Тема 11.1 Основные элементы комбинаторики и бином Ньютона

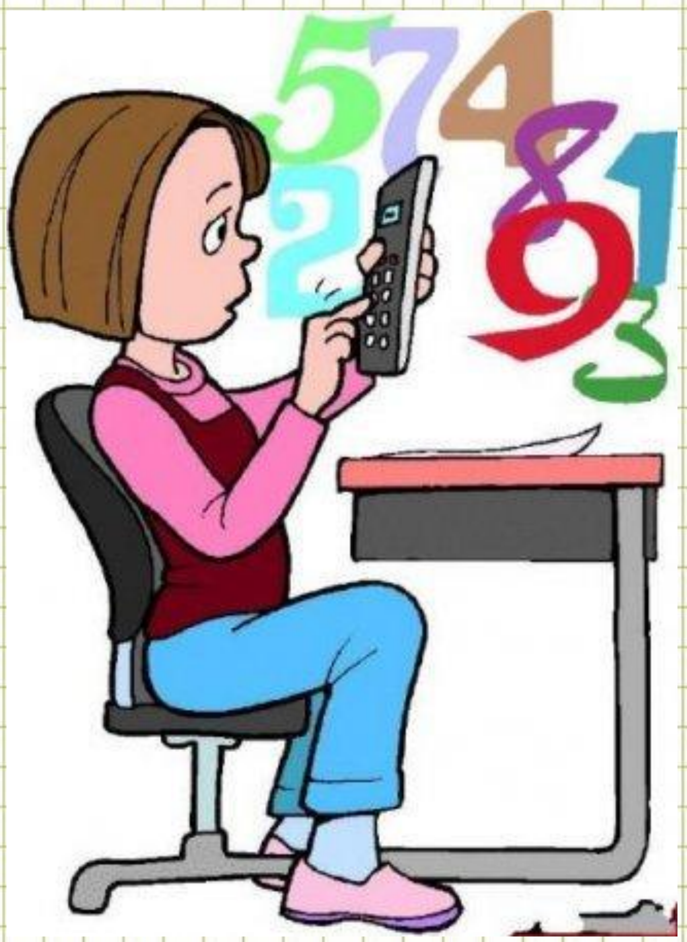
Цель

- изучить основные элементы комбинаторики- размещения, перестановки,.

План

- **Основные задачи комбинаторики**
- **Перестановки**
- **Размещения**

Самый простой метод решения комбинаторных задач – перебор всех возможных вариантов



- Подсчитать число однобуквенных слов русского языка.

  Ответ:10 (а, б, в, ж, и, к, о, с, у, я)

- Перечислить виды: 1)треугольников, 2)четырехугольников.

  Ответ:1)равносторонний, равнобедренный, разносторонний; остроугольный, прямоугольный, тупоугольный.

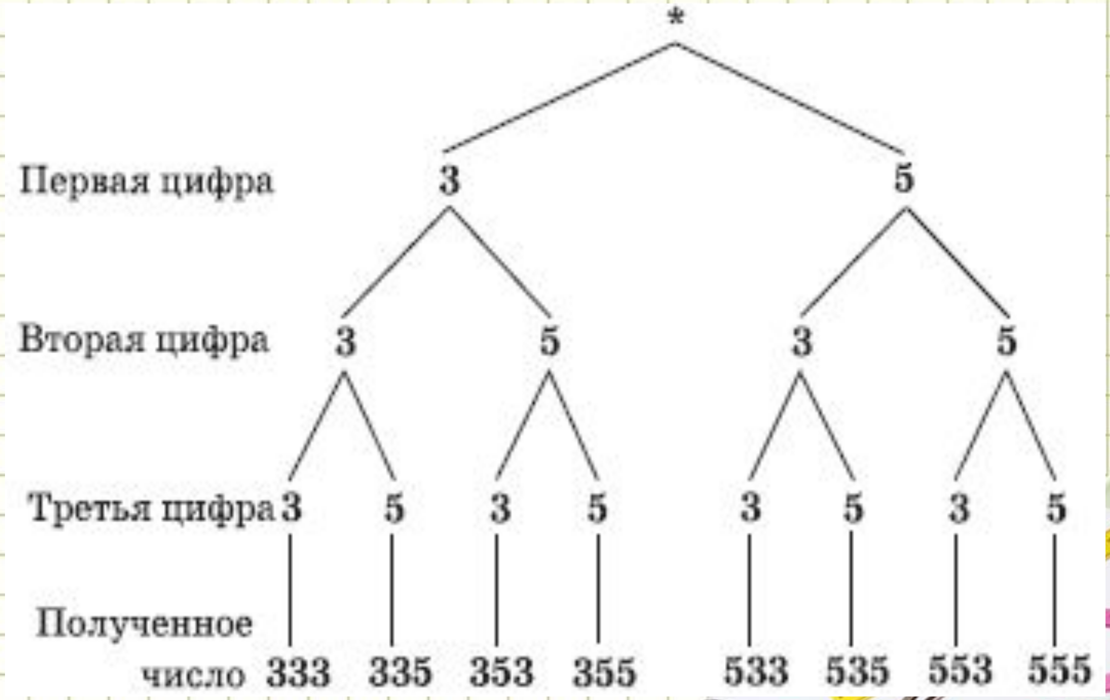
  2) параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция.

