Математика

Применение тригонометрии в геометрических задачах

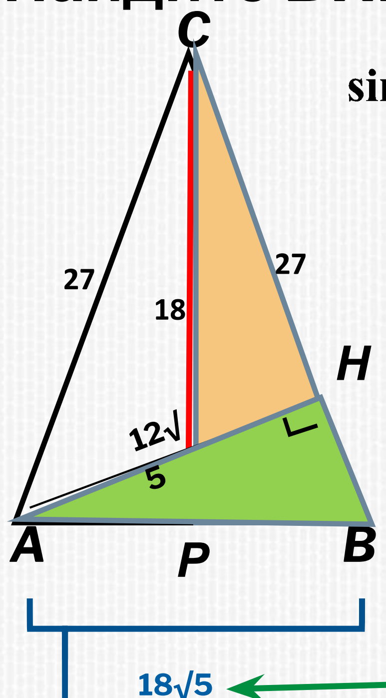
$$1+\mathrm{ctg}^2 ABC = \frac{1}{\sin^2 ABC}$$

$$\sin BAC = \frac{2}{3}$$

1.1 ПРОТОТИП №27327. 1 СПОСОБ РЕШЕНИЯ

В треугольнике ABC AC=BC=27, AH — высота, $\sin BAC = \dfrac{2}{3}$. Найдите BH.

1 способ решения:



$$\sin BAC = \boxed{\sin ABC = \frac{2}{3}}\ \text{т.к.} \angle BAC = \angle ABC,$$

Δ ABC - равнобедренный

CP – высота в равнобедренном треугольнике.

$$\Delta BCP : \sin \mathrm{ABC} = \frac{CP}{CB} = \frac{CP}{27} = \frac{2x}{3x} \Rightarrow 3x = 27 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow CP = 18$$

Используем теорему Пифагора для прямоугольного ΔCPB:

$$PB = \sqrt{27^2 - 18^2} = \sqrt{(27-18)(27+18)} = \sqrt{9 \cdot 45} = 9\sqrt{5} \Rightarrow AB = 18\sqrt{5}$$

$$\Delta ABH : \sin ABC = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{18\sqrt{5}} = \frac{2x}{3x} \Rightarrow x = 6\sqrt{5} \Rightarrow AH = 12\sqrt{5}$$

По теореме Пифагора:

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{(18\sqrt{5})^2 - (12\sqrt{5})^2} =$$

$$= \sqrt{(6^2 \cdot 3^2 \cdot 5) - (6^2 \cdot 2^2 \cdot 5)} = \sqrt{(6^2 \cdot 5) \cdot (9-4)} = 30$$

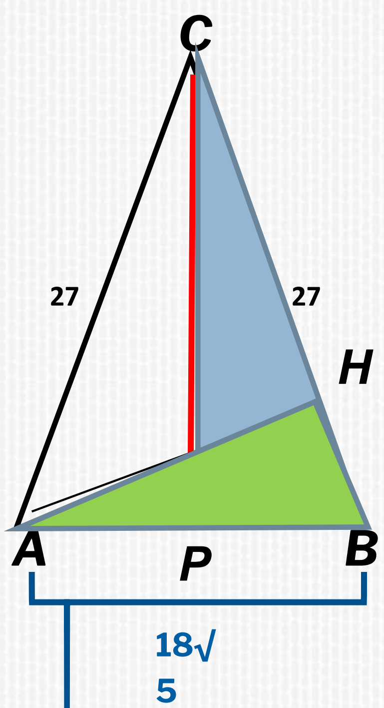
Ответ: 30

CB<HB => ΔABC - тупоугольный

Смотри 2 способ решения:

1.1 ПРОТОТИП №27327. 2 СПОСОБ РЕШЕНИЯ

В треугольнике ABC AC=BC=27, AH — высота, $\sin BAC = \frac{2}{3}$. Найдите BH.



2 способ решения:

$$\sin BAC = \sin ABC = \frac{2}{3} \quad (\angle BAC = \angle ABC)$$

$$\cos BAC = \cos ABC;$$

$$\cos^2 ABC = 1 - \sin^2 ABC \Rightarrow \boxed{\cos ABC} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

$$\Delta BCP: \boxed{\cos ABC} = \frac{PB}{CB} = \frac{PB}{27} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{3}} \Rightarrow PB = 9\sqrt{5} \Rightarrow AB = 18\sqrt{5}$$

$$\Delta ABH: \boxed{\cos ABC} = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{18\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{3}} \Rightarrow BH = 30.$$

