
НЕОПРЕДЕЛЕННЫ Й ИНТЕГРАЛ



ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

В дифференциальном исчислении решается задача: *по данной функции $f(x)$ найти ее производную* (или дифференциал). Интегральное исчисление решает обратную задачу: *найти функцию $F(x)$, зная ее производную $F'(x) = f(x)$* (или дифференциал). Искомую функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$.

☞ Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если для любого $x \in (a; b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{или } dF(x) = f(x) dx).$$

Например, первообразной функции $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, является функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x).$$

Очевидно, что первообразными будут также любые функции

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C,$$

где C — постоянная, поскольку

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2 = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Теорема. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a; b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где C — постоянное число

□ Функция $F(x) + C$ является первообразной $f(x)$. Действительно, $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Пусть $\Phi(x)$ — некоторая другая, отличная от $F(x)$, первообразная функции $f(x)$, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$. Тогда для любого $x \in (a; b)$ имеем

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

А это означает, что

$$\Phi(x) - F(x) = C,$$

где C — постоянное число. Следовательно, $\Phi(x) = F(x) + C$. ■

⇒ Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется **неопределенным интегралом от функции $f(x)$** и обозначается символом $\int f(x) dx$.

Таким образом, по определению

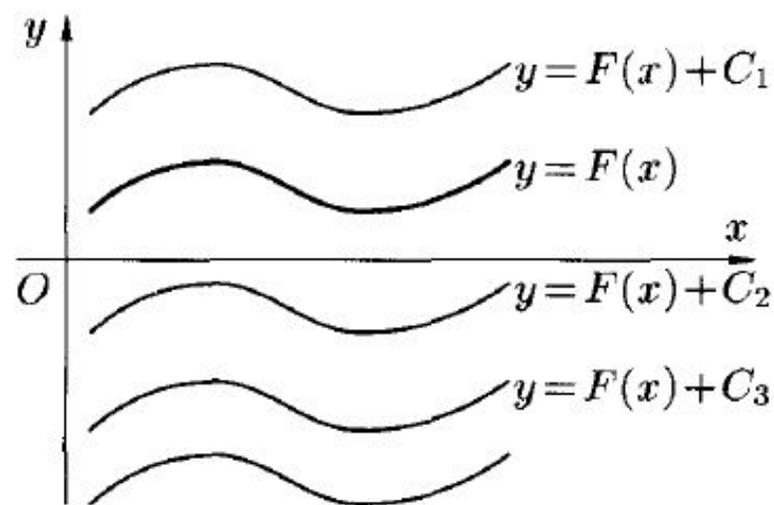
$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

⇒ Здесь $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, $f(x) dx$ — **подынтегральным выражением**, x — **переменной интегрирования**, \int — **знаком неопределенного интеграла**.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется **интегрированием** этой функции.

⇒ Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых $y = F(x) + C$ (каждому числовому значению C соответствует определенная кривая семейства)

График каждой первообразной (кривой) называется *интегральной кривой*.



☉ Имеет место теорема, утверждающая, что «всякая непрерывная на $(a; b)$ функция имеет на этом промежутке первообразную», а следовательно, и неопределенный интеграл.

СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО

Отметим ряд свойств неопределенного интеграла, вытекающих из его определения.

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx, \quad \left(\int f(x) dx\right)' = f(x).$$

□ Действительно,

$$d\left(\int f(x) dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) + d(C) = F'(x) dx = f(x) dx$$

и

$$\left(\int f(x) dx\right)' = (F(x) + C)' = \frac{F'(x)}{x} + 0 = f(x). \quad \blacksquare$$

Благодаря этому свойству *правильность интегрирования проверяется дифференцированием*. Например, равенство

$$\int (3x^2 + 4) dx = x^3 + 4x + C$$

верно, так как $(x^3 + 4x + C)' = 3x^2 + 4$.

