НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

В дифференциальном исчислении решается задача: *по данной функции $f(x)$ найти ее производную* (или дифференциал). Интегральное исчисление решает обратную задачу: *найти функцию $F(x)$, зная ее производную $F'(x) = f(x)$* (или дифференциал). Искомую функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$.

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если для любого $x \in (a;b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{или } dF(x) = f(x)\,dx).$$

Например, первообразной функции $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, является функция $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x).$$

Очевидно, что первообразными будут также любые функции

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C,$$

где C — постоянная, поскольку

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2 = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Теорема. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a;b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x)+C$, где C — постоянное число

❑ Функция $F(x)+C$ является первообразной $f(x)$. Действительно, $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$.

Пусть $\Phi(x)$ — некоторая другая, отличная от $F(x)$, первообразная функции $f(x)$, т. е. $\Phi'(x)=f(x)$. Тогда для любого $x\in(a;b)$ имеем

$$(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

А это означает , что

$$\Phi(x)-F(x)=C,$$

где C — постоянное число. Следовательно, $\Phi(x)=F(x)+C$. ■

Множество всех первообразных функций $F(x)+C$ для $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом от функции*** $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению

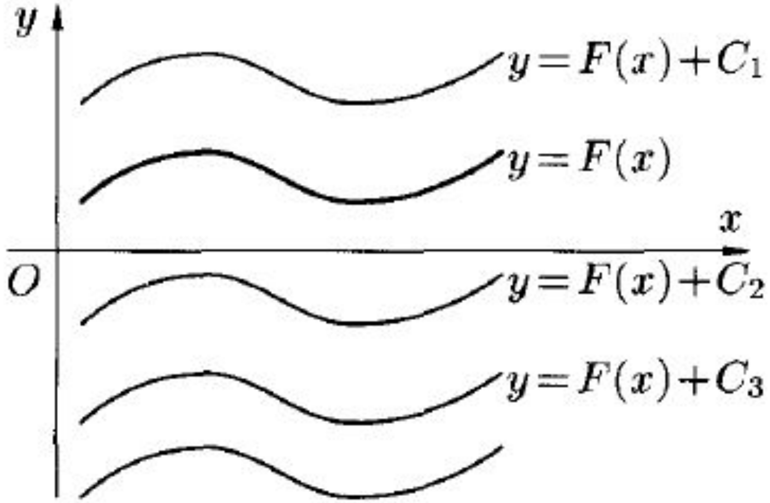
$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C.}$$

Здесь $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, $f(x)\,dx$ — ***подынтегральным выражением***, x — ***переменной интегрирования***, $\int$ — ***знаком неопределенного интеграла***.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых $y = F(x) + C$ (каждому числовому значению C соответствует определенная кривая семейства)

График каждой первообразной (кривой) называется ***интегральной кривой***.



Имеет место теорема, утверждающая, что «всякая непрерывная на $(a;b)$ функция имеет на этом промежутке первообразную», а следовательно, и неопределенный интеграл.

СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Отметим ряд свойств неопределенного интеграла, вытекающих из его определения.

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx, \qquad \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

❑ Действительно,

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d(F(x)+C) = dF(x) + d(C) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$$

и

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) + 0 = f(x).$$ ■

Благодаря этому свойству *правильность интегрирования проверяется дифференцированием.* Например, равенство

$$\int (3x^2+4)\,dx = x^3 + 4x + C$$

верно, так как $(x^3+4x+C)' = 3x^2+4$.

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

❏ Действительно, $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$ ■

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx, \quad a \neq 0 \text{ — постоянная.}$$

❏ Действительно,

$$\int af(x)\,dx = \int aF'(x)\,dx = \int (aF(x))'\,dx = \int d(aF(x)) =$$
$$= a \cdot F(x) + C_1 = a \cdot \left(F(x) + \frac{C_1}{a}\right) = a(F(x) + C) = a \int f(x)\,dx$$

$\left(\text{положили } \dfrac{C_1}{a} = C\right)$. ■

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

❑ Пусть $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$. Тогда

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int (F'(x) \pm G'(x))\,dx =$$

$$= \int (F(x) \pm G(x))'\,dx = \int d(F(x) \pm G(x)) = F(x) \pm G(x) + C =$$

$$= (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2) = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx,$$

где $C_1 \pm C_2 = C$. ■

5. (Инвариантность формулы интегрирования). Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)\,du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

❑ Пусть x — независимая переменная, $f(x)$ — непрерывная функция и $F(x)$ — ее первообразная. Тогда $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Положим теперь $u = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция. Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. В силу инвариантности формы первого дифференциала функции имеем

$$dF(u) = F'(u)\,du = f(u)\,du.$$

Отсюда $\int f(u)\,du = \int d(F(u)) = F(u) + C$. ■

Таким образом, формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от нее, имеющей непрерывную производную.

