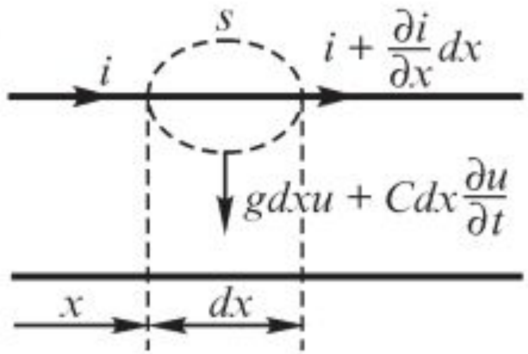
Электрические цепи с распределенными параметрами

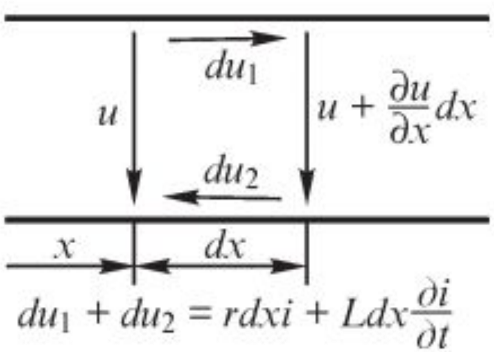
Электрические цепи с распределенными параметрами

Телеграфные уравнения



$$(-u) + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) + \left(rdxi + Ldx\frac{\partial i}{\partial t}\right) = 0$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C\frac{\partial u}{\partial t}$$



$$(-i) + \left(i + \frac{\partial i}{\partial x}dx\right) + \left(gdxu + Cdx\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L\frac{\partial i}{\partial t}$$

Электрические цепи с распределенными параметрами

Телеграфные уравнения

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial x} = ri + L\dfrac{\partial i}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x} = gu + C\dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ -\dfrac{\partial u_k}{\partial x} = r_k i_k + L_k \dfrac{\partial i_k}{\partial t} + \sum\limits_{m=1}^{m=n} M_{km} \dfrac{\partial i_m}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial i_k}{\partial x} = g_k u_k + \sum\limits_{m=1}^{m=n} g_{km}(u_k - u_m) + C_k \dfrac{\partial u_k}{\partial t} + \sum\limits_{m=1}^{m=n} C_{km} \dfrac{\partial (u_k - u_m)}{\partial t} \\ \dots \end{cases}$$

Электрические цепи с распределенными параметрами

Решение уравнений однородной линии при установившемся синусоидальном режиме

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial x} = ri + L\dfrac{\partial i}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x} = gu + C\dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \xRightarrow[i(t,x) \doteqdot \dot{I}(x)]{u(t,x) \doteqdot \dot{U}(x)} \begin{cases} -\dfrac{d\dot{U}}{dx} = r\dot{I} + j\omega L\dot{I} \\ -\dfrac{d\dot{I}}{dx} = g\dot{U} + j\omega C\dot{U} \end{cases}$$

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (r + j\omega L)(g + j\omega C)\dot{U} = \gamma^2\dot{U} \qquad \dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}$$

$$\dot{I} = -\frac{1}{r + j\omega L}\frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{r + j\omega L}(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{Z}(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x})$$

$$\gamma = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \alpha + j\beta \qquad Z = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}} = z\, e^{j\varphi_z}$$

Электрические цепи с распределенными параметрами

Решение уравнений однородной линии при установившемся синусоидальном режиме

$$\begin{cases} \dot U = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} \\ \dot I = \dfrac{1}{Z}(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) \end{cases}$$

$\dot U_1 = \dot U$ при $x = 0$

$\dot I_1 = \dot I$ при $x = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot U_1 = A_1 + A_2 \\ \dot I_1 = \dfrac{1}{Z}(A_1 - A_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{1}{2}(\dot U_1 + \dot I_1 Z) \\ A_2 = \dfrac{1}{2}(\dot U_1 - \dot I_1 Z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot U = \dfrac{1}{2}(\dot U_1 + \dot I_1 Z)e^{-\gamma x} + \dfrac{1}{2}(\dot U_1 - \dot I_1 Z)e^{\gamma x} \\ \dot I = \dfrac{1}{Z}\left[\dfrac{1}{2}(\dot U_1 + \dot I_1 Z)e^{-\gamma x} - \dfrac{1}{2}(\dot U_1 - \dot I_1 Z)e^{\gamma x}\right] \end{cases}$$