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

□ Действительно, $\int dF(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C.$ ■

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x) dx = a \cdot \int f(x) dx, \quad a \neq 0 \text{ — постоянная.}$$

□ Действительно,

$$\begin{aligned} \int af(x) dx &= \int aF'(x) dx = \int (aF'(x))' dx = \int d(aF(x)) = \\ &= a \cdot F(x) + C_1 = a \cdot \left(F(x) + \frac{C_1}{a} \right) = a(F(x) + C) = a \int f(x) dx \end{aligned}$$

(положили $\frac{C_1}{a} = C$). ■

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

□ Пусть $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int (f(x) \pm g(x)) dx &= \int (F'(x) \pm G'(x)) dx = \\ &= \int (F(x) \pm G(x))' dx = \int d(F(x) \pm G(x)) = F(x) \pm G(x) + C = \\ &= (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2) = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx, \end{aligned}$$

где $C_1 \pm C_2 = C$. ■

5. (Инвариантность формулы интегрирования). Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то и $\int f(u) du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

□ Пусть x — независимая переменная, $f(x)$ — непрерывная функция и $F(x)$ — ее первообразная. Тогда $\int f(x) dx = F(x) + C$. Положим теперь $u = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция. Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. В силу инвариантности формы первого дифференциала функции имеем

$$dF(u) = F'(u) du = f(u) du.$$

Отсюда $\int f(u) du = \int d(F(u)) = F(u) + C$. ■

Таким образом, формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от нее, имеющей непрерывную производную.

Так, из формулы $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ путем замены x на u ($u = \varphi(x)$) получаем $\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$. В частности,

$$\int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C,$$

$$\int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C,$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

Пример 1. Найти интеграл $\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5) dx$.

○ Решение:

$$\begin{aligned}\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5) dx &= 2 \int x^4 dx - 3 \int x^2 dx + \int x dx - 5 \int dx = \\ &= 2 \frac{x^5}{5} + C_1 - 3 \frac{x^3}{3} + C_2 + \frac{x^2}{2} + C_3 - 5x + C_4 = \frac{2}{5}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C,\end{aligned}$$

где $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. ●

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{x+1}{x} dx$.

○ Решение: $\int \frac{x+1}{x} dx = \int (1 + \frac{1}{x}) dx = x + \ln|x| + C$. ●

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пользуясь тем, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, можно получить таблицу основных интегралов путем обращения соответствующих формул дифференциального исчисления (таблица дифференциалов) и использования свойств неопределенного интеграла.

Например, так как

$$d(\sin u) = \cos u \cdot du,$$

то

$$\int \cos u \, du = \int d(\sin u) = \sin u + C.$$

Вывод ряда формул таблицы будет дан при рассмотрении основных методов интегрирования.

Интегралы в приводимой ниже таблице называются *табличными*. Их следует знать наизусть. В интегральном исчислении нет простых и универсальных правил отыскания первообразных от элементарных функций, как в дифференциальном исчислении. Методы нахождения первообразных (т. е. интегрирования функции) сводятся к указанию приемов, приводящих данный (искомый) интеграл к табличному. Следовательно, необходимо знать табличные интегралы и уметь их узнавать.

Отметим, что в таблице основных интегралов переменная интегрирования u может обозначать как независимую переменную, так и функцию от независимой переменной (согласно свойству инвариантности формулы интегрирования).

Таблица основных интегралов

$$1. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \left(\int du = u + C \right);$$

$$2. \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C;$$

$$3. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$$

$$4. \int e^u du = e^u + C;$$

$$5. \int \sin u du = -\cos u + C \quad \left(\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C \right);$$

$$6. \int \cos u du = \sin u + C \quad \left(\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C \right);$$

$$7. \int \operatorname{tg} u \, du = -\ln |\cos u| + C;$$

$$8. \int \operatorname{ctg} u \, du = \ln |\sin u| + C;$$

$$9. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \quad \left(\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C \right);$$

$$10. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C \quad \left(\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C \right);$$

$$11. \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C;$$

$$12. \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$$

$$13. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$$

$$14. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C;$$

$$15. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$$

$$16. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C;$$

$$17. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C;$$

$$18. \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C.$$

В справедливости приведенных ниже формул можно убедиться, взяв дифференциал правой части, который будет равен подынтегральному выражению в левой части формулы.

