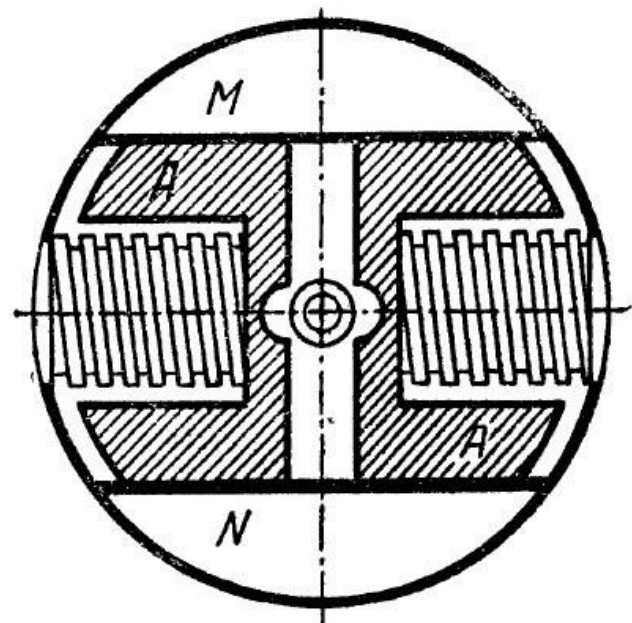


Теоретическая механика

Задачи

Сложение ускорений

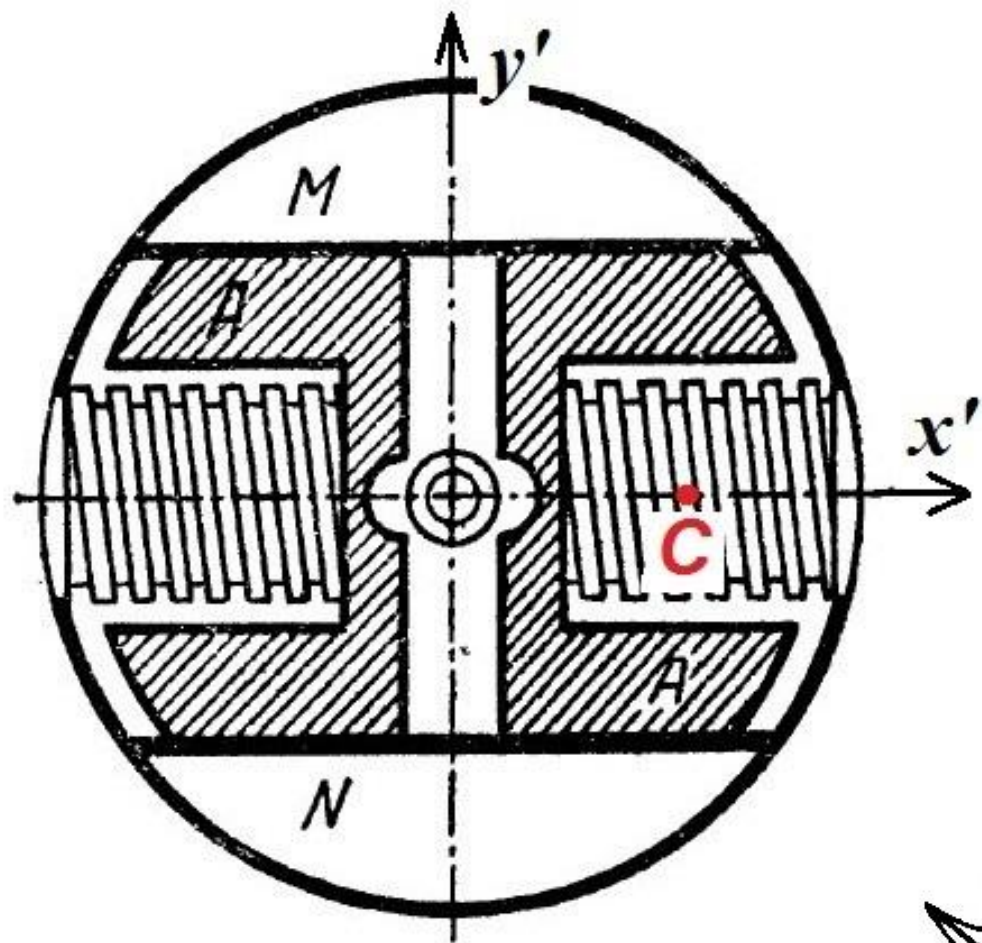
23.11(23.11). В регуляторе, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 6\pi$ рад/с, тяжелые гири A , прикрепленные к концам пружины, совершают гармонические колебания вдоль паза MN таким образом, что расстояние их центров тяжести от оси вращения изменяется по закону $x = (0,1 + 0,05 \sin 8\pi t)$ м. Определить ускорение центра тяжести гири в момент, когда кориолисово ускорение достигает максимального значения, и указать значение кориолисова ускорения при крайних положениях гири.