Электрические цепи с распределенными параметрами

Уравнения однородной линии, записанные через гиперболические функции

$$
\begin{cases}
\dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x} = \frac{1}{2}\dot{U}_1(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) - \frac{1}{2}\dot{I}_1 Z(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) \\
\dot{I} = \frac{1}{Z}\left[\frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} - \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\dot{U}_1}{Z}(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) + \frac{1}{2}\dot{I}_1(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x})
\end{cases}
$$

$$\frac{1}{2}(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) = \operatorname{ch}\gamma x \qquad \frac{1}{2}(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) = \operatorname{sh}\gamma x \qquad \operatorname{ch}^2\gamma l - \operatorname{sh}^2\gamma l = 1$$

$$
\begin{cases}
\dot{U} = \dot{U}_1 \operatorname{ch}\gamma x - \dot{I}_1 Z \operatorname{sh}\gamma x \\
\dot{I} = \dot{I}_1 \operatorname{ch}\gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z}\operatorname{sh}\gamma x
\end{cases}
$$

Электрические цепи с распределенными параметрами

Уравнения однородной линии в А-параметрах

$$\begin{cases}\dot U_2=\dot U \quad \text{при} \quad x=l\\ \dot I_2=\dot I \quad \text{при} \quad x=l\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot U_2=\dot U_1\operatorname{ch}\gamma l-\dot I_1 Z\operatorname{sh}\gamma l\\ \dot I_2=\dot I_1\operatorname{ch}\gamma l-\dfrac{\dot U_1}{Z}\operatorname{sh}\gamma l\end{cases}\quad \left|\begin{array}{c}\operatorname{ch}\gamma l\\+\\\operatorname{sh}\gamma l\end{array}\right|\begin{array}{c}\operatorname{sh}\gamma l\\+\\\operatorname{ch}\gamma l\end{array}$$

$$\begin{cases}\dot U_1=\dot U_2\operatorname{ch}\gamma l+\dot I_2 Z\operatorname{sh}\gamma l\\ \dot I_1=\dot U_2\dfrac{\operatorname{sh}\gamma l}{Z}+\dot I_2\operatorname{ch}\gamma l\end{cases}$$

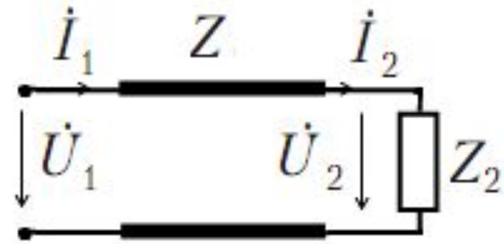
$$\mathbf{A}=\begin{array}{c|c}\operatorname{ch}\gamma l & Z\operatorname{sh}\gamma l\\ \hline \dfrac{\operatorname{sh}\gamma l}{Z} & \operatorname{ch}\gamma l\end{array}$$

$$A=D \qquad AD-BC=\operatorname{ch}^2\gamma l-\operatorname{sh}^2\gamma l=1$$

Электрические цепи с распределенными параметрами

Основные характеристики линии (вторичные параметры)

$$\begin{cases} \dot U_1 = \dot U_2 \operatorname{ch}\gamma l + \dot I_2 Z \operatorname{sh}\gamma l \\ \dot I_1 = \dot U_2 \dfrac{\operatorname{sh}\gamma l}{Z} + \dot I_2 \operatorname{ch}\gamma l \end{cases}$$



$$Z_1 = \frac{\dot U_1}{\dot I_1} = \frac{\dot U_2 \operatorname{ch}\gamma l + \dot I_2 Z \operatorname{sh}\gamma l}{\dot U_2 \dfrac{\operatorname{sh}\gamma l}{Z} + \dot I_2 \operatorname{ch}\gamma l} = \frac{\dot I_2 Z_2 \operatorname{ch}\gamma l + \dot I_2 Z \operatorname{sh}\gamma l}{\dot I_2 Z_2 \dfrac{\operatorname{sh}\gamma l}{Z} + \dot I_2 \operatorname{ch}\gamma l} = \frac{Z_2 \operatorname{ch}\gamma l + Z \operatorname{sh}\gamma l}{Z_2 \dfrac{\operatorname{sh}\gamma l}{Z} + \operatorname{ch}\gamma l}$$

