Обыкновенные дифференциальные уравнения 1 порядка

Классификация и решение

Однородные уравнения.

Определение. *Функция f(x, y) называется однородной n – го измерения относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:*

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y).$$

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$y'= f(x,y)$$

называется однородным, если его правая часть f(x, y) есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Сводится заменой $y = ux$ *к уравнению с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u*

Уравнения, приводящиеся к однородным.

Это класс уравнений, которые с помощью определенных подстановок могут приведены к однородным.

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

Если определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0,$ **то переменные могут быть разделены подстановкой**

$x = u+\alpha;$ $y = v+\beta;$ ***где α и β - решения системы уравнений***

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$$

В случае если в исходном уравнении вида

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right)$$

определитель $$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$$

то переменные могут быть разделены подстановкой

$$ax + by = t.$$

Линейные уравнения первого порядка

$$y' + P(x)\,y = 0$$

Этот тип дифференциальных уравнений называется линейным однородным (ЛОДУ1) и оно является уравнением с разделяющимися переменными. Поэтому

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \qquad \ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|; \qquad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx;$$

Общее решение: $y = Ce^{-\int P(x)dx}$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

$$y' + P(x)y = q(x)$$

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений (ЛНДУ1)

(q(x)≠0) применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли.

Суть метода заключается в том,

что искомая функция представляется в виде произведения двух функций

$$y = uv$$

При этом очевидно $y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$

Выполняем замену: $u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = q(x)$

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = q(x)$$

Далее следует важное замечание

первоначальная функция была представлена нами в виде произведения

Поэтому каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y = 2x^2$ **может быть представлена как**

$y = 1 \cdot 2x^2;$ $y = 2 \cdot x^2;$ $y = 2x \cdot x;$ ***и т.п.***

Выбор всегда направлен на простоту результата. Поэтому одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение в скобках будет равно нулю.

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0(*)$$

Таким образом, наше уравнение будет равносильно системе двух уравнений. Каждое из них - это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Первое уже получено. В него входит только ОДНА из новых функций и его можно решить по представленной выше схеме. При этом в записи решения произвольную постоянную добавлять не нужно, ведь мы искали не ВСЕ решения, а лишь ОДНУ функцию, именно ту, которая удовлетворяет поставленному условию.

Для нахождения второй неизвестной функции

подставим поученное выражение для функции и в исходное уравнение

$$u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+P(x)u\right)=q(x)$$

с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю
Получаем второе уравнение нашей системы.
Очевидно, найденную первую функцию нужно было выразить явно и в этом уравнении (снова с разделяющимися переменными!) останется лишь одна неизвестная.

$$u\frac{dv}{dx}=q(x)(**)$$

Окончательно получаем $$y=uv$$

Произвольная постоянная учитывается при записи одного из сомножителей

Метод Лагранжа.

Метод Лагранжа решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом вариации произвольной постоянной. Мы с вами встретимся с этим методом решая уравнения старших порядков

Вернемся к поставленной задаче: $y' + P(x)y = q(x)$

Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем.

$$y' + P(x)y = 0$$

Далее находится решение получившегося однородного дифференциального уравнения (его решают как уравнение с разделяющимися переменными):

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx}$$

Для того, чтобы найти соответствующее решение неоднородного дифференциального уравнения, будем считать постоянную C_1 некоторой функцией от х. Варьруем её, отсюда название «метод вариации»

Тогда по правилам дифференцирования произведения функций получаем:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} + C_1(x) e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x));$$

Подставляем полученное соотношение в исходное уравнение

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C_1(x)e^{-\int P(x)dx} = q(x)$$

Из полученного уравнения

$$\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} = q(x);$$

определим переменную функцию $C_1(x)$:

$$dC_1(x) = q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя уравнение с разделяющимися переменными, получаем:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$$

При выборе метода решения линейных дифференциальных уравнений следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

Совет: в своих работах использовать метод Бернулли

Пример. ***Решить уравнение*** $x^2 y' + y = 6x^2 e^{\frac{1}{x}}.$

Сначала приведем данное уравнение к стандартному виду:

$$y' + \frac{1}{x^2} y = 6e^{\frac{1}{x}}.$$

Применим полученную выше формулу для $P = \frac{1}{x^2}; \quad q = 6e^{\frac{1}{x}};$

$$y = e^{-\int \frac{1}{x^2} dx} \left(\int 6e^{\frac{1}{x}} e^{\int \frac{1}{x^2} dx} dx + C \right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}} \left(\int 6e^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} dx + C \right) = e^{\frac{1}{x}} \left(\int 6dx + C \right)$$

ОТВЕТ: **Общее решение** $y = e^{\frac{1}{x}} (6x + C).$

Уравнение Бернулли.

Определение. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + Py = q \cdot y^n,$$

где P и q – функции от x или постоянные числа, а n – постоянное число, не равное 1.

Для решения уравнения Бернулли используют 2 варианта:

1)можно применить метод Бернулли и решать аналогично ЛДУ1

2) сначала применяют подстановку

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}$$

с помощью которой, уравнение Бернулли приводится к линейному.

Для этого разделим исходное уравнение на y^n.

$$\frac{y'}{y^n} + P\frac{1}{y^{n-1}} = q$$

Применим подстановку, учтя, что $z' = -\frac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}} \cdot y' = -\frac{(n-1)y'}{y^n}$

$$-\frac{z'}{n-1} + Pz = q$$

$$z' - (n-1)Pz = -(n-1)q$$

Как видите, получилось линейное уравнение относительно неизвестной функции z.

Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ решается последовательным n-кратным интегрированием.

Умножаем обе части уравнения на dx: $y^{(n)}dx = f(x)dx$

Интегрируем: $\int y^{(n)}dx = \int f(x)dx$

Получаем уравнение (n-1)-го порядка:

$y^{(n-1)} = F_1(x) + C_1$, где $F_1(x)$ первообразная для f(x)

Снова умножаем обе части на dx и интегрируем:

$$y^{(n-2)} = \int (F_1(x) + C_1)dx$$

или

$$y^{(n-2)} = F_2(x) + C_1 x + C_2$$

и т.д.

Общее решение будет зависеть от n произвольных констант

Пример.

$$y''' = 60x^2 \quad \Big|\cdot dx$$

$$y'''dx = 60x^2 dx \Rightarrow \int y'''dx = \int 60x^2 dx$$

$$y'' = 60\int x^2 dx \Rightarrow y'' = 60\cdot\frac{x^3}{3} + C_1$$

$$y'' = 20x^3 + C_1 \quad \Big|\cdot dx \Rightarrow$$

$$y''dx = (20x^3 + C_1)dx \Rightarrow \int y''dx = \int (20x^3 + C_1)dx$$

$$y' = 5x^4 + C_1 x + C_2 \quad \Big|\cdot dx$$

$$y'dx = (5x^4 + C_1 x + C_2)dx \Rightarrow \int y'dx = \int (5x^4 + C_1 x + C_2)dx$$

$$y = x^5 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$