Так, из формулы $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$ путем замены x на u $(u = \varphi(x))$ получаем $\int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C$. В частности,

$$\int \sin^2 x\, d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C,$$

$$\int \ln^2 x\, d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C,$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

Пример 1. Найти интеграл $\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)\,dx$.

Решение:

$$\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)\,dx = 2\int x^4\,dx - 3\int x^2\,dx + \int x\,dx - 5\int dx =$$

$$= 2\frac{x^5}{5} + C_1 - 3\frac{x^3}{3} + C_2 + \frac{x^2}{2} + C_3 - 5x + C_4 = \frac{2}{5}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C,$$

где $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{x+1}{x}\,dx$.

Решение: $\int \frac{x+1}{x}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = x + \ln|x| + C$.

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пользуясь тем, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, можно получить таблицу основных интегралов путем обращения соответствующих формул дифференциального исчисления (таблица дифференциалов) и использования свойств неопределенного интеграла.

Например, так как

$$d(\sin u) = \cos u \cdot du,$$

то

$$\int \cos u \, du = \int d(\sin u) = \sin u + C.$$

Вывод ряда формул таблицы будет дан при рассмотрении основных методов интегрирования.

Интегралы в приводимой ниже таблице называются *табличными*. Их следует знать наизусть. В интегральном исчислении нет простых и универсальных правил отыскания первообразных от элементарных функций, как в дифференциальном исчислении. Методы нахождения первообразных (т. е. интегрирования функции) сводятся к указанию приемов, приводящих данный (искомый) интеграл к табличному. Следовательно, необходимо знать табличные интегралы и уметь их узнавать.

Отметим, что в таблице основных интегралов переменная интегрирования u может обозначать как независимую переменную, так и функцию от независимой переменной (согласно свойству инвариантности формулы интегрирования).

Таблица основных интегралов

1. $\int u^\alpha \, du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \left(\int du = u + C\right);$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$

3. $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$

4. $\int e^u \, du = e^u + C;$

5. $\int \sin u \, du = -\cos u + C \qquad \left(\int \operatorname{sh} u \, du = \operatorname{ch} u + C\right);$

6. $\int \cos u \, du = \sin u + C \qquad \left(\int \operatorname{ch} u \, du = \operatorname{sh} u + C\right);$

7. $\int \operatorname{tg} u \, du = -\ln|\cos u| + C;$

8. $\int \operatorname{ctg} u \, du = \ln|\sin u| + C;$

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$ $\quad \left(\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C\right);$

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$ $\quad \left(\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C\right);$

11. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right| + C;$

12. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

13. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$

14. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + C;$

15. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{a} + C;$

16. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C;$

17. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C;$

18. $\displaystyle\int \sqrt{u^2\pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{u^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right| + C.$

В справедливости приведенных ниже формул можно убедиться, взяв дифференциал правой части, который будет равен подынтегральному выражению в левой части формулы.

Докажем, например, справедливость формулы $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$;

Функция $\frac{1}{u}$ определена и непрерывна для всех значений u, отличных от нуля.

Если $u > 0$, то $\ln|u| = \ln u$, тогда $d\ln|u| = d\ln u = \frac{du}{u}$. Поэтому $\int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln|u| + C$ при $u > 0$.

Если $u < 0$, то $\ln|u| = \ln(-u)$. Но $d\ln(-u) = \frac{-du}{-u} = \frac{du}{u}$. Значит, $\int \frac{du}{u} = \ln(-u) + C = \ln|u| + C$ при $u < 0$.

Итак, формула $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$ верна.

Аналогично, проверим формулу :

$$\boxed{\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C;}$$

$$d\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a}\,du = \frac{du}{a^2+u^2}.$$

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Метод непосредственного интегрирования

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется ***непосредственным интегрированием.***

При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция «*подведения под знак дифференциала*»):

$$du = d(u + a), \quad a \text{ — число},$$

$$du = \frac{1}{a} d(au), \quad a \neq 0 \text{ — число},$$

$$u \cdot du = \frac{1}{2} d(u^2),$$

$$\cos u \, du = d(\sin u),$$

$$\sin u \, du = -d(\cos u),$$

$$\frac{1}{u} du = d(\ln u),$$

$$\frac{1}{\cos^2 u} du = d(\operatorname{tg} u).$$

Вообще, $f'(u)\,du = d(f(u))$, эта формула очень часто используется при вычислении интегралов.

