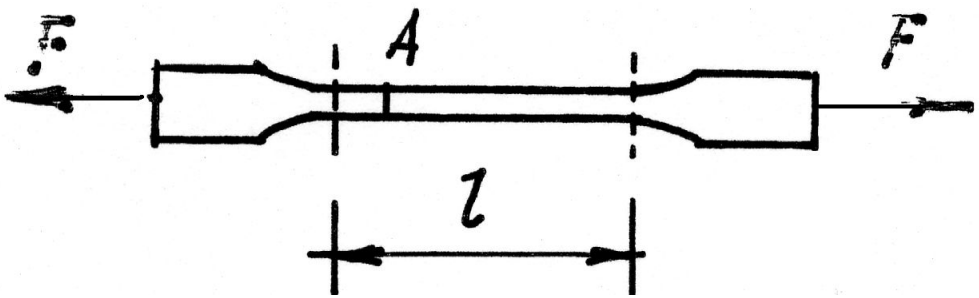
VZTAH MEZI NAPĚTÍM A DEFORMACÍ
FYZIKÁLNÍ ROVNICE

Vztahy mezi složkami napětí $\{\sigma\}$ a složkami deformace $\{\varepsilon\}$.
Určeny experimentálně, vyjadřují fyzikální vlastnosti materiálu.

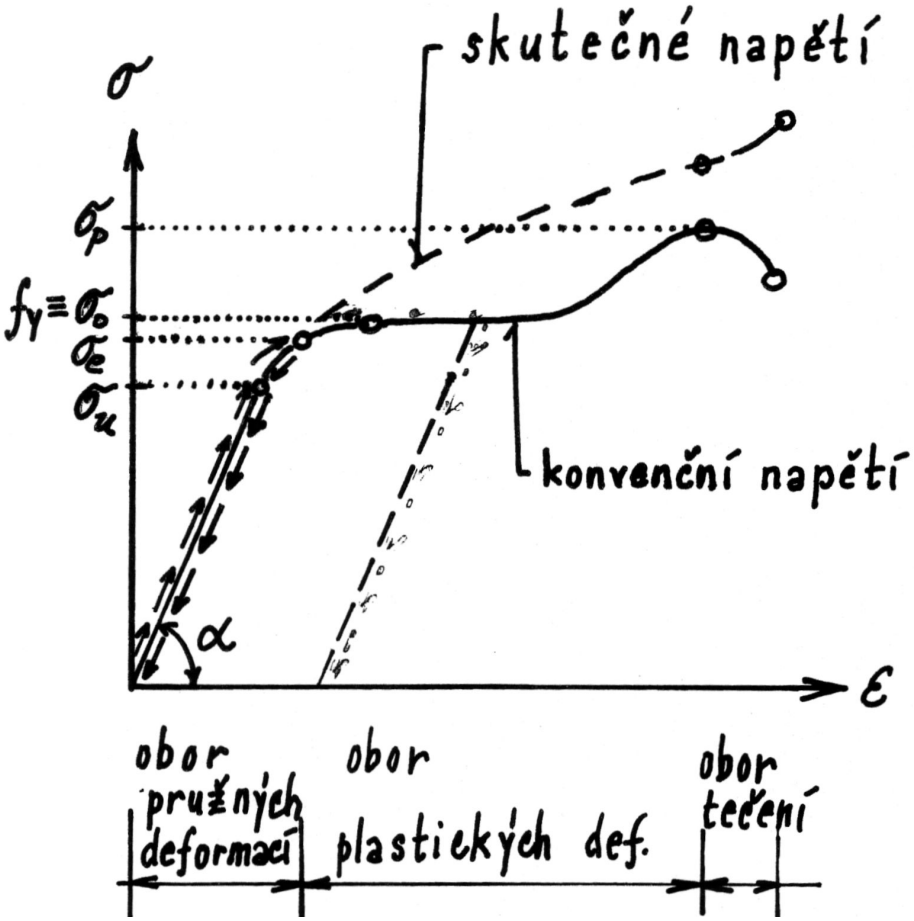
- **Jednoosá napjatost**
  tahová zkouška ▸▸ pracovní diagram



$$\sigma = \frac{F}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Fyzikální rovnice

Příklad : pracovní diagram oceli



σ_u - mez úměrnosti

σ_e - mez pružnosti (elasticity)

$\sigma_0 \equiv f_y$ - mez kluzu (plasticity) (tečení)