Режим ХХ $Z_2 \to \infty \Longrightarrow \dot I_2 = 0 \Longrightarrow Z_{1\,\text{хх}} = \dfrac{Z}{\operatorname{th}\gamma l}$

Режим КЗ $Z_2 = 0 \Longrightarrow \dot U_2 = 0 \Longrightarrow Z_{1\,\text{кз}} = Z \operatorname{th}\gamma l$

$$Z_{1\,\text{хх}} Z_{1\,\text{кз}} = Z^2$$

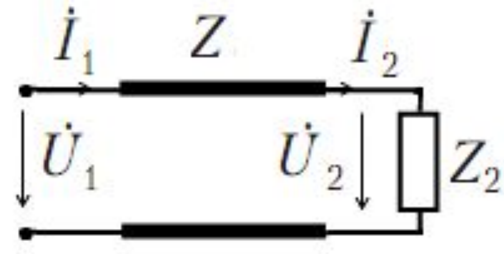
$$\frac{Z_{1\,\text{кз}}}{Z_{1\,\text{хх}}} = \operatorname{th}^2\gamma l$$

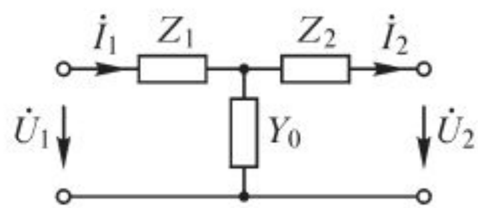
$$Z = \sqrt{Z_{1\,\text{хх}} Z_{1\,\text{кз}}} \qquad \operatorname{th}\gamma l = \sqrt{Z_{1\,\text{кз}} / Z_{1\,\text{хх}}}$$

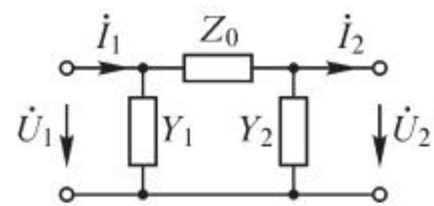
Электрические цепи с распределенными параметрами

Моделирование линии

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch}\gamma l + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh}\gamma l \\ \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \dfrac{\operatorname{sh}\gamma l}{Z} + \dot{I}_2 \operatorname{ch}\gamma l \end{cases}$$







$$Y_0 = \frac{\operatorname{sh}\gamma l}{Z}$$

$$Z_0 = B = Z \operatorname{sh}\gamma l$$

$$Z_1 = Z_2 = \frac{A-1}{C} = \frac{\operatorname{ch}\gamma l - 1}{\dfrac{\operatorname{sh}\gamma l}{Z}}$$

$$Y_1 = Y_2 = \frac{A-1}{B} = \frac{\operatorname{ch}\gamma l - 1}{Z \operatorname{sh}\gamma l}$$

Электрические цепи с распределенными параметрами

Бегущие волны

$$\begin{cases} \dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} = \dfrac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} + \dfrac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x} = \dot{U}_\varphi + \dot{U}_\psi \\ \dot{I} = \dfrac{1}{Z}(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) = \dfrac{1}{Z}\left[\dfrac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} - \dfrac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x}\right] = \dot{I}_\varphi + \dot{I}_\psi \end{cases}$$

$$\dot{U}_\varphi = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} = \dot{U}_{\varphi 1} e^{-\gamma x} = U_{\varphi 1} e^{j\xi} e^{-\gamma x} \qquad \dot{I}_\varphi = \frac{1}{2Z}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x}$$

$$\dot{U}_\psi = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x} = \dot{U}_{\psi 1} e^{\gamma x} = U_{\psi 1} e^{j\eta} e^{\gamma x} \qquad \dot{I}_\psi = -\frac{1}{2Z}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x}$$