CB<HB => ΔABC - тупоугольный

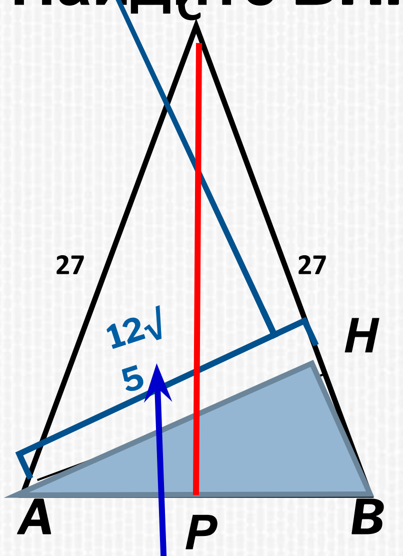
Ответ: 30

Смотри 3 способ решения:

1.1 ПРОТОТИП №27327. З СПОСОБ РЕШЕНИЯ

В треугольнике ABC AC=BC=27, AH — высота, $\sin BAC = \frac{2}{3}$ **.**

Найдите BH.



3 способ решения:

$$\sin BAC = \sin ABC = \frac{2}{3}\ т.к. \angle BAC = \angle ABC;$$

$$\Delta ABH:\ \sin ABC = \frac{AH}{AB} = \frac{2x}{3x} = \frac{AH}{18\sqrt{5}} \Rightarrow x = 6\sqrt{5} \Rightarrow AH = 12\sqrt{5}$$

$$1 + ctg^2 ABC = \frac{1}{\sin^2 ABC}$$

$$1 + ctg^2 ABC = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} \Rightarrow ctg^2 ABC = \frac{1}{\frac{4}{9}} - 1;$$

$$ctg^2 ABC = \frac{5}{4} \Rightarrow ctg ABC = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\Delta ABH:\ ctg ABC = \frac{BH}{AH} = \frac{\sqrt{5}x}{2x}.$$

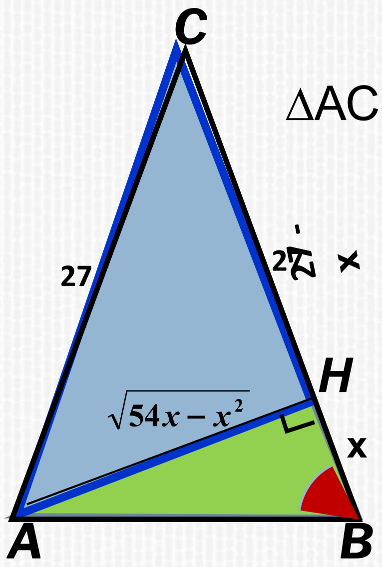
$$\frac{BH}{AH} = \frac{BH}{12\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}x}{2x} \Rightarrow 12\sqrt{5} = 2x \Rightarrow x = 6\sqrt{5}$$

$$BH = \sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5} = 30$$

Ответ: 30

1.1 ПРОТОТИП №27327. 4 СПОСОБ РЕШЕНИЯ

В треугольнике ABC AC=BC=27, AH — высота, $\sin BAC = \frac{2}{3}$. Найдите BH.



4 способ решения:

Надо найти BH. Пусть BH = x Тогда CH = 27 - x

ΔACH – прямоугольный. Используя теорему Пифагора выразим AH.

$AH^2 = AC^2 - CH^2;$ $AH^2 = 27^2 - (27-x)^2$ $AH^2 = \cancel{27}^2 - \cancel{27}^2 + 54x - x^2$

$AH^2 = 54x - x^2;$ Δ ABC - равнобедренный

$\boxed{\sin BAC = \sin ABC = \frac{2}{3}}$ т.к. $\angle BAC = \angle ABC$,

Рассмотрим Δ ABH Найдём cosABH;

$$\cos ABH = \sqrt{1 - \sin^2 ABH}$$

$$\cos ABH = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3};$$

$$\text{tg}ABH = \frac{\sin ABH}{\cos ABH} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Т.к. $\text{tg}ABH = \frac{BH}{AH}$, то $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{54x - x^2}}{x}$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{54x - x^2} = 2x$$