- В магазине продают бейсболки трех цветов: синие, красные и черные. Ваня и Андрей покупают себе по одной. Сколько существует различных вариантов покупки?

  Ответ:9 вариантов.

Полный перебор может осуществляться с помощью деревьев

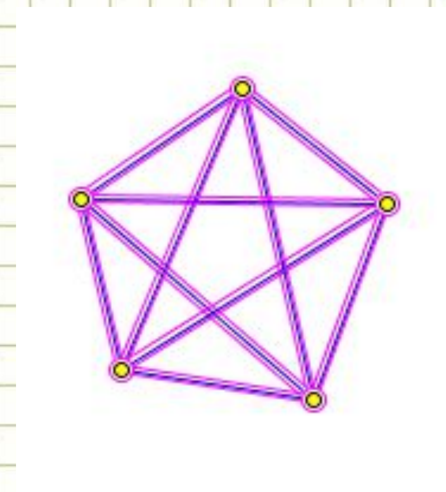
- С помощью цифр 3 и 5 записать все возможные трёхзначные числа (цифры могут повторяться).



Ответ: 8 чисел.

Полный перебор может осуществляться с помощью таблиц и графов

- Встретились пятеро, каждый пожал другому руку. Сколько было рукопожатий?



Ответ:10.

- С помощью таблицы вариантов перечислить все возможные двухбуквенные коды, в которых используются буквы: x,y,z.

	x	**y**	**z**
x	xx	xy	xz
y	yx	yy	yz
z	zx	zy	zz

Ответ: 9.

Задача.

В футбольном турнире участвуют несколько команд. Оказалось, что все они для трусов и футболок использовали белый, красный, синий, зеленый или жёлтый цвет, причем были использованы все возможные варианты. Сколько команд участвовали в турнире?

- При большом количестве имеющихся элементов полный перебор затруднителен. Правило произведения позволяет упростить подсчет числа определенных соединений.
- Сформулируем это правило.

Правило произведения

Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них имеется m вариантов выбора второго элемента, то существует $n \cdot m$ различных пар с выбранными первым и вторым элементами.

Задача 1. Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 0,2,4,6,8 (цифры могут повторятся)?

Ответ: 4·5 = 20.

Задача 2. В кафе имеются 3 первых блюда, 5 вторых и 2 третьих. Сколькими способами посетитель кафе может выбрать обед, состоящий из первого, второго и третьего блюд?

Ответ: 3·5·2 = 30.

Задача 3. Пётр решил пойти на новогодний карнавал в костюме мушкетёра. В ателье проката ему предложили на выбор различные по цвету и фасону предметы: 5 пар брюк, 6 камзолов, 3 шляпы, 2 пары сапог. Сколько различных карнавальных костюмов он может составить из этих предметов?

Ответ: 5·6·3·2 = 180.

Основные задачи комбинаторики

- Основными задачами комбинаторики считаются следующие:
- составление упорядоченных множеств (перестановки);
- составление подмножеств данного множества (сочетания)
- составление упорядоченных подмножеств данного множества (размещения).

- Чтобы отличать задачи на подсчёт числа размещений от задач на подсчёт числа сочетаний, определим, важен или нет порядок в следующих выборках:

    а) судья хоккейного матча и его помощник;

    б) три ноты в аккорде;

    в) «Шесть человек останутся убирать класс!»

    г) две серии для просмотра из многосерийного фильма.