$$\dot{U} = \dot{U}_\varphi + \dot{U}_\psi = \dot{U}_{\varphi 1} e^{-\gamma x} + \dot{U}_{\psi 1} e^{\gamma x} = U_{\varphi 1} e^{-\alpha x} e^{j(\xi - \beta x)} + U_{\psi 1} e^{\alpha x} e^{j(\eta + \beta x)}$$

$$u = u_\varphi + u_\psi = \sqrt{2}\, U_{\varphi 1} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \xi - \beta x) + \sqrt{2}\, U_{\psi 1} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \eta + \beta x)$$

$$i = i_\varphi + i_\psi = \sqrt{2}\, \frac{U_{\varphi 1}}{z} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \xi - \beta x - \varphi_z) - \sqrt{2}\, \frac{U_{\psi 1}}{z} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \eta + \beta x - \varphi_z)$$

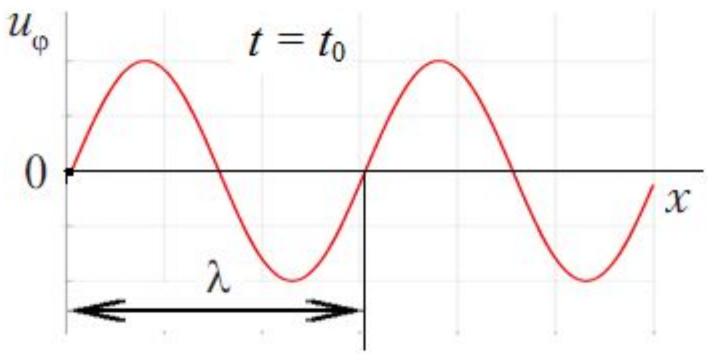
Электрические цепи с распределенными параметрами

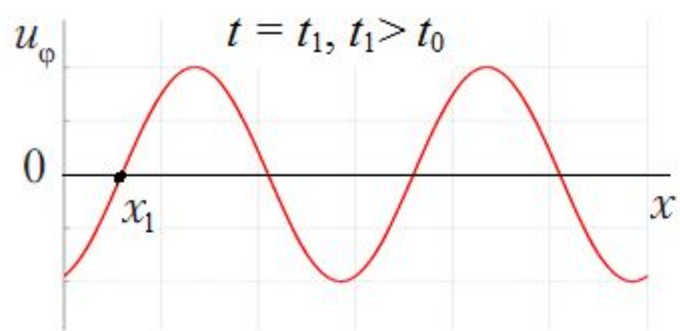
Бегущие волны

$$u_\varphi = \sqrt{2}U_{\varphi 1}e^{-\alpha x}\sin(\omega t + \xi - \beta x)$$

при $x = \mathrm{const}$ $\quad u_\varphi \sim \sin(t)$

при $t = \mathrm{const}$, $\quad \alpha = 0$ и $\mathrm{e}^{-\alpha x} = 1 \quad u_\varphi \sim \sin(x)$