$5(54x - x^2) = 4x^2;$ $x(9x - 270) = 0$

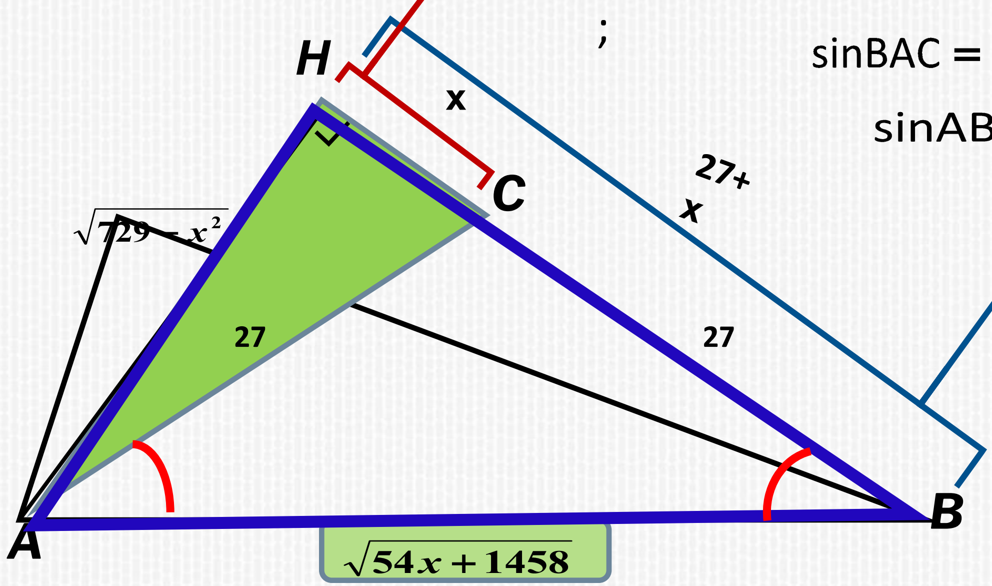
$x \neq 0 \Rightarrow x = 30$

Ответ: 30

1.1 ПРОТОТИП №27327. 5 СПОСОБ РЕШЕНИЯ

В треугольнике ABC AC=BC=27, AH — высота, $\sin BAC = \frac{2}{3}$. Найдите BH.

5 способ решения:



Пусть CH = x, то BH = 27 + x ;

В $\triangle$ ACH: $AH^2 = AC^2 - CH^2$; $AH^2 = 27^2 - x^2$;

$AH^2 = 729 - x^2$;

$AH = \sqrt{729 - x^2}$

$\sin BAC = \sin ABC = \frac{2}{3}$, ($\angle BAC = \angle ABC$)

$\sin ABC = \frac{AH}{AB}$;

$AB^2 = AH^2 + HB^2$;

$AB^2 = 729 - x^2 + (27 + x)^2$;

$AB^2 = 729 - \cancel{x^2} + 729 + 54x + \cancel{x^2}$;

$AB^2 = 54x + 1458$;

$$\frac{\sqrt{729 - x^2}}{AB} = \boxed{\frac{\sqrt{729 - x^2}}{\sqrt{54x + 1458}} = \frac{2}{3}};$$

$$\frac{729 - x^2}{54x + 1458} = \frac{4}{9};$$

$(729-x^2)9 = 4(54x+1458)$; $x^2 + 24x - 81 = 0$;

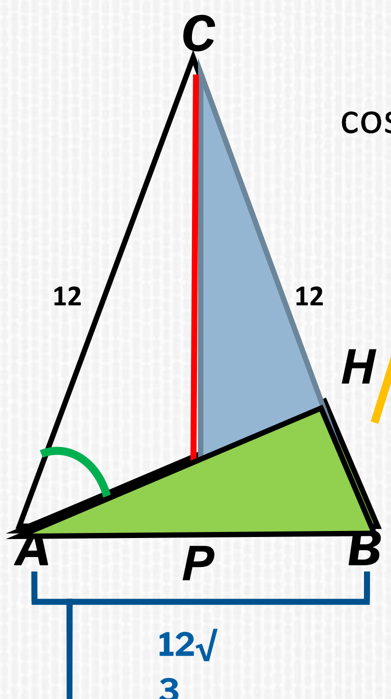
Ответ: 30

П теореме Виета: $x_1 = -27$(постор.корень) и $x_2 = 3$.

BH = 27+3 = 30

2.1

В треугольнике ABC AC=BC=12, AH — высота, $\sin BAC = \frac{1}{2}$
Найдите BH.



$$\sin BAC = \sin ABC = \frac{1}{2} \quad (\angle BAC = \angle ABC)$$

$$\cos ABC = \cos ABH = \frac{BH}{AB}.$$

Итак:

$$\cos ABH = \frac{BH}{AB};$$

$$\cos^2 ABC = 1 - \sin^2 ABC \Rightarrow \boxed{\cos ABC} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{AB}}$$

Найдем AB. Рассмотрим прямоугольный ΔBCP.

$$\Delta BCP: \boxed{\cos ABC} = \frac{PB}{CB} = \frac{PB}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow PB = 6\sqrt{3} \Rightarrow AB = 12\sqrt{3}$$

$$\Delta ABH: \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{12\sqrt{3}}} \Rightarrow BH = 6\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} \Rightarrow BH = 18.$$

CB<HB => ΔABC - тупоугольный

Ответ: 18

2 способ решение этой задачи:

2.2

В треугольнике ABC AC=BC=12, AH — высота, $\sin BAC = \dfrac{1}{2}$. Найдите BH.

