ТЕМА 2. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГОРНЫХ ПОРОД

Лекция 3. *Основные представления о напряженном состоянии горных пород*

1. Понятия о напряжениях и деформациях

Прочность и устойчивость сооружений, возводимых непосредственно в толще горных пород, определяются напряженным состоянием, возникающем как результат действия **внешних сил (нагрузок)**.

Без определения величины **напряжений** и области их распространения невозможно рассчитать осадку сооружений, оценить устойчивость склонов и откосов, а также безопасность эксплуатации подземных выработок. В строительной механике и сопротивлении материалов, теории упругости рассматривается среды, которые обладают свойствами сплошности и однородности, т.е. среда называется **сплошной**.

Реальные же породы с их сложным строением на макро- и микроуровне заменяются некоторой моделью сплошной, однородной, изотропной, упругой среды (см. далее).

Рассмотрим на простейшем примере элементарные внутренние усилия и перемещения, возникающие при действии на брус продольной силы F

Разрезаем мысленно брус сечением на две части, действие одной части на другую заменяем усилием N (продольная сила). Эта продольная сила определяется из уравнения статики

$$\sum \mathbf{Z} = \mathbf{0} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \mathbf{N} = \mathbf{F}$$

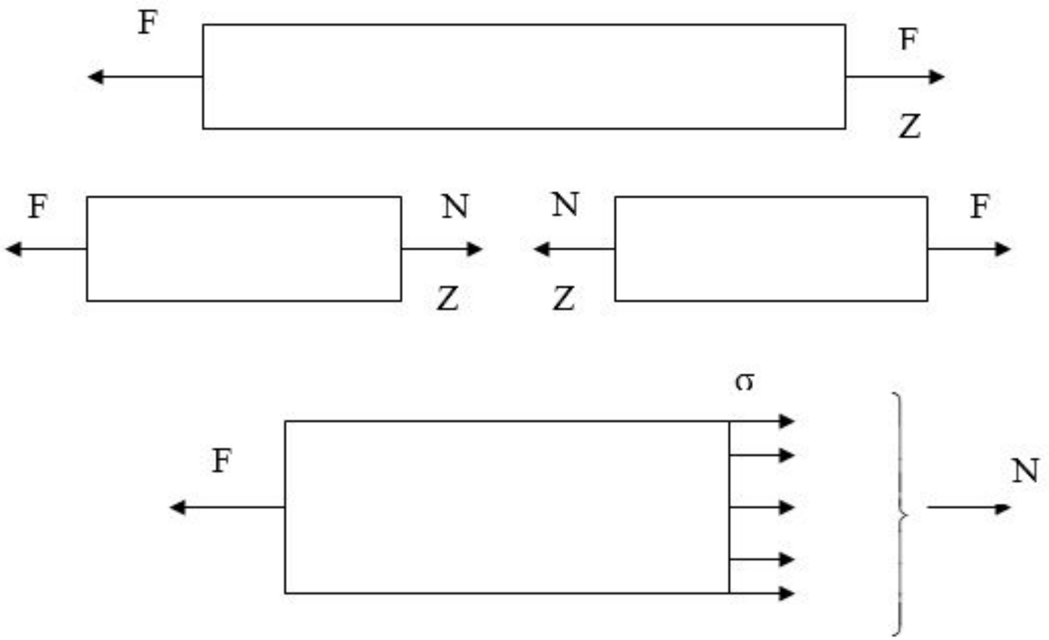


Рисунок к расчету бруса при растяжении

Продольная сила является равнодействующей элементарных сил, определяющих взаимодействие между частицами тела. При растяжении естественно предположить, что элементарные силы равномерно распределяются по площади сечения и называются напряжением.

Напряжения – мера интенсивности внутренних сил. При растяжении возникают нормальные напряжения (перпендикулярно к сечению) σ, которые определяются по формуле

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{S}}, \text{ Па},$$

где N – продольная сила, Н;
S – площадь поперечного сечения, м^2.

Обычно принимают следующее правило знаков:

- если нормальное напряжение (сила) направлено от сечения, оно вызывает растяжение и считается положительным;
- если нормальное напряжение (сила) направлена к сечению, то оно вызывает сжатие и считается отрицательным.

Между этими видами деформаций сохраняется единство при анализе внутренних сил, но и обнаруживаются качественные отличия, например, при изучении процессов разрушения материалов или при исследовании поведения длинных и тонких стержней, для которых сжатие сопровождается изгибом.