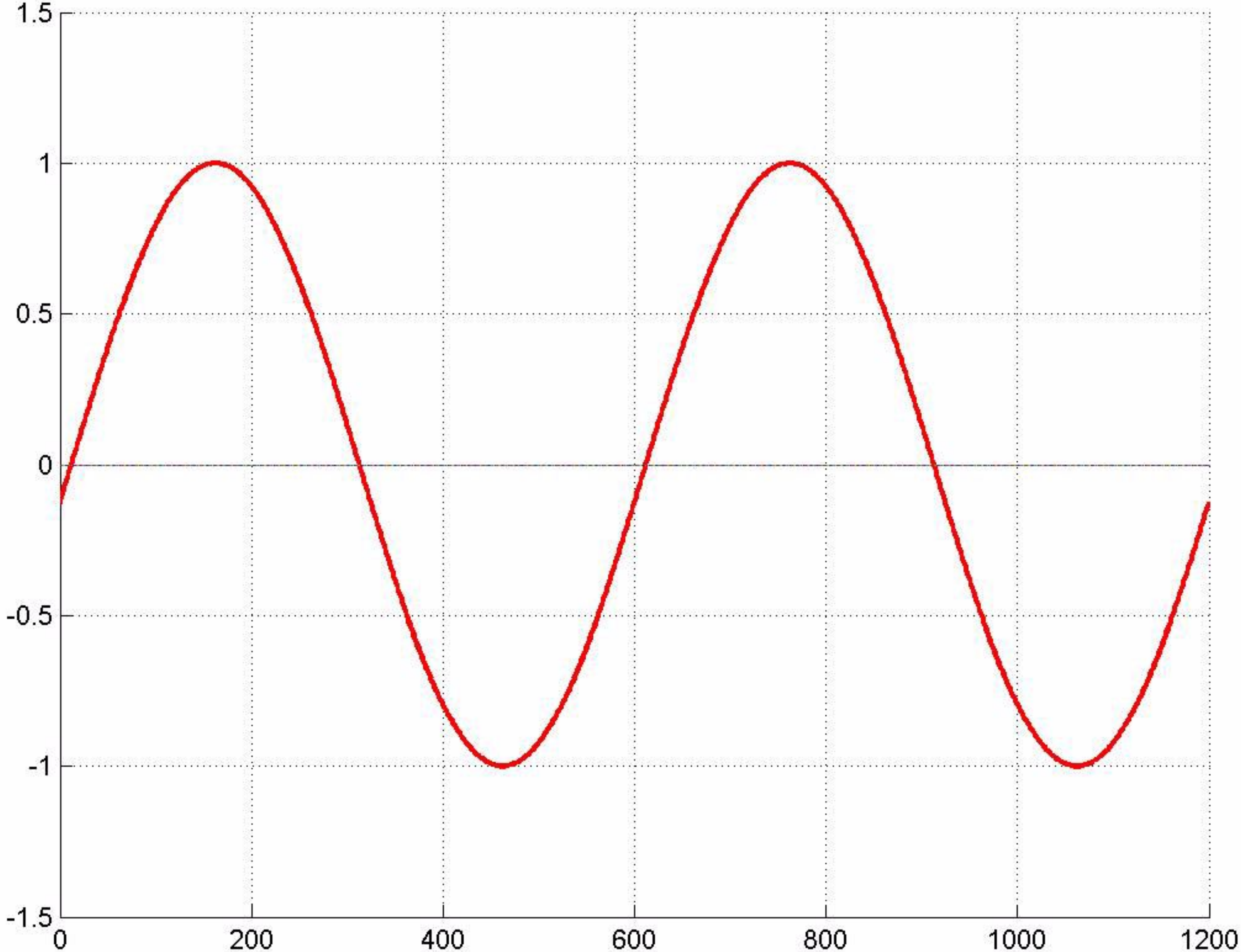


$$\begin{array}{r} \omega t + \xi - \beta x \\ - \\ \omega t + \xi - \beta(x+\lambda) \\ \hline \beta \cdot \lambda = 2\pi \end{array}$$

$$\lambda = 2\pi/\beta$$

$$\omega t_1 + \xi - \beta x_1 = \mathrm{const}$$

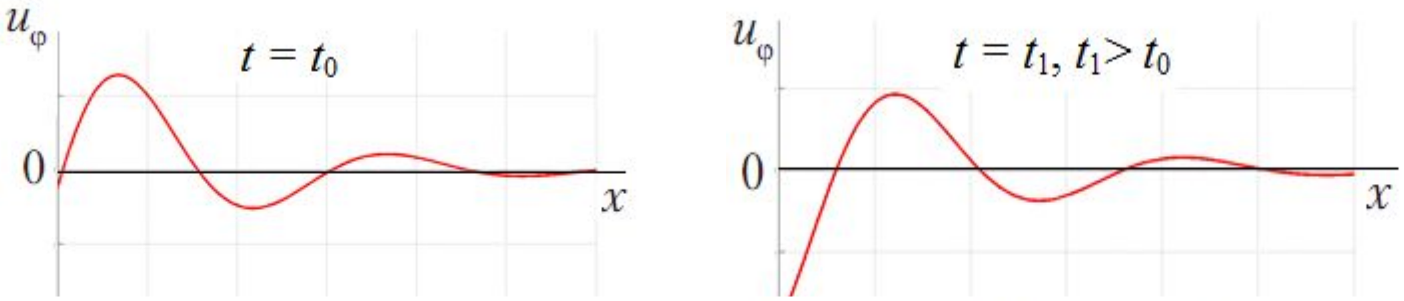
$$v_\text{ф} = x_1/t_1 = \omega/\beta$$


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
200
400
600
800
1000
1200

Электрические цепи с распределенными параметрами

Бегущие волны

$$u_\varphi = \sqrt{2} U_{\varphi 1} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \xi - \beta x)$$ при $t = \mathrm{const}$ и $\alpha > 0$



u_φ перемещается вдоль линии от начала к ее концу с постоянной скоростью $v = \omega/\beta$

$$u_\psi = \sqrt{2}\, U_{\psi 1} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \eta + \beta x)$$

u_ψ перемещается вдоль линии от начала к ее концу с постоянной скоростью $v = -\omega/\beta$

