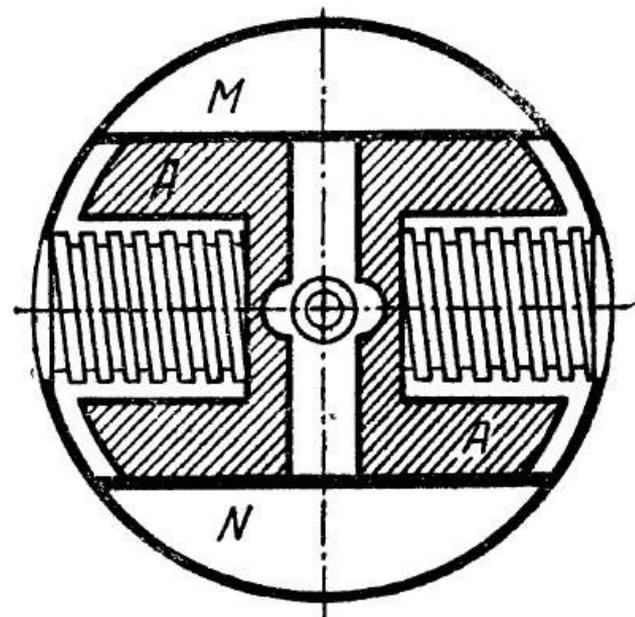


# Теоретическая механика

## Задачи

# Сложение ускорений

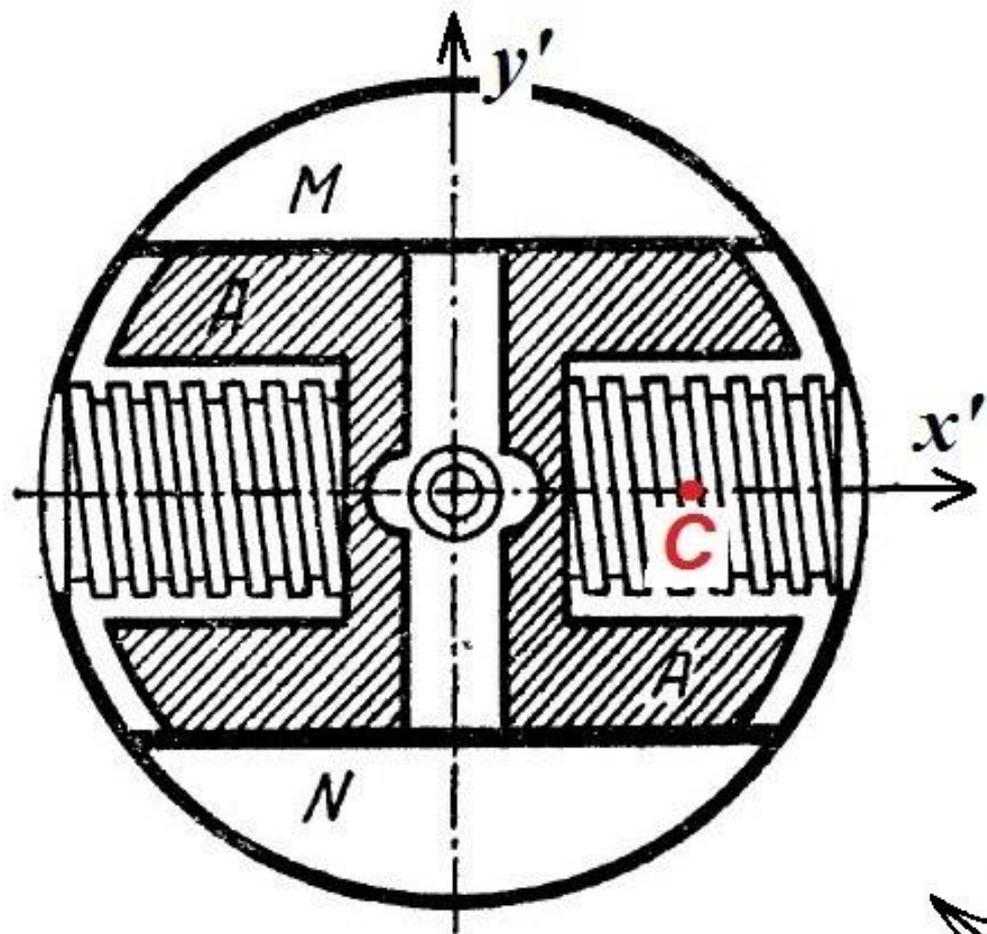
23.11(23.11). В регуляторе, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega = 6\pi$  рад/с, тяжелые гири  $A$ , прикрепленные к концам пружины, совершают гармонические колебания вдоль паза  $MN$  таким образом, что расстояние их центров тяжести от оси вращения изменяется по закону  $x = (0,1 + 0,05 \sin 8\pi t)$  м. Определить ускорение центра тяжести гири в момент, когда кориолисово ускорение достигает максимального значения, и указать значение кориолисова ускорения при крайних положениях гири.