Условие прочности: напряжение, возникающее в опасной точке конструкции, среды, должны быть меньше или, по крайней мере, равны допускаемым напряжениям

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]$$

Допускаемые напряжения определяют по зависимости

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{n},$$

где $\sigma_{пред}$ – предельное напряжение, определяемое в результате испытаний образцов при различных условиях нарушения;

n – коэффициент запаса прочности, $n > 1$.

Под действием приложенных сил брус изменяет свои размеры (рисунок). До деформации длина его была ℓ после деформации $\ell_1 = \ell + \Delta\ell$. Величина $\Delta\ell$ называется абсолютным удлинением бруса.

Отношение

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{\Delta}\ell}{\ell}$$

называют относительным удлинением бруса. Но правильное название – *линейная деформация*, иногда продольная деформация.

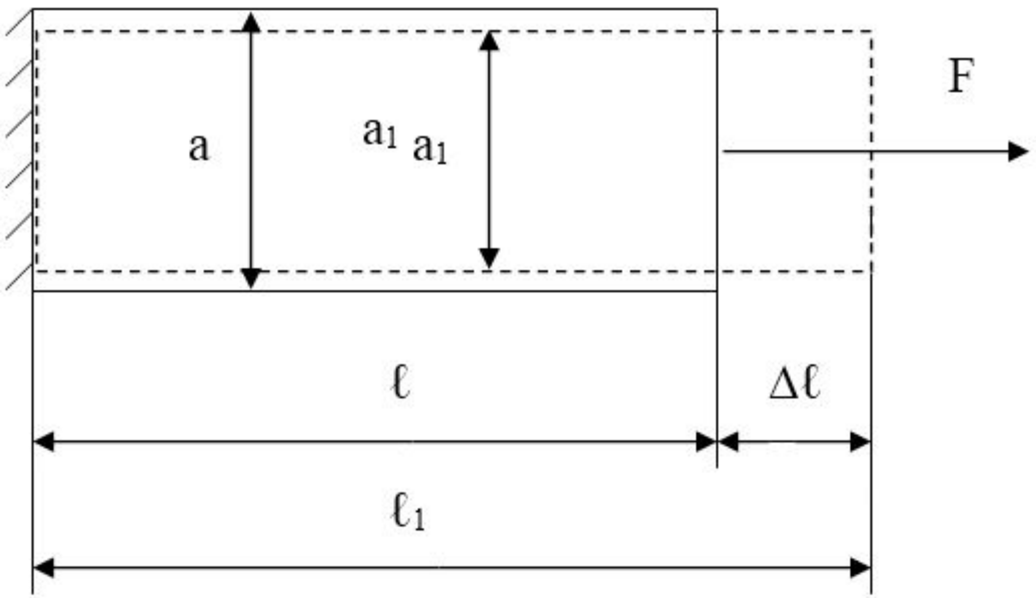


Рисунок – Изменение размеров бруса при растяжении его

В поперечном направлении произошло уменьшение поперечного размера и *поперечная деформация* равна

$$\varepsilon^{1} = \frac{a_1 - a}{a}$$

Между поперечной и продольной деформацией существует зависимость. Отношение поперечной деформации к продольной носит название *коэффициента Пуассона* и является механической характеристикой материала и определяется экспериментальным путем.

$$\mu = \left|\frac{\varepsilon^{1}}{\varepsilon}\right|$$

В пределах малых удлинений для подавляющего большинства материалов, в том числе и для горных пород, справедлив *закон Гука*, который устанавливает пропорциональную зависимость между напряжениями и деформациями:

$$\sigma = \varepsilon E,$$

где Е – модуль упругости первого рода или *модуль упругости*, МПа.

Эта величина является физической константой материала и определяется экспериментально.

Определим напряжения, возникающие в брусе при растяжении в некотором сечении, нормаль к которому расположена под углом α к оси бруса.