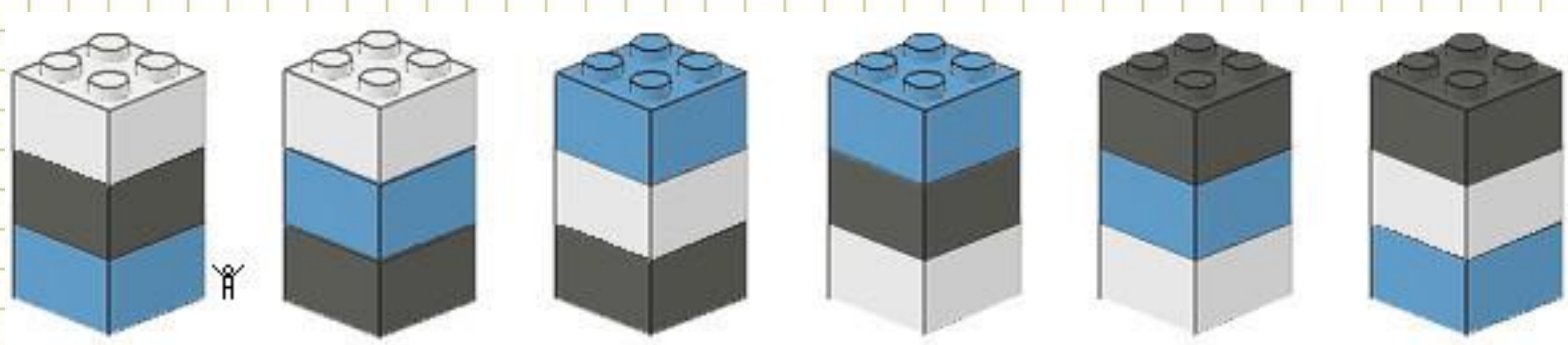
Ответ: а)да; б)нет; в)нет; г)да.

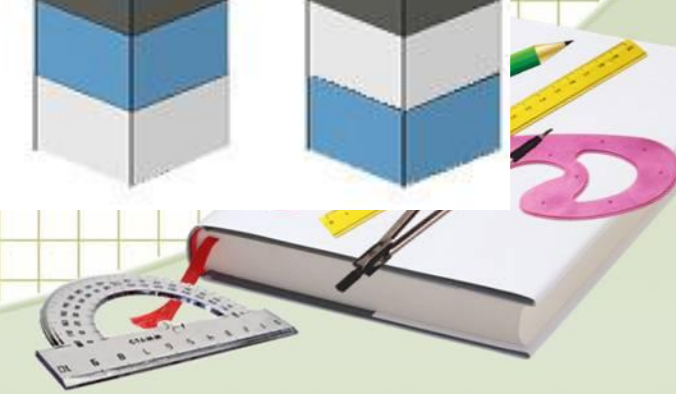
Перестановки

- **Перестановками из n элементов называются соединения, которые состоят из n элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения.**
- Permutation (фр.) – перестановка.
- **Задача.** Сколькими способами можно расположить в столбик три детали конструктора, различающиеся по цвету?

$$P_n = n!$$

$$P_n = n(n-1)(n-2) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$





Определение: **Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел обозначают n! и называют «эн факториал». Принято считать, что 0! = 1**

- Вычислить:

1) 7! 2) 8! 3) 6!-5! 4) $\frac{5!}{5}$

Задача.

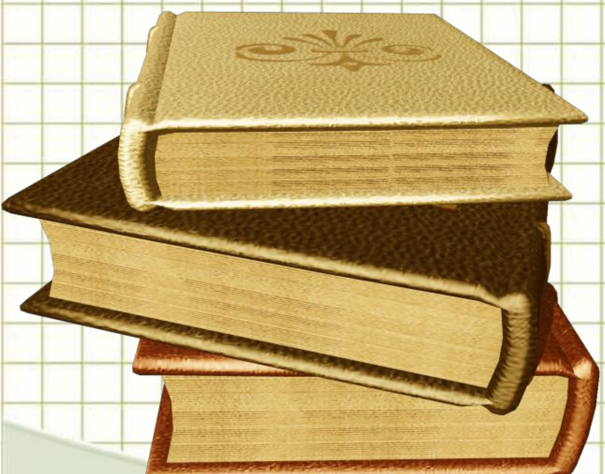
В семье – 6 человек, и за столом в кухне стоят 6 стульев. Семья решила каждый вечер, ужиная рассаживаться на эти стулья по – новому. Сколько дней члены семьи смогут осуществлять задуманное?

Задача.
Сколькими способами можно расставить на полке семь различных книг?

Решение:

Число таких способов равно числу перестановок из семи элементов,
т.е. $P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 7 =$

Ответ: 5040.



