

# Математик а

## Применение тригонометрии в геометрических задачах

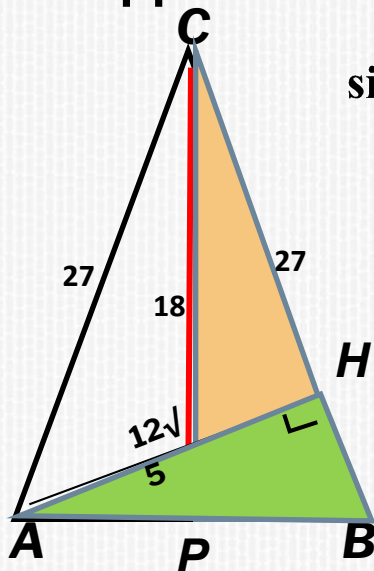
$$1 + \operatorname{ctg}^2 A \sin^2 B \sin^2 C = \frac{2}{\sin^2 A} \frac{1}{\sin^2 B \sin^2 C}$$

# 1.1 ПРОТОТИП №27327. 1 СПОСОБ РЕШЕНИЯ

В треугольнике ABC AC=BC=27, AH — высота,  $\sin A = \frac{2}{3}$

Найдите BH.

1 способ



решения:  
 $\sin BAC = \sin ABC = \frac{2}{3}$  т.к.  $\angle BAC = \angle ABC$ ,  $\triangle ABC$  - равнобедренный

CP — высота в равнобедренном треугольнике.

$$\triangle BCP : \sin ABC = \frac{CP}{CB} = \frac{CP}{27} = \frac{2x}{3x} \Rightarrow 3x = 27 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow CP = 18$$

Используем теорему Пифагора для прямоугольного  $\triangle CPB$

$$PB = \sqrt{27^2 - 18^2} = \sqrt{(27-18)(27+18)} = \sqrt{9 \cdot 45} = 9\sqrt{5} \Rightarrow AB = 18\sqrt{5}$$

$$\triangle ABH : \sin ABC = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{18\sqrt{5}} = \frac{2x}{3x} \Rightarrow x = 6\sqrt{5} \Rightarrow AH = 12\sqrt{5}$$

$18\sqrt{5}$

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{(18\sqrt{5})^2 - (12\sqrt{5})^2} =$$

$$= \sqrt{(6^2 \cdot 3^2 \cdot 5) - (6^2 \cdot 2^2 \cdot 5)} = \sqrt{(6^2 \cdot 5) \cdot (9 - 4)} = 30$$

**Ответ: 30**

По теореме Пифагора:

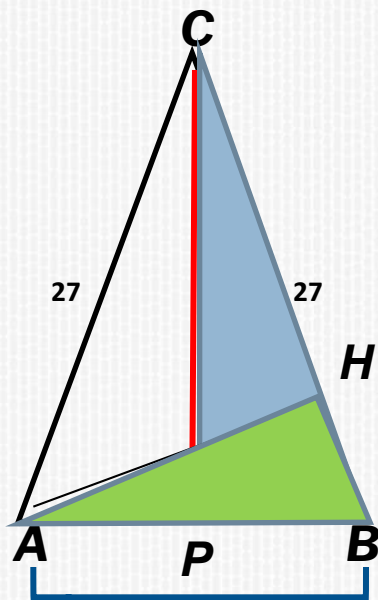
$CB < HB \Rightarrow \triangle ABC$  - тупоугольный

Смотри 2 способ решения:



# 1.1 ПРОТОТИП №27327. 2 СПОСОБ РЕШЕНИЯ

В треугольнике ABC AC=BC=27, AN — высота,  $\cos C = \frac{2}{3}$   
 Найдите BH.



2 способ

решения:

$$\sin \angle BAC = \sin \angle ABC = \frac{2}{3} \quad (\angle BAC = \angle ABC)$$

$$\cos \angle BAC = \cos \angle ABC;$$

$$\cos^2 \angle ABC = 1 - \sin^2 \angle ABC \Rightarrow \cos \angle ABC = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\Delta BCP: \cos \angle ABC = \frac{PB}{CB} = \frac{PB}{27} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow PB = 9\sqrt{5} \Rightarrow AB = 18\sqrt{5}$$

$$\Delta ABH: \cos \angle ABC = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{18\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow BH = 30.$$

$CB < HB \Rightarrow \Delta ABC$  - тупоугольный

Смотри 3 способ решения:

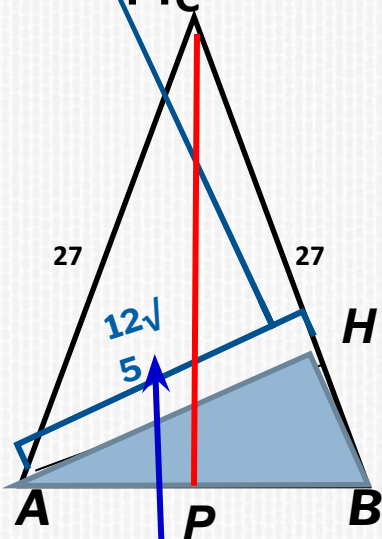
**Ответ: 30**



# 1.1 ПРОТОТИП №27327. 3 СПОСОБ РЕШЕНИЯ

В треугольнике ABC AC=BC=27, AH — высота,  $\sin A = \frac{2}{3}$ .

Найдите BH.



3 способ

решения:

$$\sin BAC = \sin ABC = \frac{2}{3} \text{ т.к. } \angle BAC = \angle ABC;$$

$$\Delta ABH : \sin ABC = \frac{AH}{AB} = \frac{2x}{3x} = \frac{AH}{18\sqrt{5}} \Rightarrow x = 6\sqrt{5} \Rightarrow AH = 12\sqrt{5}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 ABC = \frac{1}{\sin^2 ABC}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 ABC = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} \Rightarrow \operatorname{ctg}^2 ABC = \frac{1}{4} - 1;$$

$$\operatorname{ctg}^2 ABC = \frac{5}{4} \Rightarrow \operatorname{ctg} ABC = \frac{\sqrt{5}}{2}. \quad \Delta ABH : \operatorname{ctg} ABC = \frac{BH}{AH} = \frac{\sqrt{5}x}{2x}$$

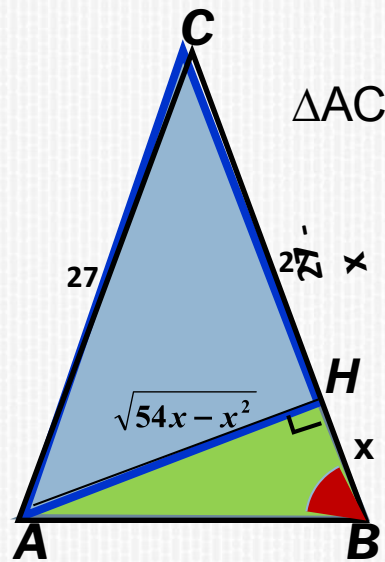
$$\frac{BH}{AH} = \frac{BH}{12\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}x}{2x} \Rightarrow 12\sqrt{5} = 2x \Rightarrow x = 6\sqrt{5}$$

$$BH = \sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5} = 30$$

Ответ: 30

# 1.1 ПРОТОТИП №27327. 4 СПОСОБ РЕШЕНИЯ

В треугольнике ABC AC=BC=27, AH — высота,  $\sin BAC = \frac{2}{3}$   
 Найдите BH.



4 способ решения:  
 Надо найти BH. Пусть BH = x Тогда CH = 27 - x  
 ΔACH — прямоугольный. Используя теорему Пифагора выразим AH.

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 \quad AH^2 = 27^2 - (27-x)^2 \quad AH^2 = 27^2 - 27^2 + 54x - x^2$$

$$AH^2 = 54x - x^2 \quad \Delta ABC - \text{равнобедренный}$$

$$\sin BAC = \sin ABC = \frac{2}{3} \quad \text{т.к. } \angle BAC = \angle ABC,$$

Рассмотрим Δ ABH  
 $\cos ABH = \sqrt{1 - \sin^2 ABH}$

$$\cos ABH = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Найдём cos ABH;

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{54x - x^2}}{x}$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{54x - x^2} = 2x$$

$$5(54x - x^2) = 4x \quad x(9x - 270) = 0$$

$$x \neq 0 \Rightarrow x = 30$$

$$\operatorname{tg} ABH = \frac{\sin ABH}{\cos ABH} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Т.к.  $\operatorname{tg} ABH = \frac{BH}{AH}$ ,

**Ответ: 30**

# 1.1 ПРОТОТИП №27327. 5 СПОСОБ РЕШЕНИЯ

В треугольнике ABC AC=BC=27, AH — высота,  $AC = \frac{2}{3}$   
 Найдите BH.