Примеры:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$ (формула $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$);

2) $\displaystyle\int (3x-1)^{24}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^{24}\,d(3x-1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^{25}}{25} + C$

(формула $\displaystyle\int u^\alpha\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \left(\int du = u + C\right)$;

3) $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx -$
$\displaystyle- \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$

(формулы $\displaystyle\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$ и $\displaystyle\int u^\alpha\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \left(\int du = u + C\right)$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}\cdot x)}{\sqrt{(2)^2-(\sqrt{3}\cdot x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3}\cdot x}{2} + C$

(формула $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$);

5) $\int \sin^2 6x\, dx = \frac{1}{2} \int (1-\cos 12x)\, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 12x\, dx =$
$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \cos 12x\, d(12x) \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{24} \sin 12x + C$

(формулы $\int u^\alpha\, du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \left(\int du = u + C\right)$;

и $\int \cos u\, du = \sin u + C$);

$$6)\ \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{3}\int \frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)(x+2)}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{3}\int \frac{x-1}{(x-1)(x+2)}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{(x-1)(x+2)}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{3}\int \frac{d(x+2)}{x+2} + \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} = -\frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln|x-1| + C;$$

(формула 2 таблицы интегралов);

7) $\int \operatorname{tg} u\,du = \int \frac{\sin u\,du}{\cos u} = -\int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C$ (вывод формулы 7);

$$8)\ \int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{\cos^2\frac{u}{2} + \sin^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du = \int \frac{\cos^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du +$$

$$+ \int \frac{\sin^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du = \int \operatorname{ctg}\frac{u}{2}\,d\Big(\frac{u}{2}\Big) + \int \operatorname{tg}\frac{u}{2}\,d\Big(\frac{u}{2}\Big) = \ln\Big|\sin\frac{u}{2}\Big| -$$

$$- \ln\Big|\cos\frac{u}{2}\Big| + C = \ln\left|\frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}\right| + C = \ln\Big|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\Big| + C$$ (вывод формулы 11);

$$9)\ \int x(x+2)^9\,dx = \int (x+2-2)(x+2)^9\,dx = \int (x+2)^{10}\,dx -$$

$$- 2\int (x+2)^9\,dx = \int (x+2)^{10}\,d(x+2) - 2\int (x+2)^9\,d(x+2) =$$

$$= \frac{(x+2)^{11}}{11} - 2\frac{(x+2)^{10}}{10} + C$$

(формула $\int u^\alpha\,du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \Big(\int du = u + C\Big)$;

$$10)\ \int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^5 x \cdot \sin^2 x} = -\int (\operatorname{ctg} x)^{-5}\, d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{\operatorname{ctg}^{-4} x}{-4} + C =$$

$$= \frac{1}{4 \operatorname{ctg}^4 x} + C$$

(формула $\int u^\alpha\, du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \left(\int du = u + C\right)$;

$$11)\ \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2+(x-1)^2}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(x-1)^2}} =$$

$$= \ln\left|x - 1 + \sqrt{3-2x+x^2}\right| + C$$

(формула $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right| + C$);

$$12)\ \int\left(4x^3-\frac{5}{\cos^2 2x}+3^{1-x}\right)dx=4\int x^3\,dx-\frac{5}{2}\int\frac{d(2x)}{\cos^2 2x}-$$

$$-\int 3^{1-x}\,d(1-x)=x^4-\frac{5}{2}\operatorname{tg}2x-\frac{3^{1-x}}{\ln 3}+C$$

(формулы

- $\int u^\alpha\,du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq-1)\qquad\left(\int du=u+C\right);$
- $\int\frac{du}{\cos^2 u}=\operatorname{tg}u+C\qquad\left(\int\frac{du}{\operatorname{ch}^2 u}=\operatorname{th}u+C\right);$
- $\int a^u\,du=\frac{a^u}{\ln a}+C;$

13) $\int x^3 \cdot \sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \int (1+x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot x \cdot (x^2+1-1)\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{4}{3}}\,d(1+x^2) - \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{1}{3}}\,d(1+x^2) =$

$= \frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C.$

Как видно, вычисление интегралов иногда требует некоторой изобретательности, так сказать, «индивидуального подхода к каждой подынтегральной функции».

Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т. е. подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся (в случае «удачной» подстановки). Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную.

Тогда $dx = \varphi'(t)\,dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем *формулу интегрирования подстановкой*

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.}$$

Формула $\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.}$ также называется формулой замены переменных в не· определенном интеграле.

После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x.

