

# Тема 11.1 Основные элементы комбинаторики и бином Ньютона



# Цель

- ИЗУЧИТЬ ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ- размещения, перестановки,.



# План

- **Основные задачи комбинаторики**
- **Перестановки**
- **Размещения**



# Самый простой метод решения комбинаторных задач – перебор всех возможных вариантов



- Подсчитать число однобуквенных слов русского языка.

Ответ: 10 (а, б, в, ж, и, к, о, с, у, я)

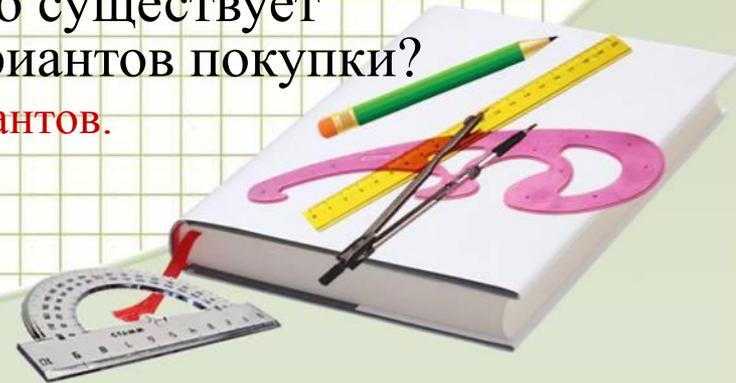
- Перечислить виды: 1)треугольников, 2)четырехугольников.

Ответ: 1)равносторонний, равнобедренный, разносторонний; остроугольный, прямоугольный, тупоугольный.

2) параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция.

- В магазине продают бейсболки трех цветов: синие, красные и черные. Ваня и Андрей покупают себе по одной. Сколько существует различных вариантов покупки?

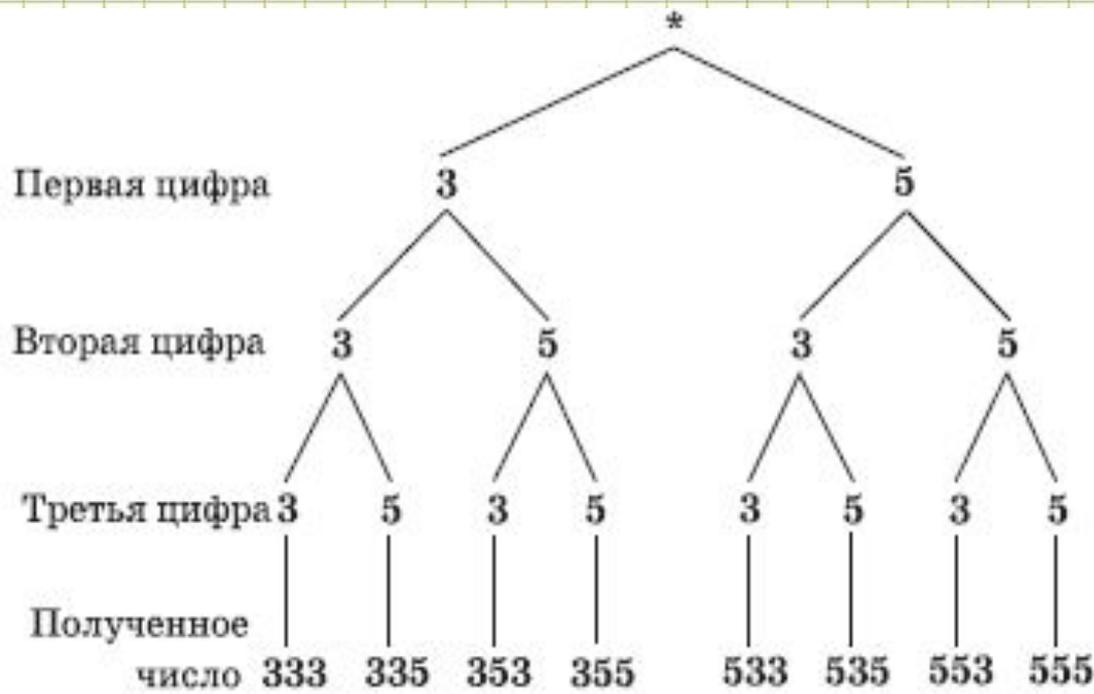
Ответ: 9 вариантов.