Докажем, например, справедливость формулы $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$;

Функция $\frac{1}{u}$ определена и непрерывна для всех значений u , отличных от нуля.

Если $u > 0$, то $\ln |u| = \ln u$, тогда $d \ln |u| = d \ln u = \frac{du}{u}$. Поэтому

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln |u| + C \text{ при } u > 0.$$

Если $u < 0$, то $\ln |u| = \ln(-u)$. Но $d \ln(-u) = \frac{-du}{-u} = \frac{du}{u}$. Значит,

$$\int \frac{du}{u} = \ln(-u) + C = \ln |u| + C \text{ при } u < 0.$$

Итак, формула $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$ верна.

Аналогично, проверим формулу :

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$$

$$d \left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C \right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a} du = \frac{du}{a^2 + u^2}.$$

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Метод непосредственного интегрирования

⇒ Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется **непосредственным интегрированием**.

При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция «*подведения под знак дифференциала*»):

$$du = d(u + a), \quad a \text{ — число,}$$

$$du = \frac{1}{a}d(au), \quad a \neq 0 \text{ — число,}$$

$$u \cdot du = \frac{1}{2}d(u^2),$$

$$\cos u \, du = d(\sin u),$$

$$\sin u \, du = -d(\cos u),$$

$$\frac{1}{u} \, du = d(\ln u),$$

$$\frac{1}{\cos^2 u} \, du = d(\operatorname{tg} u).$$

Вообще, $f'(u) du = d(f(u))$, эта формула очень часто используется при вычислении интегралов.

Примеры:

$$1) \int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C \quad (\text{формула } \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C);$$

$$2) \int (3x-1)^{24} dx = \frac{1}{3} \int (3x-1)^{24} d(3x-1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-1)^{25}}{25} + C$$

$$(\text{формула } \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \left(\int du = u + C \right));$$

$$3) \int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$$

$$(\text{формулы } \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C \quad \text{и} \quad \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \left(\int du = u + C \right));$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3} \cdot x)}{\sqrt{(2)^2 - (\sqrt{3} \cdot x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2} + C$$

(формула $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$);

$$5) \int \sin^2 6x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 12x) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 12x dx = \\ = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \cos 12x d(12x) \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{24} \sin 12x + C$$

(формулы $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$) $(\int du = u + C)$);

и $\int \cos u du = \sin u + C$);

$$\begin{aligned} 6) \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} &= -\frac{1}{3} \int \frac{(x-1) - (x+2)}{(x-1)(x+2)} dx = \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} dx + \frac{1}{3} \int \frac{x+2}{(x-1)(x+2)} dx = \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{d(x+2)}{x+2} + \frac{1}{3} \int \frac{d(x-1)}{x-1} = -\frac{1}{3} \ln|x+2| + \frac{1}{3} \ln|x-1| + C; \end{aligned}$$

(формула 2 таблицы интегралов);

$$7) \int \operatorname{tg} u \, du = \int \frac{\sin u \, du}{\cos u} = - \int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C \text{ (вывод формулы 7);}$$

