

Арифметические операции в различных системах счисления

Лекция 2

Двоичная система счисления

Сложение

одноразрядных
двоичных чисел:

$$0 + 0 = 0$$

$$1 + 0 = 1$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 1 = 10$$

Пример

$$\begin{array}{r} 1101 \\ + 101 \\ \hline 10010 \end{array}$$

Двоичная система счисления

Вычитание

одноразрядных двоичных чисел:

$$0 - 0 = 0$$

$$1 - 0 = 1$$

$$0 - 1 = (\text{заем из старшего разряда}) 1$$

$$1 - 1 = 0$$

Пример:

$$\begin{array}{r} 1110 \\ - 101 \\ \hline 1001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - \quad 110010_2 \\ = \quad 100101_2 \\ \hline \quad 001101_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1) \quad \begin{array}{r} - \quad 10_2 \\ = \quad 01_2 \\ \hline \quad 01_2 \end{array} \quad \left| \quad 2) \quad \begin{array}{r} - \quad 100_2 \\ = \quad 001_2 \\ \hline \quad 011_2 \end{array} \quad \left| \quad 3) \quad \begin{array}{r} - \quad 1_2 \\ = \quad 1_2 \\ \hline \quad 0_2 \end{array} \end{array}$$

Двоичная система счисления

Умножение

одноразрядных

двоичных чисел:

$$0 * 0 = 0$$

$$1 * 0 = 0$$

$$0 * 1 = 0$$

$$1 * 1 = 1$$

Пример:

$$\begin{array}{r} 1110 \\ * \quad 10 \\ \hline + 0000 \\ 1110 \\ \hline 11100 \end{array}$$

Двоичная система счисления

Деление выполняется так же как в десятичной системе счисления:

1110	10
10	111
11	
10	
10	
10	
0	

Выполнение арифметических операций над двоичными числами разных порядков:

- сравниваются n и m выравниваются порядки;
- выполняется сложение или вычитание мантиссы;
- производится нормализация результата, если это нужно.

Выполнение арифметических операций над двоичными числами разных порядков:

Пример. Сложение

$$X_1 = 0,1001 * 2^{101}$$

$$X_2 = 0,1100 * 2^{100}$$

$$1) \quad \Delta p = 101 - 100 = 001$$

$$X_2 = 0,0110 * 2^{101}$$

$$2) \begin{array}{r} 0,1001 \\ +0,0110 \\ \hline 0,1111 \end{array}$$

$$3) \quad X_1 + X_2 = 0,1111 * 2^{101}$$

Выполнение арифметических операций над двоичными числами разных порядков:

Пример. Вычитание

$$X_1 = 0,1001 * 2^{101}$$

$$X_2 = 0,1100 * 2^{100}$$

$$1) \Delta p = 101 - 100 = 001$$

$$X_2 = 0,0110 * 2^{101}$$

$$2) \begin{array}{r} 0,1001 \\ -0,0110 \\ \hline 0,0011 \end{array}$$

$$3) X_1 - X_2 = 0,0011 * 2^{101} = 0,11 * 2^{11}$$

Выполнение арифметических операций над двоичными числами разных порядков:

Пример. Умножение

$$X_1 = q_1 * 2^{p_1}$$

$$X_2 = q_2 * 2^{p_2}$$

$$X_1 * X_2 = q_1 * q_2 * 2^{(p_1 + p_2)}$$

$$X_1 = 10 = 0,10 * 2^{10}$$

$$X_2 = 10 = 0,10 * 2^{10}$$

$$\begin{array}{r}
 0,10 \\
 *0,10 \\
 \hline
 000 \\
 010 \\
 \hline
 000 \\
 \hline
 0,0100
 \end{array}$$

$$p_1 + p_2 = 10 + 10 = 100$$

$$X_1 * X_2 = 0,0100 * 2^{100}$$

Выполнение арифметических операций над двоичными числами разных порядков:

Пример. Деление

$$X_1 = q_1 * 2^{p_1}$$

$$X_2 = q_2 * 2^{p_2}$$

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{q_1}{q_2} * 2^{(p_1 - p_2)}$$

$$X_1 = 0,110 = 110 * 2^{-11}$$

$$X_2 = 0,10 = 10 * 2^{-10}$$

110	10
10	11
10	
10	
0	

$$p_1 - p_2 = -11 - (-10) = -01$$

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{q_1}{q_2} * 2^{(p_1 - p_2)} = 11 * 2^{-01}$$

В ПК используются следующие разрядные сетки для представления чисел:

1 байт (8 разрядов) – полуслово

2 байта (16 разрядов) – слово

4 байта (32 разряда) – двоичное слово

8 байт (64 разряда) – расширенное слово

$-3_{10} = -11_2$ в восьмиразрядной сетке будет
иметь вид: 10000011

Для кодирования знака числа отводится специальный разряд, называемый знаковым. Под него отводится старший разряд разрядной сетки, «+» кодируется 0, «-» кодируется 1.

Выполнение арифметических операций в машинных кодах позволяет:

- свести операцию вычитания к операции сложения
- автоматически получать знак суммы
- выявлять переполнение разрядной сетки

Виды машинных кодов

Прямой код числа представляется в виде абсолютной величины со знаком двоичного числа – это само двоичное число, в котором все цифры, изображающие его значение, записываются как в математической записи, а знак записывается в виде кода (0,1) в старшем разряде.