5 способ

решения:

Пусть CH = x, то BH = 27 + x;

В  $\triangle ACH$ :  $AH^2 = AC^2 - CH^2$ ;  $AH^2 = 27^2 - x^2$ ;

$AH^2 = 729 - x^2$

$AH = \sqrt{729 - x^2}$

$\sin BAC = \sin ABC = \frac{2}{3}$  ( $\angle BAC = \angle ABC$ )

$\sin ABC = \frac{AH}{AB}$

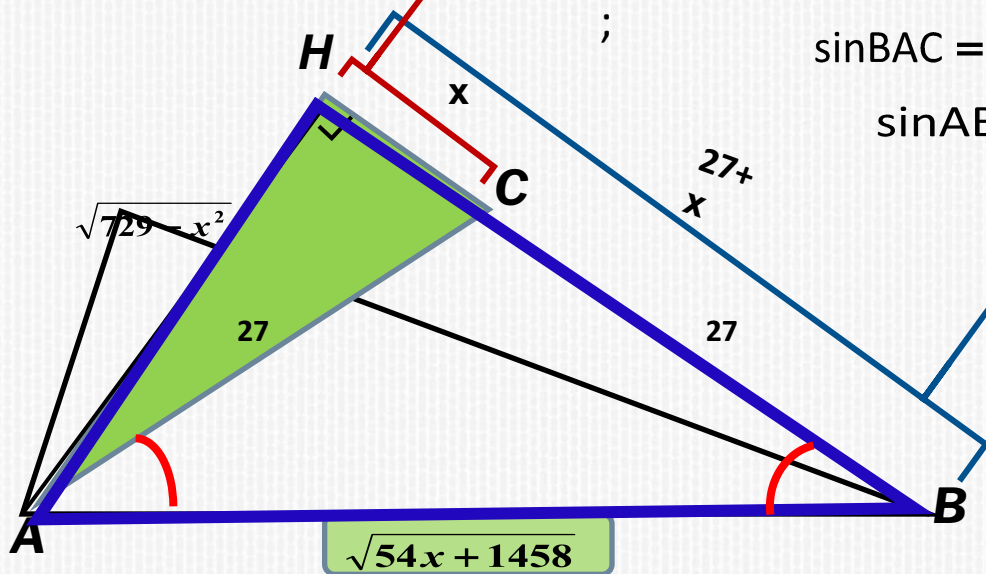
$AB^2 = AH^2 + HB^2$

$AB^2 = 729 - x^2 + (27 + x)^2$

$AB^2 = 729 - x^2 + 729 + 54x + x^2$ ;

$AB^2 = 54x + 1458$ ;

$\frac{\sqrt{729 - x^2}}{AB} = \frac{\sqrt{729 - x^2}}{\sqrt{54x + 1458}} = \frac{2}{3}$



$\frac{729 - x^2}{54x + 1458} = \frac{4}{9}$ ;  $(729 - x^2)9 = 4(54x + 1458)$ ;  $x^2 + 24x - 81 = 0$ ;

По теореме Виета:  $x_1 = -27$  (постор. корень) и  $x_2 = 3$ .

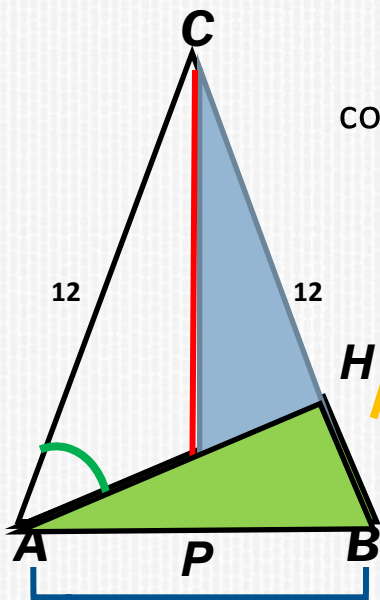
$BH = 27 + 3 = 30$

Ответ: 30



# 2.1

В треугольнике  $ABC$   $AC=BC=12$ ,  $AH$  — высота,  $\cos B, AC = \frac{1}{2}$   
 Найдите  $BH$ .



$$\sin BAC = \sin ABC = \frac{1}{2} \quad (\angle BAC = \angle ABC)$$

$$\cos ABC = \cos ABH = \frac{BH}{AB}$$

Итак  
:

$$\cos ABH = \frac{BH}{AB}$$

$$\cos^2 ABC = 1 - \sin^2 ABC \Rightarrow \cos ABC = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{AB}$$