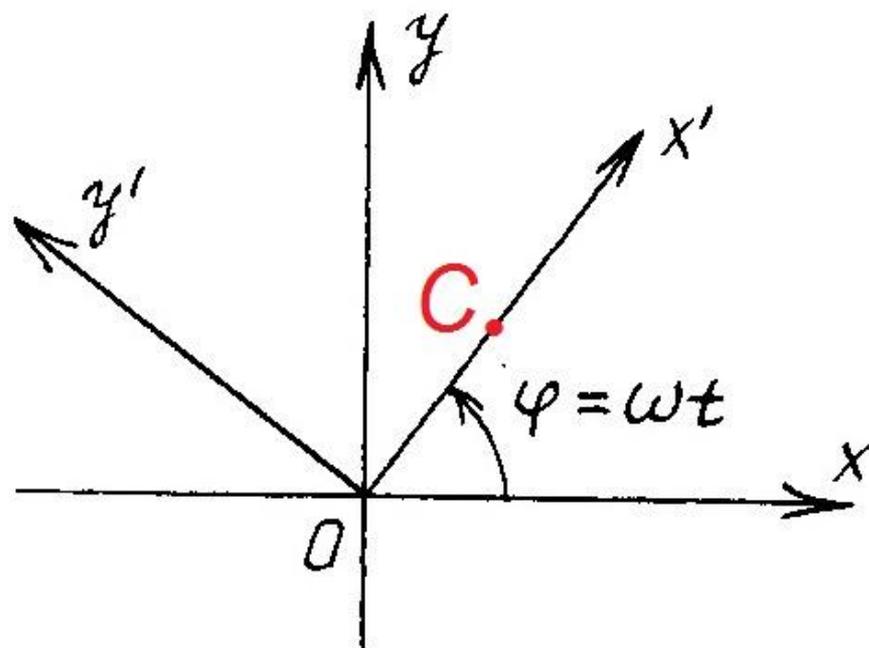
Ответ:  $\omega_a = 6\pi^2$  м/с<sup>2</sup>,  $\omega_c = 0$ .

23.12(23.12). Струя воды течет по го-

К задаче 23.11



$$x' = 0,1 + 0,05 \sin 8\pi t$$



**№ 23.11.** Система  $S'$  (связанная с регулятором) вращается относительно системы  $S$ , причем  $O = O'$  и  $Oz = Oz'$  – ось вращения системы  $S'$ . В начальный момент системы совпадают.

Уравнение  $x' = 0,1 + 0,05 \sin 8\pi t$  – закон движения точки  $C$  (центра масс правой гири) по оси  $Ox'$ ;

$\omega = 6\pi$  (рад/с) – угловая скорость вращения системы  $S'$ .

- Найти :**
- 1)  $w_{кор}$  – кориолисово ускорение точки  $C$ ,
  - 2) момент  $t_1$ , в который  $|w_{кор}|$  достигает максимума,
  - 3)  $w_{абс}(t_1)$  – абсолютное ускорение точки  $C$  в момент  $t_1$ ,
  - 4) значения  $|w_{кор}|$  при крайних положениях гири.