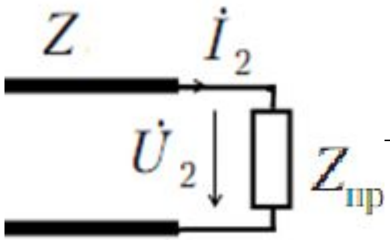
u_ψ перемещается вдоль линии от конца линии к ее началу со скоростью $v = \omega/\beta$

$$\frac{\dot{U}_\varphi}{\dot{I}_\varphi} = Z; \quad \frac{\dot{U}_\psi}{\dot{I}_\psi} = -Z$$


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
200
400
600
800
1000
1200

Электрические цепи с распределенными параметрами

Коэффициенты отражения



$$\begin{cases} \dot U_2 = \dot U_{\varphi_2} + \dot U_{\psi_2} \\ \dot I_2 = \dot I_{\varphi_2} + \dot I_{\psi_2} = \dfrac{\dot U_{\varphi_2}}{Z} - \dfrac{\dot U_{\psi_2}}{Z} \end{cases}$$

$$\dot U_2 = \dot I_2 Z_{пр}$$

$$2\dot U_{\psi 2} = \dot U_2 - \dot I_2 Z = \dot I_2 (Z_{пр} - Z); \quad 2\dot U_{\varphi 2} = \dot U_2 + \dot I_2 Z = \dot I_2 (Z_{пр} + Z)$$

$$q_u = \frac{\dot U_{\psi 2}}{\dot U_{\varphi 2}} = \frac{Z_{пр} - Z}{Z_{пр} + Z} \qquad q_i = -q_u = \frac{Z - Z_{пр}}{Z + Z_{пр}}$$

При $Z_{пр} = Z \Rightarrow q_u = 0$ и $q_i = 0 \Rightarrow \dfrac{\dot U}{\dot I} = \dfrac{\dot U_\varphi}{\dot I_\varphi} = Z$

При $Z_{пр} = \infty \Rightarrow q_u = 1$ и $q_i = -1 \Rightarrow \dot U_{\psi 2} = \dot U_{\varphi 2}$ и $\dot U_2 = 2\dot U_{\varphi 2}$, а $\dot I_{\psi 2} = -\dot I_{\varphi 2}$ и $\dot I_2 = 0$

При $Z_{пр} = 0 \Rightarrow q_u = -1$ и $q_i = 1 \Rightarrow \dot U_{\psi 2} = -\dot U_{\varphi 2}$ и $\dot U_2 = 0$, а $\dot I_{\psi 2} = \dot I_{\varphi 2}$ и $\dot I_2 = 2\dot I_{\varphi 2}$

Электрические цепи с распределенными параметрами

Неискажающая линия

$$Z = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}} \qquad \gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)}$$

$$\boxed{\frac{r}{L} = \frac{g}{C}} \qquad Z = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{\frac{r/L + j\omega}{g/C + j\omega}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\gamma = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \sqrt{LC}\sqrt{(r/L + j\omega)(g/C + j\omega)} =$$
$$= \sqrt{LC}(r/L + j\omega) = \sqrt{rg} + j\omega\sqrt{LC}$$

$$\alpha_{\min} = \sqrt{rg} \quad \text{и} \quad \beta_{\min} = \omega\sqrt{LC} \qquad v_{\max} = \omega/\beta = 1/\sqrt{LC}$$