$$\begin{aligned}
 8) \int \frac{du}{\sin u} &= \int \frac{\cos^2 \frac{u}{2} + \sin^2 \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}} du = \int \frac{\cos^2 \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}} du + \\
 &+ \int \frac{\sin^2 \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}} du = \int \operatorname{ctg} \frac{u}{2} d\left(\frac{u}{2}\right) + \int \operatorname{tg} \frac{u}{2} d\left(\frac{u}{2}\right) = \ln \left| \sin \frac{u}{2} \right| - \\
 &- \ln \left| \cos \frac{u}{2} \right| + C = \ln \left| \frac{\sin \frac{u}{2}}{\cos \frac{u}{2}} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C \text{ (ВЫВОД} \\
 &\text{формулы 11)};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \int x(x+2)^9 dx &= \int (x+2-2)(x+2)^9 dx = \int (x+2)^{10} dx - \\
 &- 2 \int (x+2)^9 dx = \int (x+2)^{10} d(x+2) - 2 \int (x+2)^9 d(x+2) = \\
 &= \frac{(x+2)^{11}}{11} - 2 \frac{(x+2)^{10}}{10} + C
 \end{aligned}$$

$$\text{(формула } \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \text{ (} \alpha \neq -1 \text{))} \quad \left(\int du = u + C \right);$$

$$10) \int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^5 x \cdot \sin^2 x} = - \int (\operatorname{ctg} x)^{-5} d(\operatorname{ctg} x) = - \frac{\operatorname{ctg}^{-4} x}{-4} + C =$$
$$= \frac{1}{4 \operatorname{ctg}^4 x} + C$$

(формула $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$) $\left(\int du = u + C\right)$);

$$11) \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2+(x-1)^2}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(x-1)^2}} =$$
$$= \ln|x-1 + \sqrt{3-2x+x^2}| + C$$

(формула $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2+a^2}| + C$);

$$12) \int \left(4x^3 - \frac{5}{\cos^2 2x} + 3^{1-x} \right) dx = 4 \int x^3 dx - \frac{5}{2} \int \frac{d(2x)}{\cos^2 2x} - \int 3^{1-x} d(1-x) = x^4 - \frac{5}{2} \operatorname{tg} 2x - \frac{3^{1-x}}{\ln 3} + C$$

(формулы

- $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \left(\int du = u + C \right);$
 - $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \quad \left(\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C \right);$
 - $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$
-

$$\begin{aligned} 13) \int x^3 \cdot \sqrt[3]{1+x^2} dx &= \int (1+x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot x \cdot (x^2+1-1) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{\frac{4}{3}} d(1+x^2) - \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{\frac{1}{3}} d(1+x^2) = \\ &= \frac{3}{14} (1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8} (1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C. \end{aligned}$$

Как видно, вычисление интегралов иногда требует некоторой изобретательности, так сказать, «индивидуального подхода к каждой подынтегральной функции».

Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т. е. подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся (в случае «удачной» подстановки). Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x) dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную.

Тогда $dx = \varphi'(t) dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем *формулу интегрирования подстановкой*

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Формула

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

также называется

формулой замены переменных в неопределенном интеграле.

После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x .

Иногда целесообразно подбирать подстановку в виде $t = \varphi(x)$, тогда $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(t) dt$, где $t = \varphi(x)$. Другими словами, формулу можно применять справа налево.

Пример 1. Найти $\int e^{\frac{x}{4}} dx$.

○ Решение: Положим $x = 4t$, тогда $dx = 4 dt$. Следовательно,

$$\int e^{\frac{x}{4}} dx = 4 \int e^t dt = 4e^t + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C. \quad \bullet$$

Пример 2. Найти $\int x \cdot \sqrt{x-3} dx$.

○ Решение: Пусть $\sqrt{x-3} = t$, тогда $x = t^2 + 3$, $dx = 2t dt$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sqrt{x-3} dx &= \int (t^2 + 3) \cdot t \cdot 2t dt = \\ &= 2 \int (t^4 + 3t^2) dt = 2 \int t^4 dt + 6 \int t^2 dt = 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 6 \cdot \frac{t^3}{3} + C = \\ &= \frac{2}{5}(x-3)^{5/2} + 2(x-3)^{3/2} + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 3. Получить формулу

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C.$$

□ Обозначим $t = \sqrt{u^2 + a^2} + u$ (подстановка Эйлера). Тогда

$$dt = \frac{2u}{2\sqrt{u^2 + a^2}} du + du, \quad \text{т. е.} \quad dt = \frac{\sqrt{u^2 + a^2} + u}{\sqrt{u^2 + a^2}} du.$$

Отсюда

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{dt}{\sqrt{u^2 + a^2} + u} = \frac{dt}{t}.$$

Стало быть,

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C. \quad \blacksquare$$

Пример 4. Найти $\int x \cdot (x + 2)^{100} dx$.