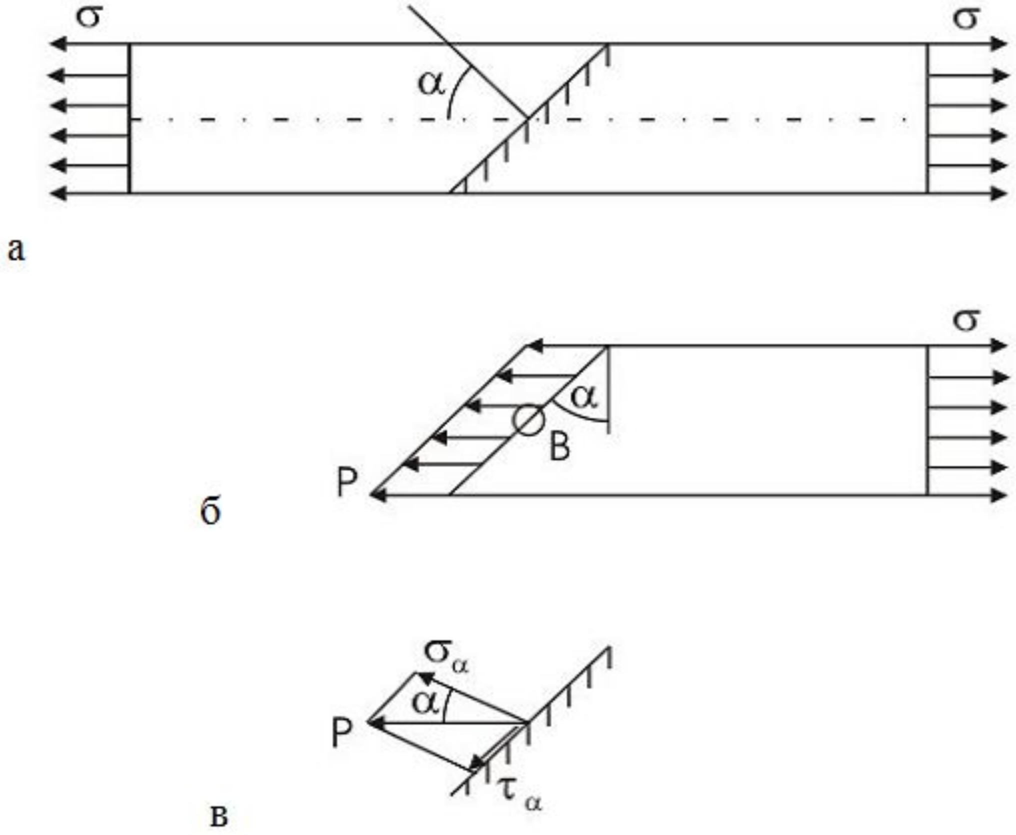


Рисунок – Напряжения в наклонных площадках

Напряжения **p** равномерно распределены по наклонному сечению и их можно определить из условия равновесия правой части бруса

$$\Sigma Z = 0 \qquad\qquad \mathbf{p}A_{\alpha} = \sigma A,$$

где A – площадь поперечного сечения бруса;
A_{α} – площадь наклонного сечения бруса.
Таким образом, напряжение в наклонном сечении

$$p = \sigma \cos \alpha.$$

Обычно это напряжение раскладывали на два направления: по нормали к сечению, нормальное напряжение σ_{α} и вдоль площадки – касательное напряжение τ_{α} (рисунок в) и они равны

$$\sigma_{\alpha} = p \cos \alpha = \sigma \cos^{2} \alpha,$$

$$\tau_{\alpha} = p \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$

Как видно на примере растяжения бруса, напряжения в площадке (сечении) зависят от ее ориентации. Через данную точку в конструкции, в массиве горных пород, можно провести бесчисленное множество сечений, в которых действуют различные по величине и по направлению нормальные и касательные напряжения, которые отражают взаимодействие бесконечного множества частиц на данную точку.

Напряжения, действующие по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам определяют *напряженное состояние в точке*. Условно напряженное состояние в точке представляют следующим образом: вокруг точки вырезаем элемент бесконечно малого размера в форме параллелепипеда (рисунок, а, следующий слайд).

При уменьшении сторон, в пределе (dx, dy, dz > 0) этот параллелепипед стягивается в точку, через которую проходят три взаимно перпендикулярные площадки. По граням элемента могут действовать напряжения P_x, P_y, P_z (рисунок, а).

Индекс нормального напряжения соответствует нормали к площадке, на которой они действуют. Касательные напряжения имеют два индекса: первый – направление оси, параллельной напряжению, второй – направлению оси, перпендикулярной к площадке. Таким образом, на гранях элементарного параллелепипеда действуют девять компонент
напряжений, которые представляют собой *тензор напряжений*, записываемый в виде

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \tau_{yx} \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \sigma_y \tau_{zy} \\ \tau_{xz} \tau_{yz} \sigma_z \end{Bmatrix},$$

где в строках расположены составляющие напряжений соответственно на площадках, перпендикулярных осям x, y, z.