2 способ решения:

$$\sin BAC = \sin ABC = \frac{1}{2}$$

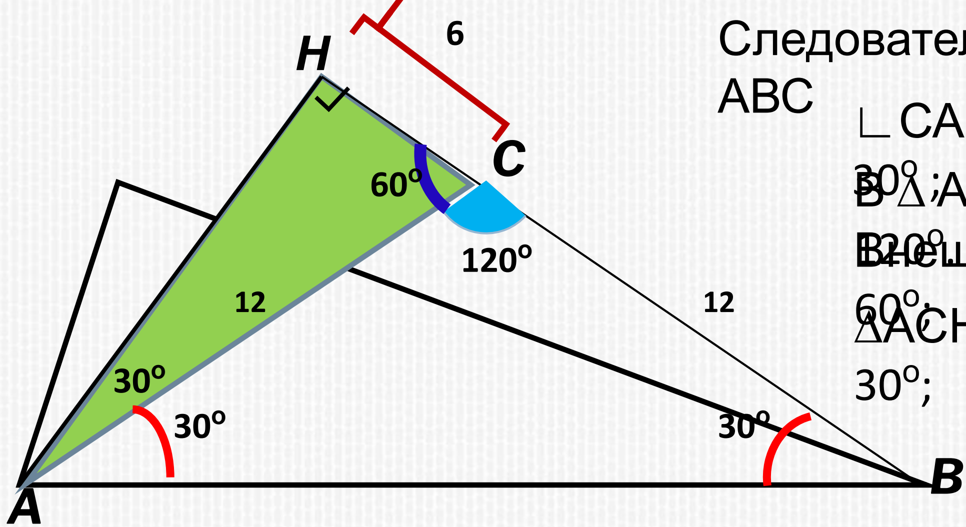
Следовательно в равнобедренном Δ ABC

$\angle CAB = \angle CBA = 30^o$;

В Δ ABC: $\angle ACB = 180^o - 2 \cdot 30^o = 120^o$;

Внешний угол: $\angle ACH = 180^o - 120^o = 60^o$;

ΔACH – прямоугольный: $\angle CAH = 30^o$;



Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы

CH = 6;

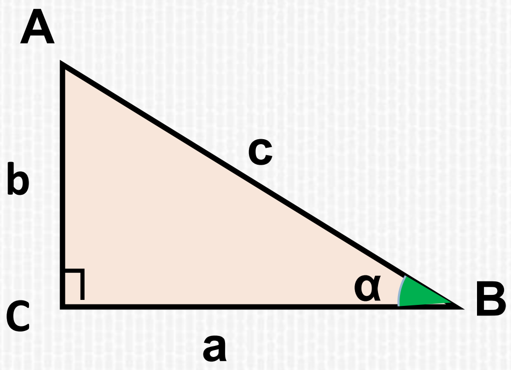
BH = BC + CH = 12 + 6 =18.

Ответ: 18

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ №1

Прямоугольный треугольник – треугольник, один из углов которого прямой.

Сторона **с**, лежащая против прямого угла, - ***гипотенуза***. Стороны **а** и **в** - катеты



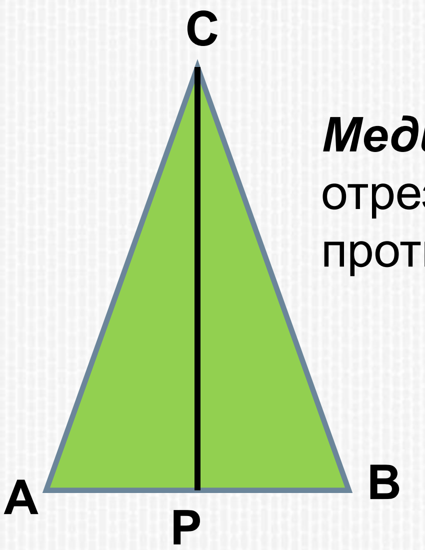
$$\sin\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ №2

1. **В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.**
2. **В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является и медианой, и биссектрисой.**



CP – высота, медиана, биссектриса.

Медиана треугольника, проведенная из данной вершины - отрезок прямой, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей стороны треугольника

Высота **CP** разделила Δ **ABC** на два равных **прямоугольных треугольника**

Теоретические сведения №3

Основное тригонометрическое тождество

1. $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

2. $$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

СКОРО ЕГЭ!

- **Еще есть время подготовиться!**