Иногда целесообразно подбирать подстановку в виде $t = \varphi(x)$, тогда $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$, где $t = \varphi(x)$. Другими словами, формулу можно применять справа налево.

Пример 1. Найти $\int e^{\frac{x}{4}}\,dx$.

Решение: Положим $x = 4t$, тогда $dx = 4\,dt$. Следовательно,

$$\int e^{\frac{x}{4}}\,dx = 4\int e^{t}\,dt = 4e^{t} + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C.$$

Пример 2. Найти $\int x\cdot\sqrt{x-3}\,dx$.

Решение: Пусть $\sqrt{x-3} = t$, тогда $x = t^2 + 3$, $dx = 2t\,dt$. Поэтому

$$\int x\cdot\sqrt{x-3}\,dx = \int (t^2+3)\cdot t\cdot 2t\,dt =$$

$$= 2\int (t^4 + 3t^2)\,dt = 2\int t^4\,dt + 6\int t^2\,dt = 2\cdot\frac{t^5}{5} + 6\cdot\frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{5}(x-3)^{5/2} + 2(x-3)^{3/2} + C.$$

Пример 3. Получить формулу

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\,\right| + C.$$

❑ Обозначим $t = \sqrt{u^2+a^2} + u$ (подстановка Эйлера). Тогда

$$dt = \frac{2u}{2\sqrt{u^2+a^2}}\,du + du, \quad \text{т. е.} \quad dt = \frac{\sqrt{u^2+a^2}+u}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du.$$

Отсюда

$$\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{dt}{\sqrt{u^2+a^2}+u} = \frac{dt}{t}.$$

Стало быть,

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + C. \qquad \blacksquare$$

Пример 4. Найти $\int x \cdot (x+2)^{100}\,dx$.

❍ Решение: Пусть $x+2=t$. Тогда $x=t-2$, $dx=dt$. Имеем:

$$\int x\cdot(x+2)^{100}\,dx=\int(t-2)\cdot t^{100}\,dt=\int t^{101}\,dt-2\int t^{100}\,dt=$$

$$=\frac{t^{102}}{102}-2\cdot\frac{t^{101}}{101}+C=\frac{(x+2)^{102}}{102}-\frac{2(x+2)^{101}}{101}+C. \quad ●$$

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

❍ Решение: Обозначим $e^x=t$. Тогда $x=\ln t$, $dx=\frac{dt}{t}$. Следовательно,

$$\int\frac{dx}{e^x+1}=\int\frac{\frac{dt}{t}}{t+1}=\int\frac{dt}{t(t+1)}=\int\frac{dt}{t^2+t}=$$

$$=\int\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}=-\int\frac{d(t+\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})^2-(t+\frac{1}{2})^2}=-\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t-\frac{1}{2}}\right|+C=$$

$$=-\ln\left|\frac{t+1}{-t}\right|=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|=\ln\frac{e^x}{e^x+1}+C.$$

Здесь используется формула 16 таблицы основных интегралов. ●

Пример 6. $\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx = ?$ Сделаем подстановку $t = \sin x$; тогда $dt = \cos x \, dx$ и, следовательно, $\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx = \int \sqrt{t} \, dt = \int t^{1/2} \, dt = \frac{2t^{3/2}}{3} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C$.

Пример 7. $\int \frac{x \, dx}{1 + x^2} = ?$ Полагаем $t = 1 + x^2$; тогда $dt = 2x \, dx$ и $\int \frac{x \, dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t + C = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$.

Пример 8. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + (x/a)^2}$. Полагаем $t = \frac{x}{a}$; тогда $dx = a \, dt$, $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a \, dt}{1 + t^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.

Пример 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x/a)^2}}$. Полагаем $t = \frac{x}{a}$; тогда $dx = a \, dt$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{a \, dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C$ (предполагается, что $a > 0$).

В примерах 8. и 9. выведены формулы, приведенные в таблице интегралов

Пример 10. $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = ?$ Полагаем $t = \ln x$; тогда $dt = \dfrac{dx}{x}$,

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3\, dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C.$$

Пример 11. $\int \frac{x\, dx}{1+x^4} = ?$ Полагаем $t = x^2$; тогда $dt = 2x\, dx$,

$$\int \frac{x\, dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C.$$

Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$. Интегрируя это равенство, получим

$$\boxed{\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du \quad \text{или} \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du.}$$

Полученная формула называется ***формулой интегрирования по частям***. Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей u и dv (это, как правило, можно осуществить несколькими способами); затем, после нахождения v и du, используется формула интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}\,dx$, $\int P(x)\cdot\sin kx\,dx$, $\int P(x)\cos kx\,dx$, где $P(x)$ — многочлен, k — число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители.