Для воздушных линий $z \approx 300–400$ Ом и $v \approx 3 \cdot 10^8$ м/с

Для кабельных линий $z \approx 50$ Ом и $v < 3 \cdot 10^8$ м/с

Электрические цепи с распределенными параметрами

Зависимость тока и напряжения в линии от нагрузки

при счете расстояний от начала линий

$$\begin{cases} \dot U = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} \\ \dot I = \dfrac{1}{Z}\left(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}\right) \end{cases}$$

x на $l - x$

при $x = 0$ $\dot U = \dot U_2$ и $\dot I = \dot I_2$

$$\begin{cases} \dot U = A_1 e^{-\gamma l} e^{\gamma x} + A_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma x} = A_3 e^{\gamma x} + A_4 e^{-\gamma x} \\ \dot I Z = A_1 e^{-\gamma l} e^{\gamma x} - A_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma x} = A_3 e^{\gamma x} - A_4 e^{-\gamma x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot U_2 = A_3 + A_4 \\ \dot I_2 Z = A_3 - A_4 \end{cases}$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(\dot U_2 + \dot I_2 Z) \qquad A_4 = \frac{1}{2}(\dot U_2 - \dot I_2 Z)$$

$$\begin{cases} \dot U = \dfrac{1}{2}(\dot U_2 + \dot I_2 Z)e^{\gamma x} + \dfrac{1}{2}(\dot U_2 - \dot I_2 Z)e^{-\gamma x} = \dot U_2 \operatorname{ch}\gamma x + \dot I_2 Z \operatorname{sh}\gamma x \\ \dot I = \dfrac{1}{Z}\left[\dfrac{1}{2}(\dot U_2 + \dot I_2 Z)e^{\gamma x} - \dfrac{1}{2}(\dot U_2 - \dot I_2 Z)e^{-\gamma x}\right] = \dot I_2 \operatorname{ch}\gamma x + \dfrac{\dot U_2}{Z} \operatorname{sh}\gamma x \end{cases}$$

Электрические цепи с распределенными параметрами

Линия без потерь. Стоячие волны

$r = 0$ и $g = 0$ $\quad \omega L \gg r$ и $\omega C \gg g \quad \alpha = 0,\ \gamma = j\beta,\ \beta = \omega\sqrt{LC},\ Z = z = \sqrt{L/C}$

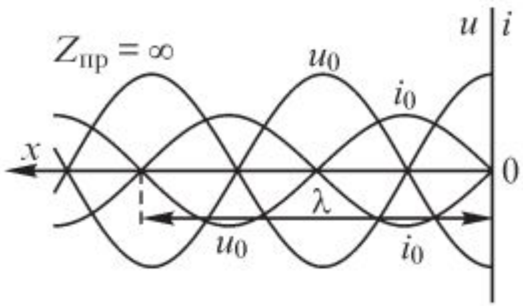
$$\begin{cases} \dot U = \dot U_2 \operatorname{ch}\gamma x + \dot I_2 Z \operatorname{sh}\gamma x = \dot U_2 \cos\beta x + j \dot I_2 z \sin\beta x \\ \dot I = \dot I_2 \operatorname{ch}\gamma x + \dfrac{\dot U_2}{Z} \operatorname{sh}\gamma x = \dot I_2 \cos\beta x + j \dfrac{\dot U_2}{z} \sin\beta x \end{cases}$$