# Полный перебор может осуществляться с помощью деревьев

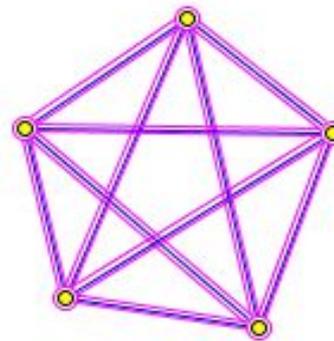
- С помощью цифр 3 и 5 записать все возможные трёхзначные числа (цифры могут повторяться).

Ответ: 8 чисел.



# Полный перебор может осуществляться с помощью таблиц и графов

- Встретились пятеро, каждый пожал другому руку. Сколько было рукопожатий?

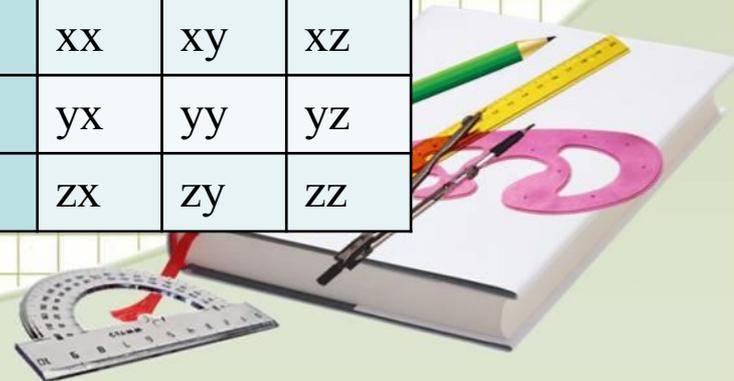


Ответ:10.

- С помощью таблицы вариантов перечислить все возможные двухбуквенные коды, в которых используются буквы: x,y,z.

	x	y	z
x	xx	xy	xz
y	yx	yy	yz
z	zx	zy	zz

Ответ: 9.



# Задача.

В футбольном турнире участвуют несколько команд. Оказалось, что все они для трусов и футболок использовали белый, красный, синий, зеленый или жёлтый цвет, причем были использованы все возможные варианты. Сколько команд участвовали в турнире?



- При большом количестве имеющихся элементов полный перебор затруднителен. Правило произведения позволяет упростить подсчет числа определенных соединений.
- Сформулируем это правило.

## **Правило произведения**

**Если существует  $n$  вариантов выбора первого элемента и для каждого из них имеется  $m$  вариантов выбора второго элемента, то существует  $n \cdot m$  различных пар с выбранными первым и вторым элементами.**



**Задача 1.** Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 0,2,4,6,8 (цифры могут повторяться)?

**Ответ:**  $4 \cdot 5 = 20$ .

**Задача 2.** В кафе имеются 3 первых блюда, 5 вторых и 2 третьих. Сколькими способами посетитель кафе может выбрать обед, состоящий из первого, второго и третьего блюд?

**Ответ:**  $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$ .

**Задача 3.** Пётр решил пойти на новогодний карнавал в костюме мушкетёра. В ателье проката ему предложили на выбор различные по цвету и фасону предметы: 5 пар брюк, 6 камзолов, 3 шляпы, 2 пары сапог. Сколько различных карнавальных костюмов он может составить из этих предметов?

**Ответ:**  $5 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 = 180$ .



# Основные задачи комбинаторики

- Основными задачами комбинаторики считаются следующие:
  - составление упорядоченных множеств (перестановки);
  - составление подмножеств данного множества (сочетания)
  - составление упорядоченных подмножеств данного множества (размещения).
  
- Чтобы отличать задачи на подсчёт числа размещений от задач на подсчёт числа сочетаний, определим, важен или нет порядок в следующих выборках:
  - а) судья хоккейного матча и его помощник;
  - б) три ноты в аккорде;
  - в) «Шесть человек останутся убирать класс!»
  - г) две серии для просмотра из многосерийного фильма.

Ответ: а)да; б)нет; в)нет; г)да.



