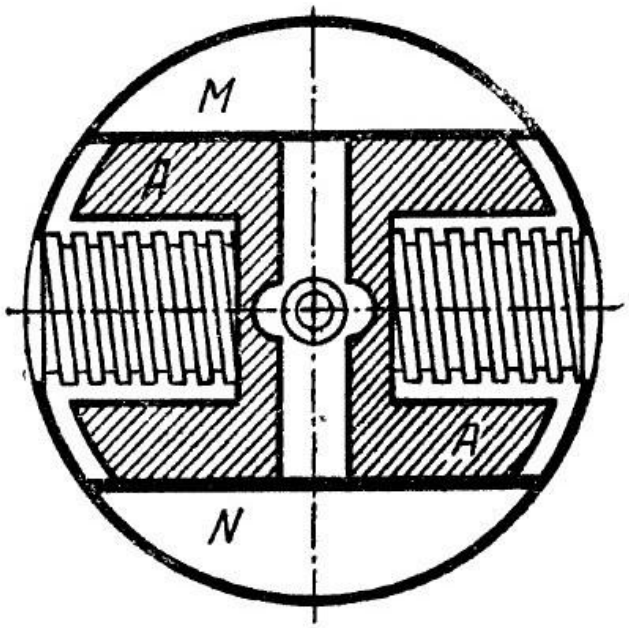
Теоретическая механика

Задачи

Сложение ускорений

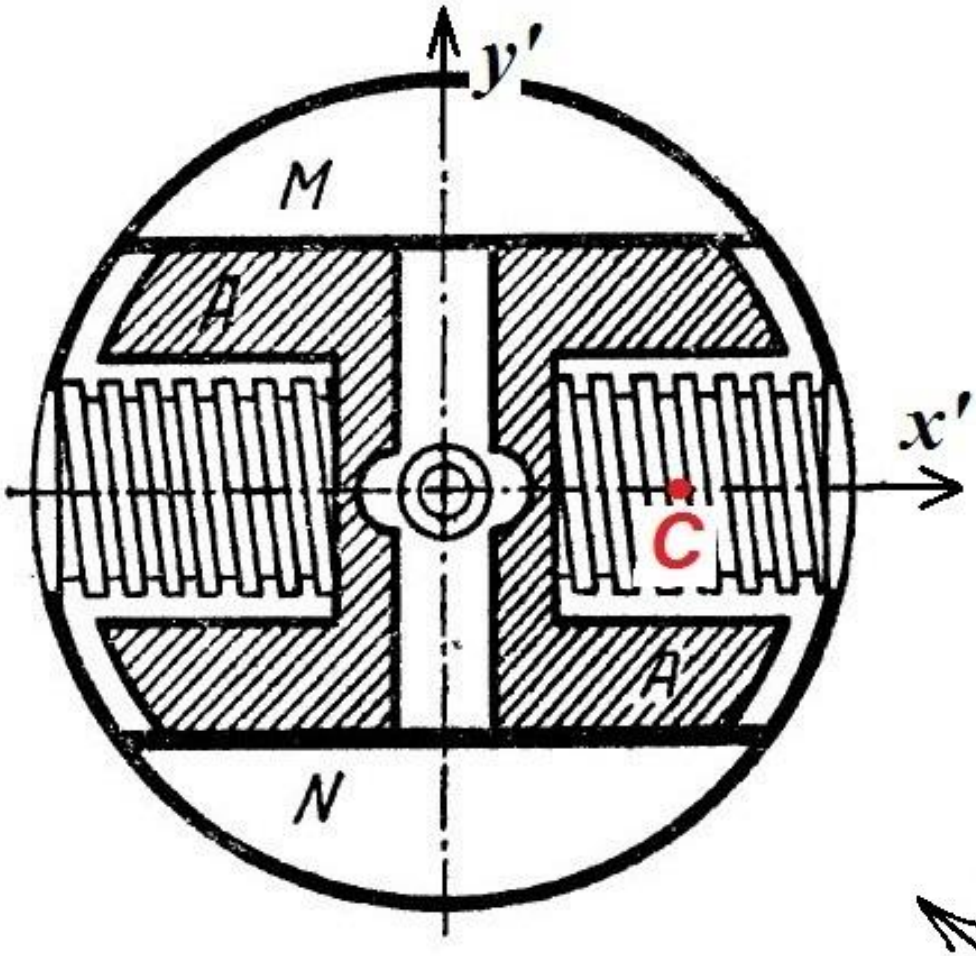
23.11(23.11). В регуляторе, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 6\pi$ рад/с, тяжелые гири A, прикрепленные к концам пружины, совершают гармонические колебания вдоль паза MN таким образом, что расстояние их центров тяжести от оси вращения изменяются по закону $x = (0{,}1 + 0{,}05 \sin 8\pi t)$ м. Определить ускорение центра тяжести гири в момент, когда кориолисово ускорение достигает максимального значения, и указать значение кориолисова ускорения при крайних положениях гири.