Найдем  $AB$ . Рассмотрим прямоугольный  $\triangle BCP$ .

$$\triangle BCP: \cos ABC = \frac{PB}{CB} = \frac{PB}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow PB = 6\sqrt{3} \Rightarrow AB = 12\sqrt{3}$$

$$\triangle ABH: \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{12\sqrt{3}} \Rightarrow BH = 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow BH = 18$$

$CB < HB \Rightarrow \triangle ABC$  — тупоугольный

2 способ решение этой задачи:

**Ответ:**

## 2.2

В треугольнике  $ABC$   $AC=BC=12$ ,  $AH$  — высота,  $\angle C = 120^\circ$ .  
Найдите  $BH$ .

2 способ  
решения:

$$\sin \angle BAC = \sin \angle ABC = \frac{1}{2}$$

Следовательно в равнобедренном  $\triangle ABC$

$$\angle CAB = \angle CBA =$$

$$30^\circ; \triangle ABC: \angle ACB = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ =$$

$$120^\circ$$

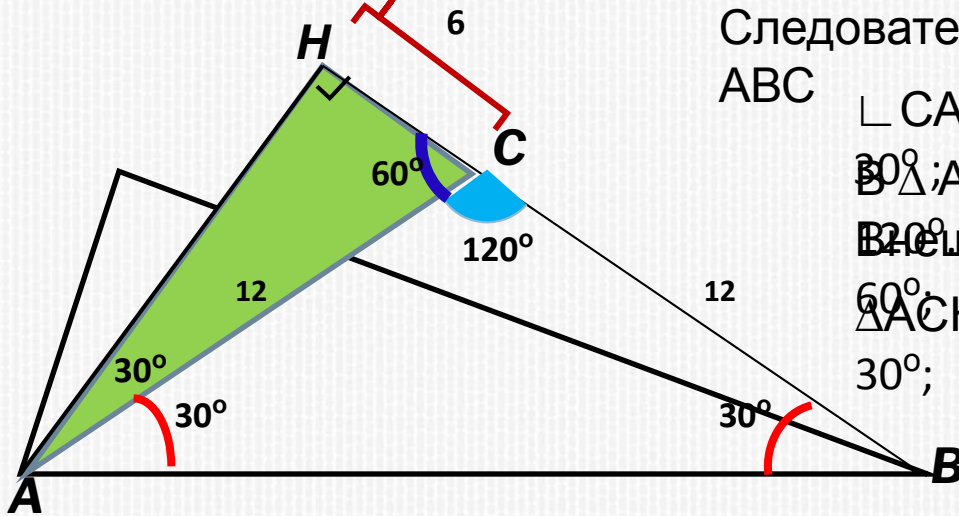
$$\triangle ACH - \text{прямоугольный: } \angle CAH =$$

$$30^\circ;$$

Катет прямоугольного  
треугольника,  
лежащий против угла в  $30^\circ$ , равен  
половине гипотенузы

$$CH = 6; \quad BH = BC + CH = 12 + 6 = 18.$$

**Ответ:**  
**18**

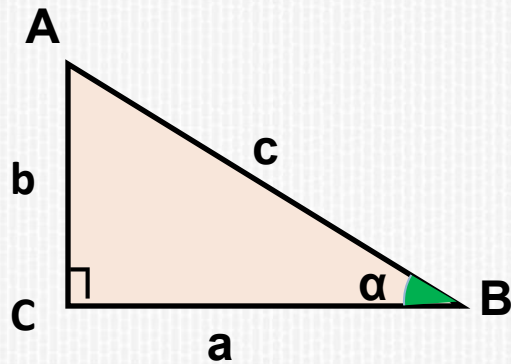




# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ №1

Прямоугольный треугольник – треугольник, один из углов которого прямой.

Сторона **c**, лежащая против прямого угла, - **гипотенуза**. Стороны **a** и **b** - катеты



$$\sin \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tga} = \frac{b}{a}$$

# ? ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ №2

1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.
2. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является и медианой, и биссектрисой.



CP – высота, медиана,  
биссектриса.

**Медиана** треугольника, проведенная из данной вершины - отрезок прямой, соединяющий эту вершину с серединой противоположащей стороны треугольника

Высота **CP** разделила  $\triangle ABC$  на два равных прямоугольных треугольника



# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ №3

## Основное тригонометрическое тождество

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$2. 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$



**СКОРО ЕГЭ!**

**▣ Еще есть время  
подготовиться!**