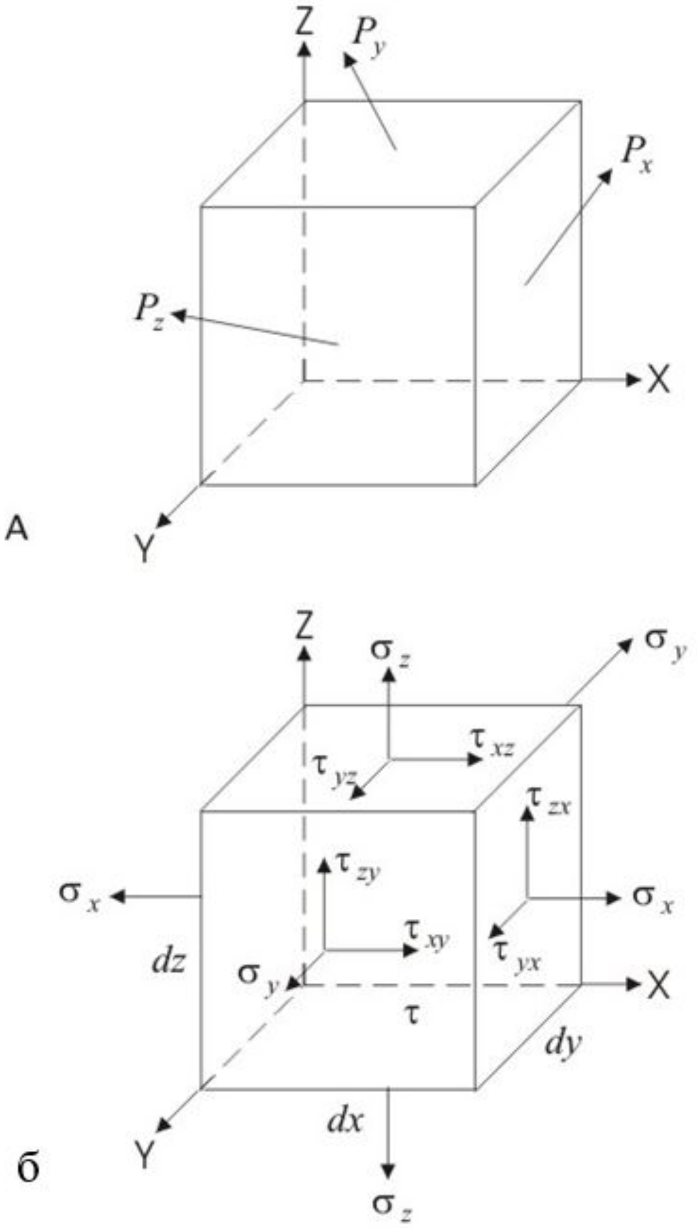


Рисунок – Напряженное состояние в точке

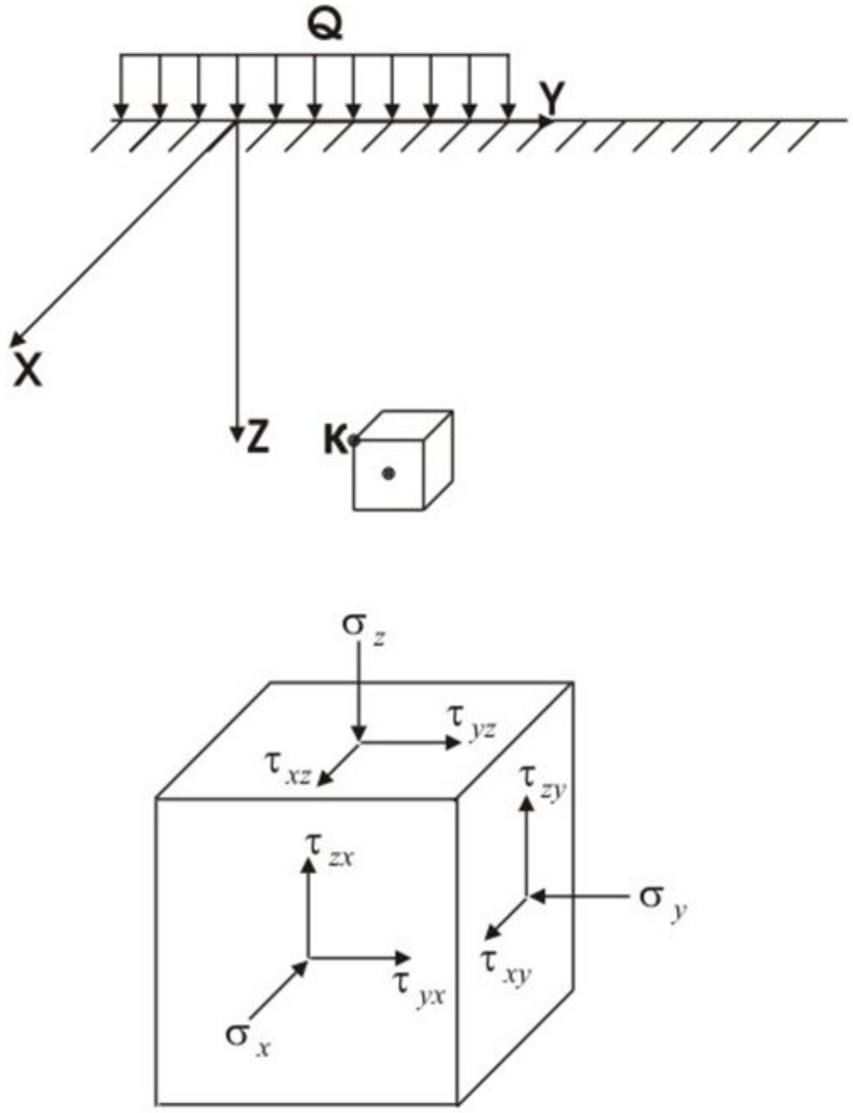
В следующих лекциях будет показано, что

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{yz}} = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{zy}};\ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{zx}} = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{xz}};\ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{xy}} = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{yx}}$$

Таким образом, на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к общему ребру, равны и направлены обе либо к ребру, либо от ребра. Это есть закон парности касательных напряжений. Следовательно, на гранях выделенного элемента имеем не девять, а шесть независимых компонент напряжений, поскольку касательные напряжения попарно равны. Тензор напряжений является симметричным.

Анализ напряженного состояния в точке начинается всегда с определения напряжений на гранях выделенного в окружности точки элемента. Через точку проводится три взаимно перпендикулярные плоскости, ориентация которых может быть произвольной и часто определяется более простым расчетом компонент напряжений.

Например, напряжение в толще горной породы определяем следующим образом. Выбираем некоторую точку, положение которой определяем с помощью прямоугольной системы координат, началом которой считают точку на границе действия внешних сил и горной породы. Ось z направлена вниз, ось y – слева направо, ось x – перпендикулярно к оси y.



а

б