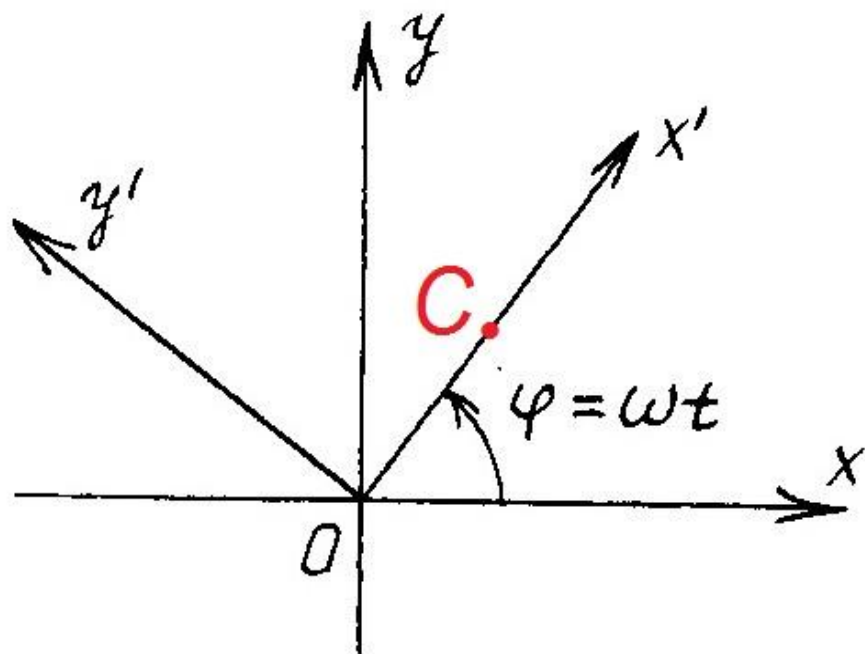
К задаче 23.11

Ответ: $\omega_a = 6\pi^2$ м/с², $\omega_c = 0$.

23.12(23.12). Струя воды течет по го-



$$x' = 0,1 + 0,05 \sin 8\pi t$$



№ 23.11. Система S' (связанная с регулятором) вращается относительно системы S , причем $O = O'$ и $Oz = Oz'$ – ось вращения системы S' . В начальный момент системы совпадают.

Уравнение $x' = 0,1 + 0,05 \sin 8\pi t$ – закон движения точки C (центра масс правой гири) по оси Ox' ;

$\omega = 6\pi$ (рад/с) – угловая скорость вращения системы S' .

- Найти :**
- 1) $w_{кор}$ – кориолисово ускорение точки C ,
 - 2) момент t_1 , в который $|w_{кор}|$ достигает максимума,
 - 3) $w_{абс}(t_1)$ – абсолютное ускорение точки C в момент t_1 ,
 - 4) значения $|w_{кор}|$ при крайних положениях гири.

Решение.

