

Дискретные случайные величины

Цель занятия:

Познакомиться с понятием дискретной случайной величины, научиться составлять её закон распределения, вычислять числовые характеристики дискретной случайной величины.

Случайное событие, связанное с некоторым опытом, является качественной характеристикой опыта. Количественной же характеристикой результата проведенного опыта является случайная величина, к рассмотрению которой мы приступаем.

Определение 1. *Случайной* называется величина, которая в результате опыта принимает с определенной вероятностью то или иное значение , зависящее от исхода опыта.

**Обозначения случайных величин:
X, Y, Z,..., а их значений
соответственно: x, y, z, ...**

Пример 1. Игрок бросает монету – при выпадении герба он выигрывает 1 рубль, решки – проигрывает 1 рубль. Случайная величина X – выигрыш игрока будет принимать значения $+1$ или -1 в зависимости от того, чем закончится эксперимент – гербом или решкой.

Пример 2. Эксперимент – одновременное бросание двух игральных кубиков, случайная величина – сумма выпавших очков, может принимать все целые значения от 2 до 12 в зависимости от выпавшей комбинации.

Пример 3. Эксперимент – n -кратное повторение опыта с бросанием монеты, случайная величина – количество выпавших гербов – может принимать все целые значения от 0 до n .

Пример 4. Эксперимент – извлечение шара из урны, содержащей равное количество белых и черных шаров, с возвращением шара в урну после каждого извлечения. Случайная величина – количество извлечений до первого появления белого шара.

Эта случайная величина может принимать ... все целые положительные значения: 1, 2, 3, ..., n ,

...

Пример 5. Эксперимент – случайный выбор точки из отрезка $[0; 1]$. Случайная величина – координата точки. Эта случайная величина может принимать ...

любые значения от 0 до 1.

Пример 6. Эксперимент – наблюдение за временем безотказной работы некоторого устройства: от момента включения до первого выхода из строя. Случайная величина – время безотказной работы – может принимать

...

все действительные числа от 0 до $+\infty$.

Определение 2. Случайная величина называется *дискретной*, если множество ее значений конечно или счетно, т.е. множество ее значений представляет собой конечную последовательность X_1, X_2, \dots, X_n или бесконечную последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$

Вероятность того, что случайная величина X примет значение x , обозначают

$$P(x) = P(X = x).$$

Определение 3. Соответствие между возможными значениями x_1, x_2, \dots, x_n случайной величины X и их вероятностями p_1, p_2, \dots, p_n называется *законом распределения* случайной величины X .

Закон распределения случайной величины может быть представлен в виде таблицы

X	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots	x_n
p	p_1	p_2	\dots	p_i	\dots	p_n

X	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots	x_n
p	p_1	p_2	\dots	p_i	\dots	p_n

События $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ образуют полную систему попарно несовместных событий, поэтому сумма их вероятностей равна единице, т.е.

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

x_1

x_1

Пример. Бросаются две правильные однородные монеты. Сколько из них выпадет гербом кверху?

U	PP	PG	GP	GG
X	0	1	1	2
p	1/4	1/4	1/4	1/4

X	0	1	2
p	1/4	1/2	1/4

Над случайными величинами устанавливаются операции сложения и умножения

1. **Суммой** двух случайных величин X и Y называется случайная величина, которая получается в результате сложения всех значений случайной величины X и всех значений случайной величины Y , соответствующие вероятности перемножаются.

2. Произведением двух случайных величин X и Y называется случайная величина, которая получается в результате перемножения всех значений случайной величины X и всех значений случайной величины Y , соответствующие вероятности перемножаются.

Пример. ДСВ X и Y заданы в виде таблиц:

X	0	1	2	3
p	0,1	0,4	0,3	0,2

y	-1	0	1
p	0,2	0,3	0,5

Найти: 1) $X + C$,
 где $C = 2$; 2) $Z = X + Y$.

X+				
C				
p				

Z											
p											

Z					
p					

Биномиальное распределение

Пусть случайная величина X – число появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A равна p , а непоявления равна $q = 1 - p$. Очевидно, что X может принимать значения $0, 1, 2, \dots, n$, вероятности которых определяются по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Определение. Биномиальным распределением называется закон распределения случайной величины X , имеющий вид:

X	0	1	2	...	m	...	n
p	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$...	$C_n^m p^m q^{n-m}$...	$C_n^n p^n q^0$

Пример. Составить закон распределения числа попаданий в цель при четырех выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,9.

Пример. Монета бросается 5 раз, представим закон распределения ДСВ X – числа появления герба, в виде таблицы.

X	0	1	2	3	4	5
p						

$$P_5(X = 0) = C_5^0 p^0 q^{5-0} =$$

Пример. Составить закон распределения числа попаданий в цель при четырех выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,9.

Упражнения.

1. Составить закон распределения числа попаданий в цель при шести выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8.

2. Вероятность того, что студент найдет в библиотеке нужную ему книгу, равна 0,3.
Составить закон распределения числа библиотек, которые он посетит, если в городе четыре библиотеки.

**Числовые
характеристики
распределения
дискретных
случайных величин**

На практике нет необходимости характеризовать случайную величину полностью. Обычно достаточно указать только отдельные числовые параметры распределения ее значений. Такие числовые параметры называются числовыми характеристиками распределения. Прежде всего, это характеристики положения: математическое ожидание, медиана, мода; характеристики рассеяния: дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

Определение. Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений x_i на их вероятности p_i :

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum x_i p_i$$

Пример. Найти математическое ожидание случайной величины X , зная ее закон распределения:

X	-1	0	1	2	3
p	0,2	0,1	0,25	0,15	0,3

Свойства математического ожидания

1. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX) = C M(X)$.

2. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

3. Математическое ожидание постоянной величины C равно самой этой величине: $M(C) = C$.

4. Математическое ожидание любой линейной комбинации случайных величин равно линейной комбинации их математических ожиданий:

$$M \left(\sum_k C_k X_k \right) = \sum_k (C_k M(X_k)).$$

5. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X) M(Y).$$

ДИСПЕРСИЯ.

Пример. Рассмотрим математическое ожидание случайных величин X и Y , зная законы их распределения:

X	-8	-4	-1	1	3	7
p	1/12	1/6	1/4	1/6	1/12	1/4

Y	-2	-1	0	1	2	3
p	1/6	1/6	1/12	1/3	0	1/4

Основной числовой характеристикой степени рассеяния значений случайной величины X относительно ее математического ожидания $M(X)$ является дисперсия, которая обозначается $D(X)$.

Определение. *Отклонением* называется разность между случайной величиной X и ее математическим ожиданием $M(X)$, т.е. $X - M(X)$.

Определение. *Дисперсией дискретной случайной величины X* называется математическое ожидание квадрата ее отклонения: $D(X) = M(X - M(X))^2$.

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(X) = 0.$$

2. Если X – случайная величина, а C – постоянная, то

$$D(CX) = C^2 D(X),$$

$$D(X + C) = D(X).$$

3. Если X и Y – независимые случайные величины, то

(Y).

$$D(X + Y) = D(X) + D$$