○ Решение: Пусть $x + 2 = t$. Тогда $x = t - 2$, $dx = dt$. Имеем:

$$\begin{aligned}\int x \cdot (x + 2)^{100} dx &= \int (t - 2) \cdot t^{100} dt = \int t^{101} dt - 2 \int t^{100} dt = \\ &= \frac{t^{102}}{102} - 2 \cdot \frac{t^{101}}{101} + C = \frac{(x + 2)^{102}}{102} - \frac{2(x + 2)^{101}}{101} + C. \bullet\end{aligned}$$

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{e^x + 1}$.

○ Решение: Обозначим $e^x = t$. Тогда $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{e^x + 1} &= \int \frac{\frac{dt}{t}}{t + 1} = \int \frac{dt}{t(t + 1)} = \int \frac{dt}{t^2 + t} = \\ &= \int \frac{dt}{(t + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} = - \int \frac{d(t + \frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})^2 - (t + \frac{1}{2})^2} = - \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln \left| \frac{\frac{1}{2} + t + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}} \right| + C = \\ &= - \ln \left| \frac{t + 1}{-t} \right| = \ln \left| \frac{t}{t + 1} \right| = \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + C.\end{aligned}$$

Здесь используется формула 16 таблицы основных интегралов. \bullet

Пример 6. $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = ?$ Сделаем подстановку $t = \sin x$; тогда $dt = \cos x dx$ и, следовательно, $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2t^{3/2}}{3} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C$.

Пример 7. $\int \frac{x dx}{1+x^2} = ?$ Полагаем $t = 1+x^2$; тогда $dt = 2x dx$ и $\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$.

Пример 8. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1+(x/a)^2}$. Полагаем $t = \frac{x}{a}$; тогда $dx = a dt$,
 $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.

Пример 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x/a)^2}}$. Полагаем $t = \frac{x}{a}$; тогда $dx = a dt$,
 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{a dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arcsin} t + C = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$ (предполагается, что $a > 0$).

В примерах 8. и 9. выведены формулы, приведенные в таблице интегралов :

Пример 10. $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = ?$ Полагаем $t = \ln x$; тогда $dt = \frac{dx}{x}$,

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} (\ln x)^4 + C.$$

Пример 11. $\int \frac{x dx}{1+x^4} = ?$ Полагаем $t = x^2$; тогда $dt = 2x dx$,

$$\int \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C.$$

Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$. Интегрируя это равенство, получим

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du \quad \text{или} \quad \int u dv = uv - \int v du.$$

☞ Полученная формула называется **формулой интегрирования по частям**. Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int u dv$ к вычислению интеграла $\int v du$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей u и dv (это, как правило, можно осуществить несколькими способами); затем, после нахождения v и du , используется формула интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx} dx$, $\int P(x) \cdot \sin kx dx$, $\int P(x) \cos kx dx$, где $P(x)$ — многочлен, k — число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители.

2. Интегралы вида $\int P(x) \arcsin x dx$, $\int P(x) \arccos x dx$, $\int P(x) \ln x dx$, $\int P(x) \operatorname{arctg} x dx$, $\int P(x) \operatorname{arcctg} x dx$. Удобно положить $P(x) dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax} \cdot \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cdot \cos bx dx$, где a и b — числа. За u можно принять функцию $u = e^{ax}$.