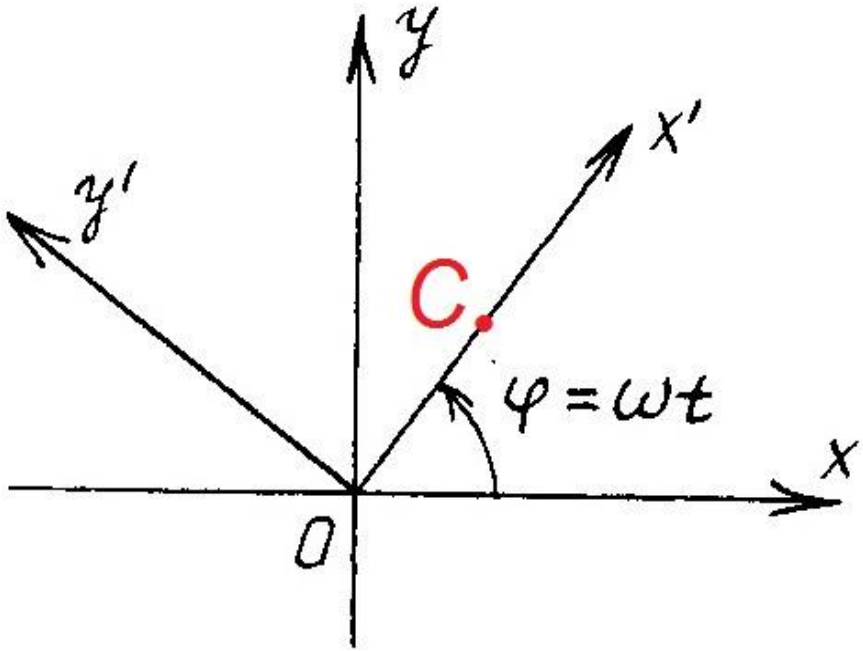
К задаче 23.11

Ответ: $w_a = 6\pi^2$ м/с^2, $w_c = 0$.

23.12(23.12). Струя воды течет по го-



$$x' = 0{,}1 + 0{,}05\sin 8\pi t$$



№ 23.11. Система S' (связанная с регулятором) вращается относительно системы S, причем $O = O'$ и $Oz = Oz'$ – ось вращения системы S'. В начальный момент системы совпадают.

Уравнение $x' = 0{,}1 + 0{,}05\sin 8\pi t$ – закон движения точки C (центра масс правой гири) по оси Ox';

$\omega = 6\pi$ (рад/с) – угловая скорость вращения системы S'.

Найти : 1) $w_{кор}$ – кориолисово ускорение точки C,

2) момент t_1, в который $|w_{кор}|$ достигает максимума,

3) $w_{абс}(t_1)$ – абсолютное ускорение точки C в момент t_1,

4) значения $|w_{кор}|$ при крайних положениях гири.

Решение.