Задача.
Имеются 10 различных книг, три из которых – справочники. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все справочники стояли рядом?

Решение:
Т.к. в справочники должны стоять рядом, то будем рассматривать их как одну книгу. Тогда на полке надо расставить 10 – 3+1=8 книг. Это можно сделать P_8 способами. Для каждой из полученных комбинаций можно сделать P_3 перестановок справочников. Поэтому число способов расположения книг на полке равно произведению:
$P_8 \cdot P_3 = 8! \cdot 3! = 40320 \cdot 6 =$

Ответ: 241920.

Размещения

Число всех выборов n элементов из m данных ***с учётом их порядка*** называют **числом размещений** из m элементов по n. ($n \le m$)

Обозначают: A_m^n

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))$$

$$A_n^n = P_n = n!$$

Вычислить

$$\frac{A_{12}^{5}+A_{12}^{6}}{A_{12}^{4}}$$

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

$$\frac{A_{12}^{5}+A_{12}^{6}}{A_{12}^{4}} = \frac{\frac{12!}{7!}+\frac{12!}{6!}}{\frac{12!}{8!}} = \frac{8!}{7!}+\frac{8!}{6!} = 8+7\cdot 8 = 64$$

Задача. Решить уравнение: $A_n^2 = 42$

Решение: n≥ 2 . По формуле

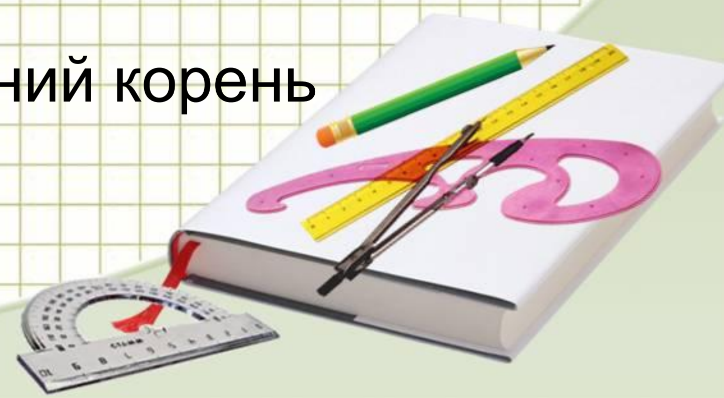
$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))$$

$$A_n^2 = n(n-1)$$

$$n(n-1) = 42$$

$$n^2 - n - 42 = 0$$

$n_1 = 7 \;\; u \;\; n_2 = -6$ - посторонний корень



Найти значение выражения :

1) $$\frac{A_{12}^{4} \cdot A_{7}^{7}}{A_{11}^{9}}$$

2) $$\frac{A_{13}^{3} - A_{10}^{2}}{A_{9}^{1}}$$

Решите уравнение:

$$A_{m}^{3} = 56m$$

$$A_{m}^{2} = 90$$

Размещения

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Задача 1. Сколькими способами можно изготовить трёхцветный флаг с горизонтальными полосами, если имеется материал 7 различных цветов?

Ответ: 210.

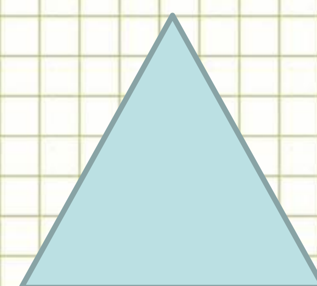
- **Задача 2.** Сколькими способами могут занять I, II, III места 8 участниц финального забега на дистанции 100 м?

Ответ: 336.

Задача 3. Из 30 участников собрания надо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 870.

Задача 4 . Сколькими способами можно обозначить вершины данного треугольника, используя буквы A,B,C,D,E,F?



$$A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Задача.

Сколько существует трехзначных чисел, в которых цифры различные и нечетные.

Решение:

Нечётных цифр пять: 1,3,5,7,9. Их надо разместить на три позиции. Поэтому количество искомых чисел равно числу размещения.

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Ответ: 60.

Задача : Из пяти шахматистов для участия в турнире нужно выбрать двоих. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Из пяти шахматистов можно составить пар A_5^2

Но из этих пар надо выбрать только те, которые различаются лишь составом участников, таких пар в 2 раза меньше, т.е.

$$\frac{A_5^2}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

При решении этой задачи из 5 человек были образованы пары – соединения по 2 человека, которые отличались друг от друга только составом.

Такие соединения называют сочетаниями.