ЛЕММА МАРКОВА И НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА ПРИ ОЦЕНИВАНИИ РИСКА

Выполнила: Буй Тхи Тхао Хыонг
Группа: 2410

Оценка риска с помощью леммы Маркова

- Лемма Маркова гласит:

Если случайная величина X не принимает отрицательных значений, то для любого положительного числа α справедливо следующее неравенство:

$$P\ (X > \alpha) \leq \frac{M\ (x)}{\alpha}$$

где M (x) – математическое ожидание, то есть среднее значение случайной величины;

X – любая случайная величина.

Пример

Покупатель просит поставщика отпустить продукцию без предоплаты, т.е. в долг. Чему равна вероятность того, что поставщик получит оплату отпущенной продукции вовремя и не понесет потерь, если известно, что продолжительное время коэффициент текущей ликвидности (КТЛ) покупателя находился на среднем уровне, равном 1.8? На какую минимальную прибыль должен рассчитывать поставщик, чтобы признать сделку целесообразной?

Решение

- При той информации, что здесь имеется, для оценки вероятности возврата долга можно использовать лишь лемму Маркова либо попытаться оценить упомянутую вероятность чисто субъективно. Первый вариант на вопрос о вероятности возврата долга дает такой ответ:

$$P(X > 2) = \frac{1{,}8}{2} = 0{,}9$$

т.е. вероятность возврата долга менее 90%, а потерь как минимум 10%. При таком риске потерь следует заключать сделку только в том случае, если она принесет прибыль более

$$\frac{100}{\;} - 100 = 11{,}11\%$$

Решение

- Последнее равенство получено из следующих соображений. Пусть долг выдан в размере P. Тогда математическое ожидание величины возврата долга равно , т.е. меньше выданной суммы. Чтобы матожидание возвращенной суммы хотя бы равнялось P, нужно выдать долг под некоторый процент x. Тогда приравнивая матожидание возвращенной суммы выданной сумме P получаем уравнение

$$\left(P + \frac{x}{100} \cdot P\right) \cdot 0{,}9 + 0 \cdot 0{,}1 = P$$

Откуда получаем, что

$$x = \frac{100}{\quad} - 100 = 11{,}11\%$$

Решение

В качестве величины а здесь был взят тот порог, который отделяет платежеспособные предприятия от неплатежеспособных и которым согласно постановлению Правительства РФ от 20 мая 1994 г. № 498 «О некоторых мерах по реализации законодательства о несостоятельности предприятий» является КТЛ > 2. Значит, чтобы отдать долги поставщику, покупатель должен будет повысить значение КТЛ до 2.

Лемма Маркова может быть использована и тогда, когда математическое ожидание имеет вид не обычной средней величины, а ее доли. Пример такого использования леммы Маркова приводится ниже.

Оценка риска с помощью неравенства Чебышева

- Неравенство Чебышева имеет такой вид:

$$P(|x - \bar{x}| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Оно позволяет находить верхнюю границу вероятности того, что случайная величина X отклонится в обе стороны от своего среднего значения на величину больше ε . Эта вероятность равна или меньше, чем $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

Если нас интересует вероятность отклонения только в одну сторону, например, в большую, то вышеприведенное неравенство Чебышева надо было бы записать так:

Пример

У банка имеются два должника, значения КТЛ у которых за три прошедших месяца составили: у первого -1.5, 1.3 и 1.7 и у второго - 1.6, 1.4 и 1.5. Какова вероятность того, что они в течение ближайшего месяца погасят свои долги перед банком?

Решение

- Среднее значение КТЛ у обоих должников равно одной и той же величине: 1.5. В силу этого лемма Маркова здесь показала бы совершенно одинаковую вероятность погашения долга у двух должников:

$$P(X \geq 2) \leq \frac{1,5}{2} = 0,75$$

, т.е. менее 75 %.

Вероятность же невозврата долга у обоих но лемме Маркова здесь составила бы как минимум 25%.

Решение

- Неравенство же Чебышева даст разные значения этих вероятностей для упомянутых должников, ибо оно кроме среднего уровня КТЛ учитывает еще и его колеблемость, которая у первого больше, чем у второго, что видно по величине дисперсий:

$$\sigma_1^2 = \frac{(1{,}5 - 1{,}5)^2 + (1{,}3 - 1{,}5)^2 + (1{,}7 - 1{,}5)^2}{3} = 0{,}0267$$

$$\sigma_2^2 = \frac{(1{,}5 - 1{,}5)^2 + (1{,}4 - 1{,}5)^2 + (1{,}5 - 1{,}5)^2}{3} = 0{,}0067$$

Упомянутые должники погасят свой долг перед банком, если восстановят свою платежеспособность, т.е. повысят свой КТЛ до уровня 2. Для этого он у них должен будет отклониться в

Решение

- Вероятность такого отклонения в обе стороны по неравенству Чебышева равна:

  для первого должника:

$$P(|x-1{,}5|>0{,}5)\le\frac{0{,}0267}{0{,}5^2}=0{,}1068$$

  для второго:

$$P(|x-1{,}5|>0{,}5)\le\frac{0{,}0067}{0{,}5^2}=0{,}0268$$

  Как уже отмечалось, нужна вероятность отклонения только в одну – большую сторону. Она составит для первого должника меньше 10.68% / 2 = 5.34%; для второго 2.68% / 2 = 1.34%

Решение

- Вероятность такого отклонения в обе стороны по неравенству Чебышева равна:

$$1\colon P(|x-1{,}5|>0{,}5)\le\frac{0{,}0267}{0{,}5^2}=0{,}1068$$

$$2\colon P(|x-1{,}5|>0{,}5)\le\frac{0{,}0067}{0{,}5^2}=0{,}0268$$

Как уже отмечалось, нужна вероятность отклонения только в одну – большую сторону. Она составит для первого должника меньше 10.68% / 2 = 5.34%; для второго должника меньше 2.68% : 2=1.34%. Таким образом, вероятность невозврата долга первым должником будет как минимум 100-5.34 = 94.66%, а вторым - как минимум 100 - 1.34 = =

Решение

Чем ниже колеблемость, тем выше, казалось бы, должна быть его надежность! В данном примере меньшая колеблемость КТЛ у второго должника говорит о его большей устойчивости в состоянии неплатежеспособности. Быть устойчивым неплательщиком – отнюдь не положительное качество. Поэтому и вероятность невозврата им долга оказалась выше. Если бы у него была меньшая колеблемость вблизи значения КТЛ, равного, например, 2.5, тогда все обстояло бы у него по-другому. Но он «застрял» на КТЛ куда меньше 2.

Решение

Большим достоинством леммы Маркова и неравенства Чебышева является то, что они пригодны для употребления при любом количестве наблюдений и любом законе распределения вероятностей.

Платой за отсутствие жестких ограничений является некоторая неопределенность оценок уровня вероятности, причем при использовании леммы Маркова она значительно больше, чем при применении неравенства Чебышева.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!