Обратный код положительного числа совпадает с его прямым кодом.

Дополнительный код положительного числа совпадает с его прямым кодом.

Виды машинных кодов

Обратный код отрицательного числа получается с помощью замены значений всех цифр числа на противоположные за исключением знакового разряда.

$3_{10} = 11_2$ в прямом, дополнительном и обратном коде будет иметь вид – **0000011**

$-3_{10} = -11_2$ в прямом коде будет иметь вид: **1000011**

$-3_{10} = -11_2$ в обратном коде будет иметь вид: **1111100**

Виды машинных кодов

Дополнительный код отрицательного числа получается в результате увеличения его обратного кода на 1.

$-3_{10} = -11_2$ обратном коде
будет иметь вид: 1111100

$-3_{10} = -11_2$ дополнительном коде
будет иметь вид: 1111101

Все математические операции в ПК выполняются только в обратных или дополнительных кодах.

Таблица преобразования кодов при алгебраическом сложении

Требуемая операция	Необходимое преобразование
A+B	A+B
A-B	A+(-B)
-A+B	(-A)+B
-A-B	(-A)+(-B)

Пример 1. Выполнение операции в обратном коде

$$X1 - X2 = 17 - 5 = 17 + (-5) = 12$$

[X1] пр=00010001

[X1] обр=00010001

[X2] пр=10000101

[X2] обр=11111010

$$\begin{array}{r} 00010001 \\ + 11111010 \\ \hline 100001011 \\ + \\ \hline 00001100 \end{array}$$

**При выполнении операций
в обратном коде**

единица, ушедшая за 8
разряд, прибавляется к
младшему разряду числа.

Пример 2.

$$X1 - X2 = 5 - 17 = 5 + (-17) = -12$$

[X1] пр=00000101

[X1] обр=00000101

[X2] пр=10010001

[X2] обр=11101110

$$\begin{array}{r} 00000101 \\ + \underline{11101110} \\ \hline 11110011 \text{ обр.} \\ 10001100 = -12 \end{array}$$

Ответ всегда записывается в прямом коде.
Если в результате получилось отрицательное число, то его необходимо перевести в прямой код.

Пример 3. Выполнение операции в дополнительном коде

$$X1 - X2 = 17 - 5 = 17 + (-5) = 12$$

[X1] пр=00010001

[X1] обр=00010001

[X1] доп=00010001

[X2] пр=10000101

[X2] обр=11111010

[X2] доп=11111011

$$\begin{array}{r} 00010001 \\ +11111011 \\ \hline 100001100 \end{array}$$



выбрасывается

При выполнении операций в
дополнительном коде
Единица, ушедшая за 8 разряд
ВЫБРАСЫВАЕТСЯ.

Пример 4.

$$X1 - X2 = 5 - 17 = 5 + (-17) = -12$$

[X1] пр=00000101 [X1] обр=00000101 [X1] доп=00000101
[X2] пр=10010001 [X2] обр= 11101110 [X2] доп= 11101111

$$\begin{array}{r} 00000101 \\ +11101111 \\ \hline 11110100 \text{ доп.код} \\ 10001011 \\ + \quad \quad 1 \\ \hline 10001100 \end{array}$$

$$10001100 = -12$$

Получили отрицательное число в доп. коде. Для перевода его в прямой код необходимо:

- 1 . Проинвертировать все разряды числа, за исключением знакового;
- 2 . Еще раз прибавить 1 к младшему разряду.

Модифицированный дополнительный машинный коды

Модифицированный дополнительный код получается из дополнительного простым дублированием знакового разряда. "00" соответствует знаку "+", "11" - знаку "-".

Любая другая комбинация ("01" или "10"), получившаяся в знаковых разрядах служит признаком переполнения разрядной сетки и получившийся результат – неверный.

знак	знак	5	4	3	2	1	0
-------------	-------------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

Пример

Переведем X и Y в модифицированный дополнительный код:

Обычная запись	Модифицированный обратный код	Модифицированный дополнительный код
X = +101001	$X_{об\ p}^m = 00,101001$	$X_{доп}^m = 00,101001$
Y = -011010	$Y_{об\ p}^m = 11,100101$	$Y_{доп}^m = 11,100110$

Выполним сложение:

$$X_{доп}^m = 00,101001$$

$$Y_{доп}^m = \underline{11,100110}$$

$$1) 00,001111$$

отбрасывается

$$(X+Y)_{доп}^m = 00,001111$$

В данном примере
запятой отделены
знаковые разряды !!

Переполнения нет (в знаковых разрядах "00" – в результате получено положительное число), поэтому полученный результат - верный ($X+Y=1111=41-26=15$).

Пример 2

Обычная запись числа	Модифицированный обратный код	Модифицированный дополнительный код
$X = -41 = -101001$	11 010110	11 01011 1
$Y = 26 = +011010$	00 011010	00 011010

$$X + Y = -41 + 26 = -15$$

11 010111

+00 011010

11 110001 доп. модиф. код

Переполнения нет (в знаковых разрядах "11" – в результате получено отрицательное число), поэтому полученный результат – нужно переводить в прямой код.

11 110001 доп. модиф. код

11 001110 обратный. модиф. код

+ 1

11 001111, что соответствует числу -15_{10}