Матрица перехода от S к S' имеет вид

$$D=\begin{pmatrix}\cos\omega t & -\sin\omega t & 0\\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Вектор r'_{OC} – координатный вектор точки C в S',

$$r'_{OC}=\begin{pmatrix}x'\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}1+0{,}05\sin 8\pi t\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

1) Найдем $w_{кор}$ – кориолисово ускорение точки C:

$$w_{кор}=2\dot{D}\dot{r}'_{OC}=2\omega\begin{pmatrix}-\sin\omega t & -\cos\omega t & 0\\ \cos\omega t & -\sin\omega t & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}'\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=2\omega\dot{x}'\begin{pmatrix}-\sin\omega t\\ \cos\omega t\\ 0\end{pmatrix}=$$

1) Найдем $w_{кор}$ – кориолисово ускорение точки C:

$$w_{кор} = 2\dot{D}\dot{r}'_{OC} = 2\omega \begin{pmatrix} -\sin\omega t & -\cos\omega t & 0 \\ \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\omega\dot{x}' \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 12\pi \cdot 0{,}05 \cdot 8\pi \cos 8\pi t \begin{pmatrix} -\sin 6\pi t \\ \cos 6\pi t \\ 0 \end{pmatrix} = 4{,}8\pi^2 \cos 8\pi t \begin{pmatrix} -\sin 6\pi t \\ \cos 6\pi t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $|w_{кор}| = 4{,}8\pi^2 |\cos 8\pi t|$.

2) Найдем момент t_1, в который $|w_{кор}|$ достигает максимума:

$$|w_{кор}(t_1)| = \max |w_{кор}(t)| = 4{,}8\pi^2 \cdot \max |\cos 8\pi t|.$$

Очевидно, что максимум достигается, когда $|\cos 8\pi t| = 1$. Поэтому в качестве t_1 можно взять начальный момент времени:

$$t_1 = 0.$$

3) Найдем $w_{абс}(t_1)$ – абсолютное ускорение точки C в момент $t_1 = 0$. Для этого воспользуемся теоремой о сложении скоростей и ускорений : $w_{абс} = w_{пер} + w_{отн} + w_{кор}$.

$$w_{пер} = \ddot{D}r'_{OC} = \omega^2 \begin{pmatrix} -\cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & -\cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega^2 x' \begin{pmatrix} -\cos\omega t \\ -\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_{пер}(0) = -3,6\pi^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$w_{пер}(0) = -3,6\pi^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$w_{отн} = D\ddot{r}'_{OC} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -3,2\pi^2 \sin 8\pi t \begin{pmatrix} \cos 6\pi t \\ \sin 6\pi t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_{отн}(0) = 0; \qquad w_{кор}(0) = 4,8\pi^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, $w_{абс}(0) = w_{пер}(0) + w_{отн}(0) + w_{кор}(0) =$

$$= \begin{pmatrix} -3,6\pi^2 \\ 4,8\pi^2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,2\pi^2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad |w_{абс}(0)| = 6\pi^2 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

4) Найдем значения $|w_{кор}|$ при крайних положениях гири.

Крайним положениям правой гири соответствуют максимальное и минимальное значения функции $x' = 0{,}1 + 0{,}05\sin 8\pi t$, которые достигаются в моменты времени $t_{\max}(n) = \frac{1}{16} + \frac{n}{4}$ (секунд) и $t_{\min}(n) = \frac{3}{16} + \frac{n}{4}$ (секунд) соответственно. В каждом из этих случаев $w_{кор} = 0$.

Подготовка к Контрольной работе

1. Точка движется по радиусу диска от центра к фиксированной точке на границе со скоростью v_0. Найти ее кориолисово и абсолютное ускорения, если диск вращается с постоянной угловой скоростью ω.

2. Задача N 12.2 из задачника Мещерского.

3. Искусственный спутник обращается вокруг Земли на высоте 500 *км* по круговой орбите. Определить время обращения и скорость спутника, если известно, что его центростремительное ускорение должно быть равно ускорению свободно падающего тела.

На данной высоте $g = 8,5\ м/с^2$, а радиус Земли $R \approx 6370\ км$.

4. Точка движется по окружности радиусом R равноускоренно из состояния покоя и совершает первый полный оборот за T *сек*. Определить величины скорости и ускорения точки в конце этого промежутка времени.