# Перестановки

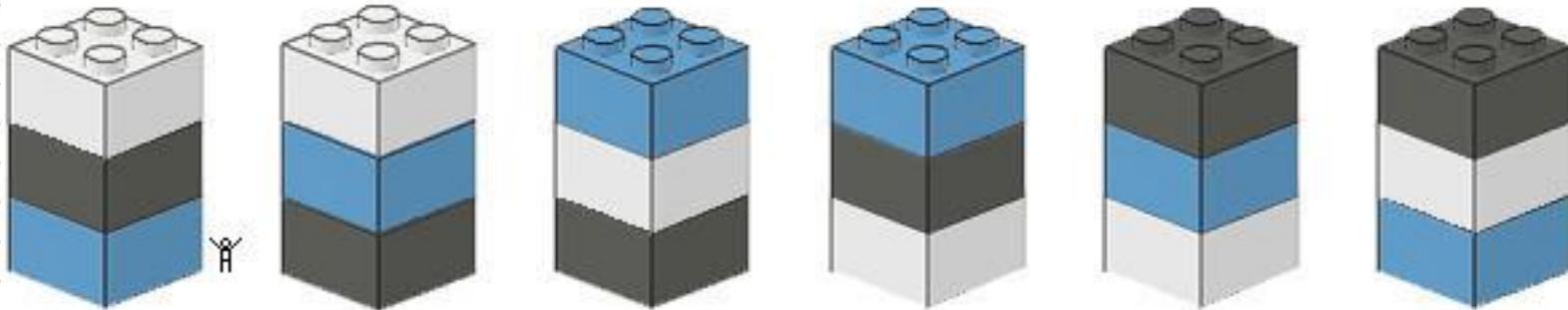
□ Перестановками из  $n$  элементов называются соединения, которые состоят из  $n$  элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения.

□ Permutation (фр.) – перестановка.

□ **Задача.** Сколькими способами можно расположить в столбик три детали конструктора, различающиеся по цвету?

$$P_n = n(n-1)(n-2) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$P_n = n!$$



**Определение:** Произведение подряд идущих первых  $n$  натуральных чисел обозначают  $n!$  и называют «эн факториал». Принято считать, что  $0! = 1$

- Вычислить:  
1)  $7!$     2)  $8!$     3)  $6! - 5!$     4)  $\frac{5!}{5}$

### **Задача.**

В семье – 6 человек, и за столом в кухне стоят 6 стульев. Семья решила каждый вечер, ужиная рассаживаться на эти стулья по – новому. Сколько дней члены семьи смогут осуществлять задуманное?



**Задача.**

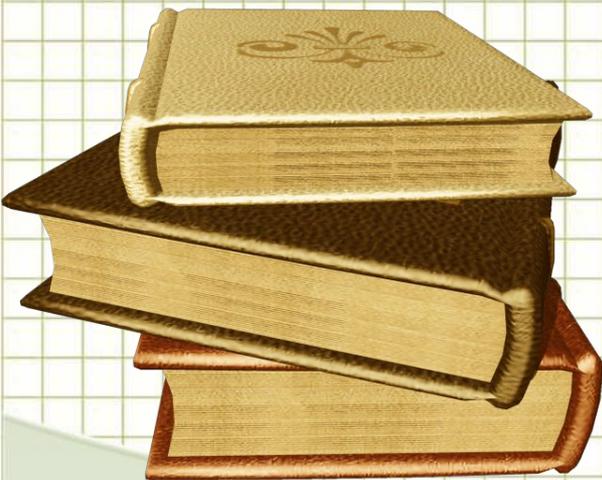
**Сколькими способами можно расставить на полке семь различных книг?**

**Решение:**

Число таких способов равно числу перестановок из семи элементов,

$$\text{т.е. } P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 7 =$$

**Ответ: 5040.**



## Задача.

Имеются 10 различных книг, три из которых – справочники. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все справочники стояли рядом?