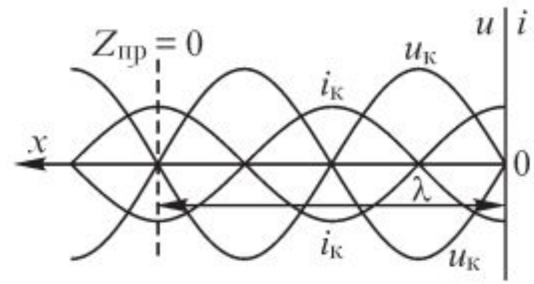
$Z_{\text{пр}} = \infty$ и $I_2 = 0$

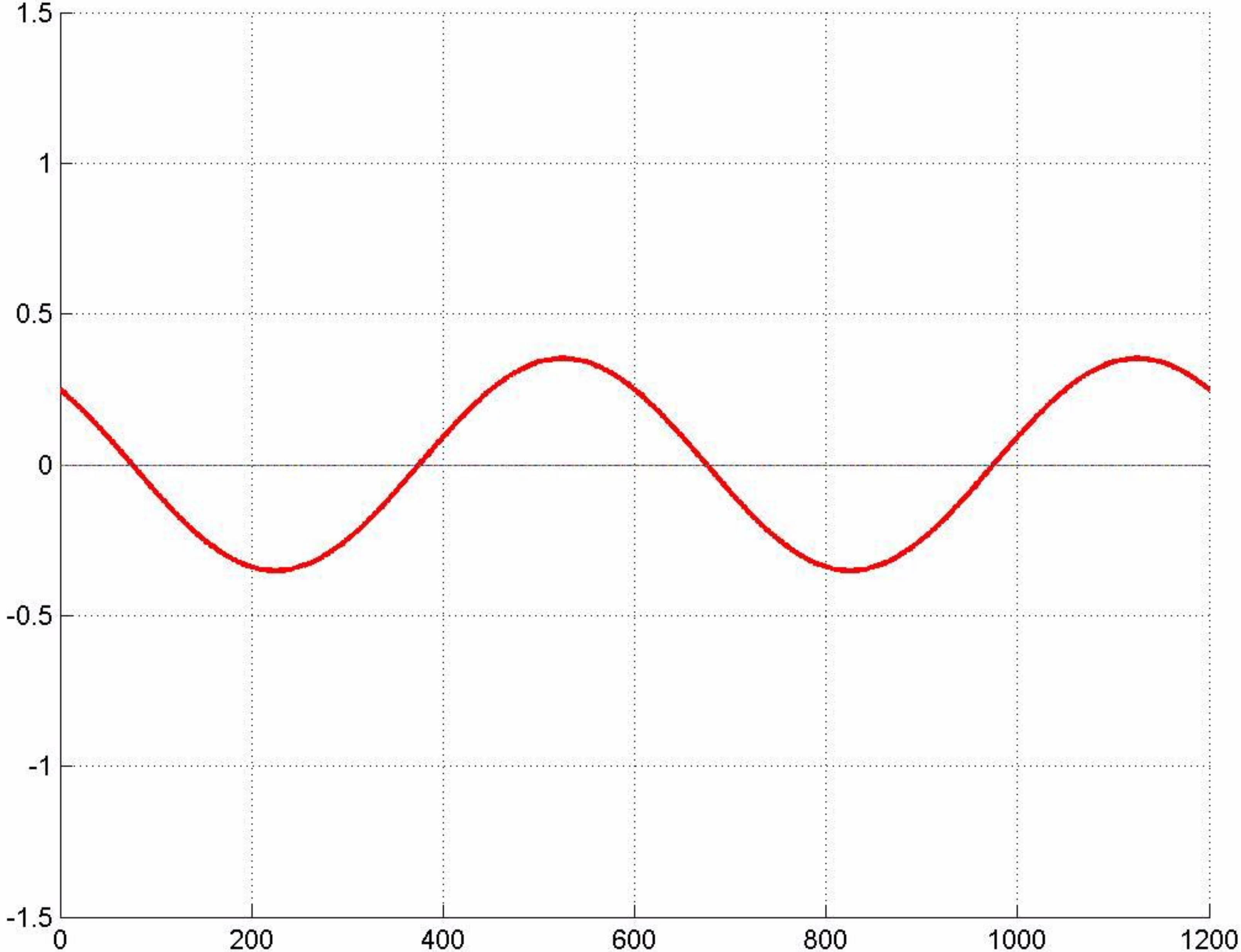
$$\begin{cases} \dot U_0 = \dot U_{20} \operatorname{ch}\gamma x = \dot U_{20} \cos\beta x \\ \dot I_0 = \dfrac{\dot U_{20}}{z} \operatorname{sh}\gamma x = j \dfrac{\dot U_{20}}{z} \sin\beta x \end{cases}$$

$Z_{\text{пр}} = 0$ и $U_2 = 0$

$$\begin{cases} \dot U_{\text{к}} = \dot I_{2\text{к}} Z \operatorname{sh}\gamma x = j \dot I_{2\text{к}} z \sin\beta x \\ \dot I_{\text{к}} = \dot I_{2\text{к}} \operatorname{ch}\gamma x = \dot I_{2\text{к}} \cos\beta x \end{cases}$$







1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
200
400
600
800
1000
1200