \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_{\varphi_2} + \dot{I}_{\psi_2} = \frac{\dot{U}_{\varphi_2}}{Z} - \frac{\dot{U}_{\psi_2}}{Z} \end{array} \right. \quad \dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_{\text{нр}}$$

$$2\dot{U}_{\psi_2} = \dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z = \dot{I}_2 (Z_{\text{нр}} - Z); \quad 2\dot{U}_{\varphi_2} = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z = \dot{I}_2 (Z_{\text{нр}} + Z)$$

$$q_u = \frac{\dot{U}_{\psi_2}}{\dot{U}_{\varphi_2}} = \frac{Z_{\text{нр}} - Z}{Z_{\text{нр}} + Z} \quad q_i = -q_u = \frac{Z - Z_{\text{нр}}}{Z + Z_{\text{нр}}}$$

$$\text{При } Z_{\text{нр}} = Z \Rightarrow q_u = 0 \text{ и } q_i = 0 \Rightarrow \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_{\varphi}}{\dot{I}_{\varphi}} = Z$$

$$\text{При } Z_{\text{нр}} = \infty \Rightarrow q_u = 1 \text{ и } q_i = -1 \Rightarrow \dot{U}_{\psi_2} = \dot{U}_{\varphi_2} \text{ и } \dot{U}_2 = 2\dot{U}_{\varphi_2}, \text{ а } \dot{I}_{\psi_2} = -\dot{I}_{\varphi_2} \text{ и } \dot{I}_2 = 0$$

$$\text{При } Z_{\text{нр}} = 0 \Rightarrow q_u = -1 \text{ и } q_i = 1 \Rightarrow \dot{U}_{\psi_2} = -\dot{U}_{\varphi_2} \text{ и } \dot{U}_2 = 0, \text{ а } \dot{I}_{\psi_2} = \dot{I}_{\varphi_2} \text{ и } \dot{I}_2 = 2\dot{I}_{\varphi_2}$$

Электрические цепи с распределенными параметрами

Неискажающая линия

$$Z = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}} \quad \gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)}$$

$$\boxed{\frac{r}{L} = \frac{g}{C}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{r/L + j\omega}{g/C + j\omega}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \sqrt{LC} \sqrt{(r/L + j\omega)(g/C + j\omega)} = \\ &= \sqrt{LC}(r/L + j\omega) = \sqrt{rg} + j\omega\sqrt{LC} \end{aligned}$$

$$\alpha_{\min} = \sqrt{rg} \quad \text{и} \quad \beta_{\min} = \omega\sqrt{LC} \quad v_{\max} = \omega/\beta = 1/\sqrt{LC}$$

Для воздушных линий $z \approx 300\text{--}400$ Ом и $v \approx 3 \cdot 10^8$ м/с

Для кабельных линий $z \approx 50$ Ом и $v < 3 \cdot 10^8$ м/с

Электрические цепи с распределенными параметрами

Зависимость тока и напряжения в линии от нагрузки

при счете расстояний от начала линий

$$\left[\begin{array}{l} \dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} \\ \dot{I} = \frac{1}{Z} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \text{ на } l - x \\ \text{при } x = 0 \quad \dot{U} = \dot{U}_2 \text{ и } \dot{I} = \dot{I}_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} \dot{U} = A_1 e^{-\gamma l} e^{\gamma x} + A_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma x} = A_3 e^{\gamma x} + A_4 e^{-\gamma x} \\ \dot{I} Z = A_1 e^{-\gamma l} e^{\gamma x} - A_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma x} = A_3 e^{\gamma x} - A_4 e^{-\gamma x} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \dot{U}_2 = A_3 + A_4 \\ \dot{I}_2 Z = A_3 - A_4 \end{array} \right.$$

$$A_3 = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z) \quad A_4 = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z)$$

$$\left[\begin{array}{l} \dot{U} = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z) e^{\gamma x} + \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z) e^{-\gamma x} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh} \gamma x \\ \dot{I} = \frac{1}{Z} \left[\frac{1}{2} (\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z) e^{\gamma x} - \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z) e^{-\gamma x} \right] = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \frac{\dot{U}_2}{Z} \operatorname{sh} \gamma x \end{array} \right.$$

Электрические цепи с распределенными параметрами

Линия без потерь. Стоячие волны

$$r = 0 \text{ и } g = 0. \quad \omega L \gg r \text{ и } \omega C \gg g \quad \alpha = 0, \gamma = j\beta, \beta = \omega\sqrt{LC}, Z = z = \sqrt{L/C}$$

$$\left[\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh} \gamma x = \dot{U}_2 \cos \beta x + j \dot{I}_2 z \sin \beta x \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \frac{\dot{U}_2}{Z} \operatorname{sh} \gamma x = \dot{I}_2 \cos \beta x + j \frac{\dot{U}_2}{z} \sin \beta x \end{aligned} \right.$$

$$Z_{\text{нр}} = \infty \text{ и } I_2 = 0$$

$$Z_{\text{нр}} = 0 \text{ и } U_2 = 0$$

$$\left[\begin{aligned} \dot{U}_0 &= \dot{U}_{20} \operatorname{ch} \gamma x = \dot{U}_{20} \cos \beta x \\ \dot{I}_0 &= \frac{\dot{U}_{20}}{z} \operatorname{sh} \gamma x = j \frac{\dot{U}_{20}}{z} \sin \beta x \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} \dot{U}_\kappa &= \dot{I}_{2\kappa} Z \operatorname{sh} \gamma x = j \dot{I}_{2\kappa} z \sin \beta x \\ \dot{I}_\kappa &= \dot{I}_{2\kappa} \operatorname{ch} \gamma x = \dot{I}_{2\kappa} \cos \beta x \end{aligned} \right.$$