Пример 6. Найти $\int (2x + 1)e^{3x} dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{l} u = 2x + 1 \implies du = 2dx \\ dv = e^{3x} dx \implies v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right]$ (можно положить $C = 0$). Следовательно, по формуле интегрирования по частям:

$$\int (2x+1)e^{3x} dx = (2x+1) \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} 2 dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C. \bullet$$

Пример 7. Найти $\int \ln x dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \implies v = x \end{array} \right]$. Поэтому

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - x + C. \bullet$$

Пример 8. Найти $\int x^2 e^x dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{l} u = x^2 \quad \implies \quad du = 2x dx \\ dv = e^x dx \quad \implies \quad v = e^x \end{array} \right]$. Поэтому

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int e^x \cdot x dx.$$

Для вычисления интеграла $\int e^x x dx$ снова применим метод интегрирования по частям: $u = x$, $dv = e^x dx \implies du = dx$, $v = e^x$. Значит,

$$\int e^x \cdot x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C.$$

Пример 9. Найти $\int \operatorname{arctg} x dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \quad \implies \quad du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = dx \quad \implies \quad v = x \end{array} \right]$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x dx &= x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 10. Требуется вычислить $\int \operatorname{arctg} x \, dx$. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$; тогда $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. Следовательно,

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

Пример 11. Требуется вычислить $\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x dx$. Положим $u = x^2 + 7x - 5$, $dv = \cos 2x dx$; тогда

$$du = (2x + 7) dx, \quad v = \frac{\sin 2x}{2},$$

$$\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x dx = (x^2 + 7x - 5) \frac{\sin 2x}{2} - \int (2x + 7) \frac{\sin 2x}{2} dx.$$

Применим интегрирование по частям к последнему интегралу, принимая $u_1 = \frac{2x + 7}{2}$, $dv_1 = \sin 2x dx$; тогда

$$du_1 = dx, \quad v_1 = -\frac{\cos 2x}{2};$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + 7}{2} \sin 2x dx &= \frac{2x + 7}{2} \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) - \int \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) dx = \\ &= -\frac{(2x + 7) \cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + C. \end{aligned}$$

Поэтому окончательно

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x dx &= (x^2 + 7x - 5) \frac{\sin 2x}{2} + (2x + 7) \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + C = \\ &= (2x^2 + 14x - 11) \frac{\sin 2x}{4} + (2x + 7) \frac{\cos 2x}{4} + C. \end{aligned}$$

Пример 12. $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = ?$

Произведем тождественные преобразования. Умножим и разделим подынтегральную функцию на $\sqrt{a^2 - x^2}$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int x \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Последний интеграл проинтегрируем по частям, полагая

$$\begin{aligned} u &= x, & du &= dx, \\ dv &= \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & v &= -\sqrt{a^2 - x^2}; \end{aligned}$$

тогда

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int x \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Подставляя последний результат в полученное ранее выражение данного интеграла, будем иметь:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Переносим интеграл справа налево и выполнив элементарные преобразования, окончательно получим:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Пример 13. Вычислить интегралы

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx \, dx \text{ и } I_2 = \int e^{ax} \sin bx \, dx.$$

Применяя метод интегрирования по частям к первому интегралу, получим:

$$u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax} \, dx,$$

$$dv = \cos bx \, dx, \quad v = \frac{1}{b} \sin bx,$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx.$$

К последнему интегралу снова применим метод интегрирования по частям:

$$u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax} \, dx,$$

$$dv = \sin bx \, dx, \quad v = -\frac{1}{b} \cos bx,$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx.$$

Подставляя полученное выражение в предыдущее равенство, получим:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx.$$

Найдем из последнего равенства I_1 :

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \cos bx \, dx = e^{ax} \left(\frac{1}{b} \sin bx + \frac{a}{b^2} \cos bx\right) + C \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right),$$

откуда

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

Аналогично находим:

$$I_2 = \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$