Рисунок – Напряженное состояние в точке

Для оценки сжимаемости горной породы под действием внешней нагрузки обычно рассматривают горизонтальные и вертикальные площадки. В таком случае решение задачи о сжатии горной породы в некоторой точке сводится к решению о сжатии заменяющего эту точку элементарного параллелепипеда, стороны которого параллельны оси координат, что допустимо в силу его малости.

Напряжения в породах могут создаваться не только действием внешних нагрузок, но и другими физическими полями. Например, термические напряжения вызываются неоднородным нагревом пород.

При изменении ориентации граней выделенного элемента или, иначе, при проведении различных площадок через данную точку изменяются напряжения, действующие по этим граням. Среди бесчисленного множества площадок, проходящих через данную точку, имеется три взаимно перпендикулярных площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Такие площадки называются *главными площадками*, а нормальные напряжения на этих площадках – *главными напряжениями*. Главные напряжения обозначаются σ_1, σ_2, σ_3 в порядке убывания в алгебраическом смысле, т.е. $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Если по всем трем граням параллелепипеда действует три напряжения, то напряженное состояние называется объемным или трехосным (рисунок, а).

Если на гранях элемента действуют два напряжения σ_1, σ_2, то напряженное состояние называется плоским или двухосным (рис, б). Если на гранях элемента действуют напряжения σ_1, то напряженное состояние называется линейным или одноосным (рис, в).