Матрица перехода от S к S' имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор r'_{OC} – координатный вектор точки C в S' ,

$$r'_{OC} = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 + 0,05 \sin 8\pi t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1) Найдем $w_{кор}$ – кориолисово ускорение точки C :

$$w_{кор} = 2\dot{D}r'_{OC} = 2\omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t & 0 \\ \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\omega \dot{x}' \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} =$$

1) Найдем $w_{кор}$ – кориолисово ускорение точки C :

$$w_{кор} = 2\dot{D}\dot{r}'_{OC} = 2\omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t & 0 \\ \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\omega \dot{x}' \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= 12\pi \cdot 0,05 \cdot 8\pi \cos 8\pi t \begin{pmatrix} -\sin 6\pi t \\ \cos 6\pi t \\ 0 \end{pmatrix} = 4,8\pi^2 \cos 8\pi t \begin{pmatrix} -\sin 6\pi t \\ \cos 6\pi t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $|w_{кор}| = 4,8\pi^2 |\cos 8\pi t|$.

2) Найдем момент t_1 , в который $|w_{кор}|$ достигает максимума:

$$|w_{кор}(t_1)| = \max |w_{кор}(t)| = 4,8\pi^2 \cdot \max |\cos 8\pi t|.$$

Очевидно, что максимум достигается, когда $|\cos 8\pi t| = 1$.

Поэтому в качестве t_1 можно взять начальный момент времени:

$$t_1 = 0.$$

3) Найдем $w_{a\acute{o}c}(t_1)$ – абсолютное ускорение точки C в момент $t_1 = 0$. Для этого воспользуемся теоремой о сложении

скоростей и ускорений: $w_{a\acute{o}c} = w_{nep} + w_{отн} + w_{кор}$.

$$w_{nep} = \ddot{D}r'_{OC} = \omega^2 \begin{pmatrix} -\cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & -\cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega^2 x' \begin{pmatrix} -\cos \omega t \\ -\sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_{nep}(0) = -3,6\pi^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$w_{nep}(0) = -3,6\pi^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$w_{отн} = D\ddot{r}'_{OC} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -3,2\pi^2 \sin 8\pi t \begin{pmatrix} \cos 6\pi t \\ \sin 6\pi t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_{отн}(0) = 0; \quad w_{кор}(0) = 4,8\pi^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, $w_{абс}(0) = w_{nep}(0) + w_{отн}(0) + w_{кор}(0) =$

$$= \begin{pmatrix} -3,6\pi^2 \\ 4,8\pi^2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,2\pi^2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad |w_{абс}(0)| = 6\pi^2 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

4) Найдем значения $|w_{кор}|$ при крайних положениях гири.

Крайним положениям правой гири соответствуют максимальное и минимальное значения функции $x' = 0,1 + 0,05 \sin 8\pi t$, которые

достигаются в моменты времени $t_{\max}(n) = \frac{1}{16} + \frac{n}{4}$ (секунд) и

$t_{\min}(n) = \frac{3}{16} + \frac{n}{4}$ (секунд) соответственно. В каждом из этих

случаев $w_{кор} = 0$.

Подготовка к Контрольной работе

1. Точка движется по радиусу диска от центра к фиксированной точке на границе со скоростью v_0 . Найти ее кориолисово и абсолютное ускорения, если диск вращается с постоянной угловой скоростью ω .

2. Задача N 12.2 из задачника Мещерского.

3. Искусственный спутник обращается вокруг Земли на высоте 500 км по круговой орбите. Определить время обращения и скорость спутника, если известно, что его центростремительное ускорение должно быть равно ускорению свободно падающего тела.

На данной высоте $g = 8,5 \text{ м/с}^2$, а радиус Земли $R \approx 6370 \text{ км}$.

4. Точка движется по окружности радиусом R равноускоренно из состояния покоя и совершает первый полный оборот за T сек. Определить величины скорости и ускорения точки в конце этого промежутка времени.