## *Решение.*

Матрица перехода от  $S$  к  $S'$  имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор  $r'_{OC}$  – координатный вектор точки  $C$  в  $S'$ ,

$$r'_{OC} = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 + 0,05 \sin 8\pi t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1) Найдем  $w_{кор}$  – кориолисово ускорение точки  $C$ :

$$w_{кор} = 2\dot{D}\dot{r}'_{OC} = 2\omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t & 0 \\ \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\omega \dot{x}' \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} =$$

1) Найдем  $w_{кор}$  – кориолисово ускорение точки  $C$ :

$$w_{кор} = 2\dot{D}\dot{r}'_{OC} = 2\omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t & 0 \\ \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\omega \dot{x}' \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= 12\pi \cdot 0,05 \cdot 8\pi \cos 8\pi t \begin{pmatrix} -\sin 6\pi t \\ \cos 6\pi t \\ 0 \end{pmatrix} = 4,8\pi^2 \cos 8\pi t \begin{pmatrix} -\sin 6\pi t \\ \cos 6\pi t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда  $|w_{кор}| = 4,8\pi^2 |\cos 8\pi t|$ .

2) Найдем момент  $t_1$ , в который  $|w_{кор}|$  достигает максимума:

$$|w_{кор}(t_1)| = \max |w_{кор}(t)| = 4,8\pi^2 \cdot \max |\cos 8\pi t|.$$

Очевидно, что максимум достигается, когда  $|\cos 8\pi t| = 1$ .

Поэтому в качестве  $t_1$  можно взять начальный момент времени:

$$t_1 = 0.$$

3) Найдем  $w_{a\acute{o}c}(t_1)$  – абсолютное ускорение точки  $C$  в момент  $t_1 = 0$ . Для этого воспользуемся теоремой о сложении

скоростей и ускорений:  $w_{a\acute{o}c} = w_{nep} + w_{отн} + w_{кор}$ .

$$w_{nep} = \ddot{D}r'_{OC} = \omega^2 \begin{pmatrix} -\cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & -\cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega^2 x' \begin{pmatrix} -\cos \omega t \\ -\sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_{nep}(0) = -3,6\pi^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$w_{nep}(0) = -3,6\pi^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$w_{отн} = D\ddot{r}'_{OC} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -3,2\pi^2 \sin 8\pi t \begin{pmatrix} \cos 6\pi t \\ \sin 6\pi t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_{отн}(0) = 0; \quad w_{кор}(0) = 4,8\pi^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Итак,  $w_{абс}(0) = w_{nep}(0) + w_{отн}(0) + w_{кор}(0) =$

$$= \begin{pmatrix} -3,6\pi^2 \\ 4,8\pi^2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,2\pi^2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad |w_{абс}(0)| = 6\pi^2 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

4) Найдем значения  $|w_{кор}|$  при крайних положениях гири.

Крайним положениям правой гири соответствуют максимальное и минимальное значения функции  $x' = 0,1 + 0,05 \sin 8\pi t$ , которые

достигаются в моменты времени  $t_{\max}(n) = \frac{1}{16} + \frac{n}{4}$  (секунд) и

$t_{\min}(n) = \frac{3}{16} + \frac{n}{4}$  (секунд) соответственно. В каждом из этих

случаев  $w_{кор} = 0$ .

# Подготовка к Контрольной работе

1. Точка движется по радиусу диска от центра к фиксированной точке на границе со скоростью  $v_0$ . Найти ее кориолисово и абсолютное ускорения, если диск вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

2. Задача N 12.2 из задачника Мещерского.

3. Искусственный спутник обращается вокруг Земли на высоте 500 км по круговой орбите. Определить время обращения и скорость спутника, если известно, что его центростремительное ускорение должно быть равно ускорению свободно падающего тела.

На данной высоте  $g = 8,5 \text{ м/с}^2$ , а радиус Земли  $R \approx 6370 \text{ км}$ .

4. Точка движется по окружности радиусом  $R$  равноускоренно из состояния покоя и совершает первый полный оборот за  $T$  сек. Определить величины скорости и ускорения точки в конце этого промежутка времени.