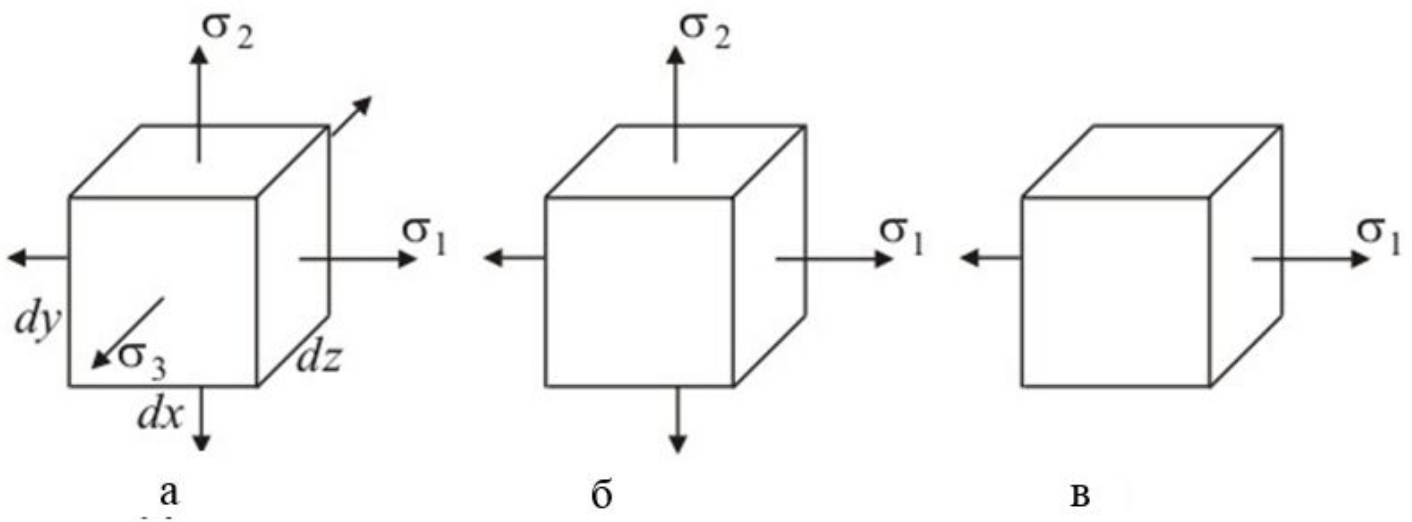


Рисунок – Виды напряженных состояний

В дальнейшем при исследовании напряженного состояния в точке необходимо определять главные напряжения, потому что расчеты на прочность построены на основании главных напряжений.

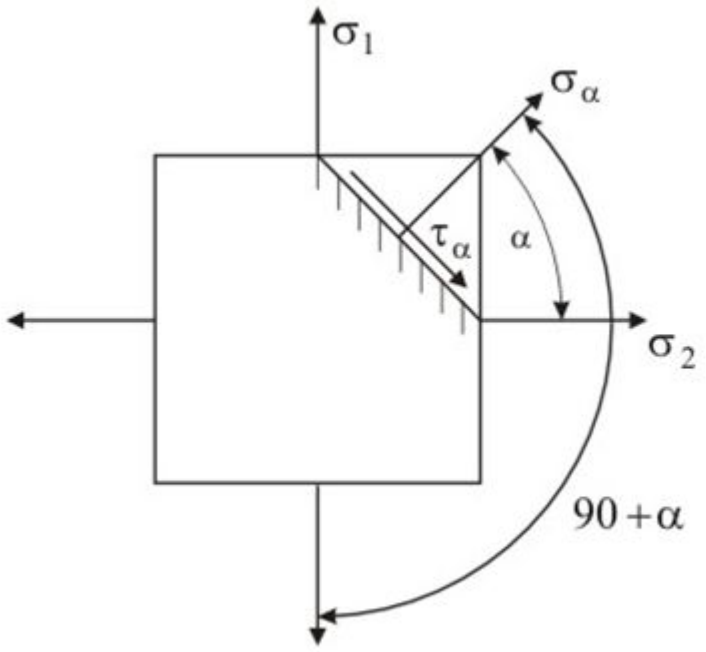


Рисунок – Плоское напряженное состояние

Рассмотрим напряжения, возникающие в наклонных площадках при плоском напряженном состоянии. По граням элемента действуют главные напряжения σ_1 и σ_2. Определяем напряжения на площадке, нормаль к которой составляет угол α с горизонтальной осью.

На рисунке представлена проекция параллелепипеда. Определяем нормальные и касательные напряжения.

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \cdot (90 + \alpha),$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} \sin 2 \cdot (90 + \alpha),$$

окончательно получаем

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha .$$

После преобразований можно записать

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha ,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha .$$

Эти зависимости представляют уравнение окружности в параметрической форме в системе координат σ и τ. Таким образом, напряженное состояние в точке можно представить графически в виде окружности, координаты точек которой определяют напряжения на соответствующей площадке, а угол α определяет ориентацию площадки. Центр окружности находится на расстоянии $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ от начала координат по оси σ. Радиус окружности равен $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$.

Эта окружность носит название круг Мора или круговой диаграммой напряженного состояния. Более детально рассмотрим ее в следующих лекциях.