## Решение:

Т.к. в справочники должны стоять рядом, то будем рассматривать их как одну книгу. Тогда на полке надо расставить  $10 - 3 + 1 = 8$  книг. Это можно сделать  $P_8$  способами. Для каждой из полученных комбинаций можно сделать  $P_3$  перестановок справочников. Поэтому число способов расположения книг на полке равно произведению:  
 $P_8 \cdot P_3 = 8! \cdot 3! = 40320 \cdot 6 =$

**Ответ: 241920.**



# Размещения

Число всех выборов  $n$  элементов из  $m$  данных *с учётом их порядка* называют **числом размещений** из  $m$  элементов по  $n$ .  
( $n \leq m$ )

Обозначают:  $A_m^n$

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

$$A_m^n = m(m-1)(m-2) \cdots (m-(n-1))$$

$$A_n^n = P_n = n!$$



Вычислить

$$\frac{A_{12}^5 + A_{12}^6}{A_{12}^4}$$

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

$$\frac{A_{12}^5 + A_{12}^6}{A_{12}^4} = \frac{\frac{12!}{7!} + \frac{12!}{6!}}{\frac{12!}{8!}} = \frac{8!}{7!} + \frac{8!}{6!} = 8 + 7 \cdot 8 = 64$$



Задача. Решить уравнение:  $A_n^2 = 42$

Решение:  $n \geq 2$ .

По формуле

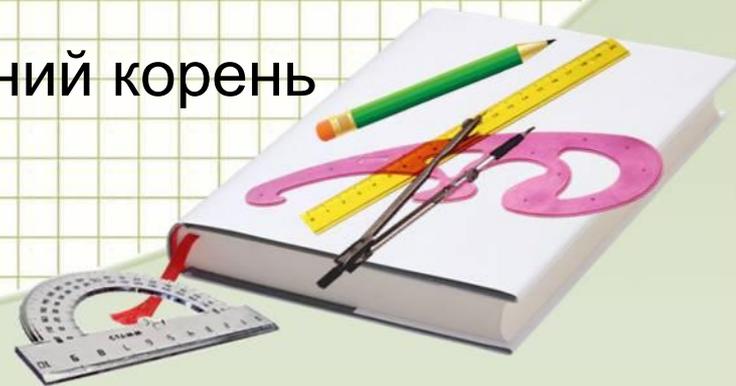
$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))$$

$$A_n^2 = n(n-1)$$

$$n(n-1) = 42$$

$$n^2 - n - 42 = 0$$

$n_1 = 7$  и  $n_2 = -6$  - посторонний корень



Найти значение выражения :

$$1) \frac{A_{12}^4 \cdot A_7^7}{A_{11}^9}$$

$$2) \frac{A_{13}^3 - A_{10}^2}{A_9^1}$$

Решите уравнение:

$$A_m^3 = 56m$$

$$A_m^2 = 90$$



# Размещения

**Задача 1.** Сколькими способами можно изготовить трёхцветный флаг с горизонтальными полосами, если имеется материал 7 различных цветов?

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

**Ответ: 210.**

• **Задача 2.** Сколькими способами могут занять I, II, III места 8 участниц финального забега на дистанции 100 м?

**Ответ: 336.**

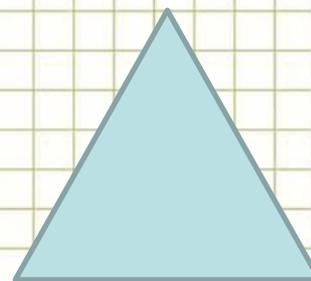


**Задача 3.** Из 30 участников собрания надо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

**Ответ: 870.**

**Задача 4 .** Сколькими способами можно обозначить вершины данного треугольника, используя буквы А,В,С,Д,Е,Ф?

$$A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$



$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$



## Задача.

Сколько существует трехзначных чисел, в которых цифры различные и нечетные.

## Решение:

Нечётных цифр пять: 1,3,5,7,9. Их надо разместить на три позиции. Поэтому количество искомых чисел равно числу размещения.

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Ответ: 60.



**Задача :** Из пяти шахматистов для участия в турнире нужно выбрать двоих. Сколькими способами это можно сделать?

**Решение:** Из пяти шахматистов можно составить пар  $A_5^2$   
Но из этих пар надо выбрать только те, которые различаются лишь составом участников, таких пар в 2 раза меньше, т.е.

$$\frac{A_5^2}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

При решении этой задачи из 5 человек были образованы пары – соединения по 2 человека, которые отличались друг от друга только составом.

Такие соединения называют **сочетаниями**.