2. Интегралы вида $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$. Удобно положить $P(x)\,dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx$, $\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx$, где a и b — числа. За u можно принять функцию $u = e^{ax}$.

Пример 6. Найти $\int (2x+1)e^{3x}\,dx$.

❍ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lcl} u = 2x+1 & \Longrightarrow & du = 2dx \\ dv = e^{3x}\,dx & \Longrightarrow & v = \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right]$ (можно положить $C=0$). Следовательно, по формуле интегрирования по частям:

$$\int (2x+1)e^{3x}\,dx = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}2\,dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$ ●

Пример 7. Найти $\int \ln x\,dx$.

❍ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lcl} u = \ln x & \Longrightarrow & du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = dx & \Longrightarrow & v = x \end{array}\right]$. Поэтому

$$\int \ln x\,dx = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\cdot\ln x - x + C.$$ ●

Пример 8. Найти $\int x^2 e^x\, dx$.

❍ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lll} u = x^2 & \Longrightarrow & du = 2x\, dx \\ dv = e^x\, dx & \Longrightarrow & v = e^x \end{array}\right]$. Поэтому

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2\int e^x \cdot x\, dx.$$

Для вычисления интеграла $\int e^x x\, dx$ снова применим метод интегрирования по частям: $u = x$, $dv = e^x\, dx \implies du = dx$, $v = e^x$. Значит,

$$\int e^x \cdot x\, dx = x \cdot e^x - \int e^x\, dx = x \cdot e^x - e^x + C.$$

Пример 9. Найти $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

❍ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lll} u = \operatorname{arctg} x & \Longrightarrow & du = \dfrac{1}{1+x^2}\, dx \\ dv = dx & \Longrightarrow & v = x \end{array}\right]$. Поэтому

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C. \quad ●$$

Пример 10. Требуется вычислить $\int \operatorname{arctg} x\,dx$. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$; тогда $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. Следовательно,

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C.$$

Пример 11. Требуется вычислить $\int (x^2 + 7x - 5)\cos 2x\,dx$. Положим $u = x^2 + 7x - 5$, $dv = \cos 2x\,dx$; тогда

$$du = (2x + 7)\,dx,\ v = \frac{\sin 2x}{2},$$

$$\int (x^2 + 7x - 5)\cos 2x\,dx = (x^2 + 7x - 5)\frac{\sin 2x}{2} - \int (2x + 7)\frac{\sin 2x}{2}\,dx.$$

Применим интегрирование по частям к последнему интегралу, принимая $u_1 = \frac{2x+7}{2}$, $dv_1 = \sin 2x\,dx$; тогда

$$du_1 = dx,\ v_1 = -\frac{\cos 2x}{2};$$

$$\int \frac{2x+7}{2}\sin 2x\,dx = \frac{2x+7}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \int\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)dx =$$
$$= -\frac{(2x+7)\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Поэтому окончательно

$$\int (x^2 + 7x - 5)\cos 2x\,dx = (x^2 + 7x - 5)\frac{\sin 2x}{2} + (2x + 7)\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + C =$$
$$= (2x^2 + 14x - 11)\frac{\sin 2x}{4} + (2x + 7)\frac{\cos 2x}{4} + C.$$

Пример 12. $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = ?$

Произведем тождественные преобразования. Умножим и разделим подынтегральную функцию на $\sqrt{a^2 - x^2}$:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int x \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Последний интеграл проинтегрируем по частям, полагая

$$u = x, \qquad du = dx,$$
$$dv = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad v = -\sqrt{a^2 - x^2};$$

тогда

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int x \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Подставляя последний результат в полученное ранее выражение данного интеграла, будем иметь:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Перенося интеграл справа налево и выполнив элементарные преобразования, окончательно получим:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Пример 13. Вычислить интегралы

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx \text{ и } I_2 = \int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

Применяя метод интегрирования по частям к первому интегралу, получим:

$$u = e^{ax},\ du = ae^{ax}\,dx,$$
$$dv = \cos bx\,dx,\ v = \frac{1}{b}\sin bx,$$
$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

К последнему интегралу снова применим метод интегрирования по частям:

$$u = e^{ax},\ du = ae^{ax}\,dx,$$
$$dv = \sin bx\,dx,\ v = -\frac{1}{b}\cos bx,$$
$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Подставляя полученное выражение в предыдущее равенство, получим:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Найдем из последнего равенства I_1:

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx + \frac{a}{b^2}\cos bx\right) + C\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right),$$

откуда

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + C.$$

Аналогично находим:

$$I_2 = \int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C.$$