σ_p - mez pevnosti

Fyzikální rovnice

Hookeův zákon

Platí pouze v pružné oblasti až do meze úměrnosti $(\sigma \leq \sigma_u)$

$$\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon}$$

$E = tg\alpha$ [Pa]… Youngův modul pružnosti

ocel: $2{,}1.10^5$ MPa

beton: $2{,}1.10^4$ MPa

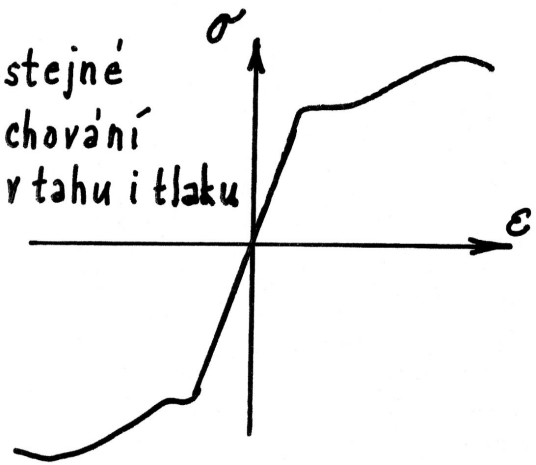
dřevo: 10^4 MPa

Zeminy (porézní materiál) – E=25 MPa

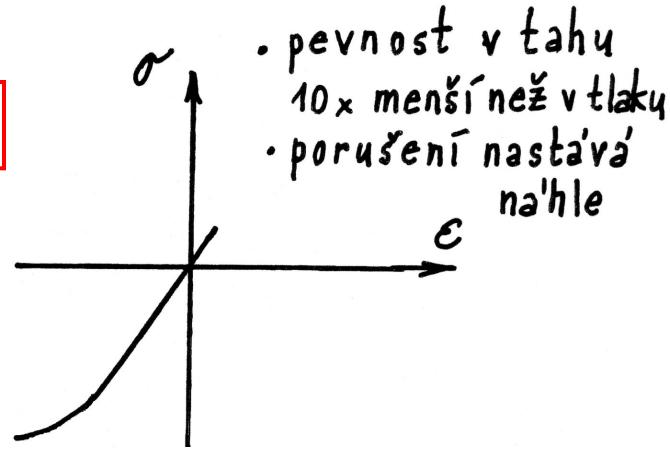
Fyzikální rovnice – pracovní diagramy

Příklady

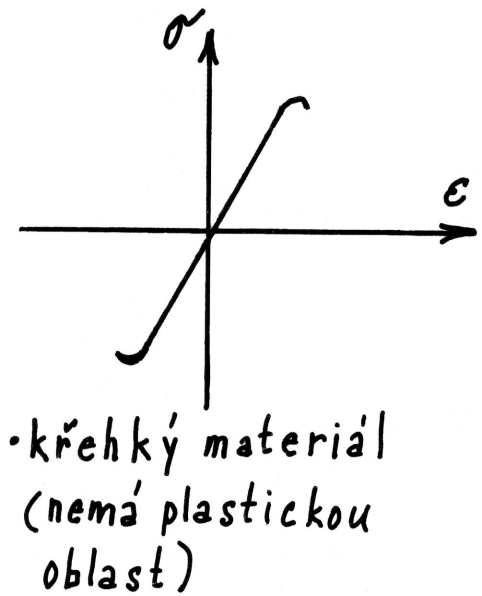
Ocel



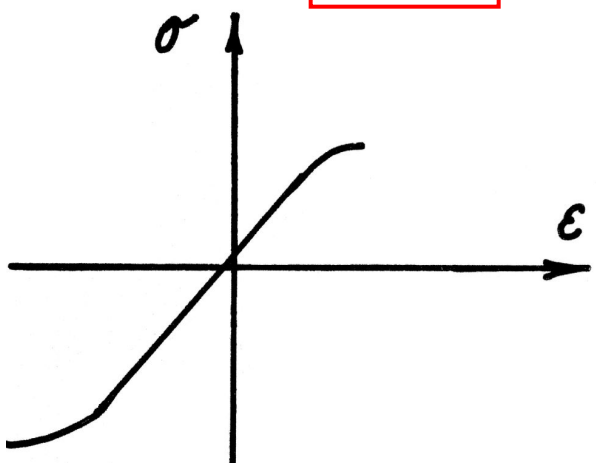
Beton



Litina

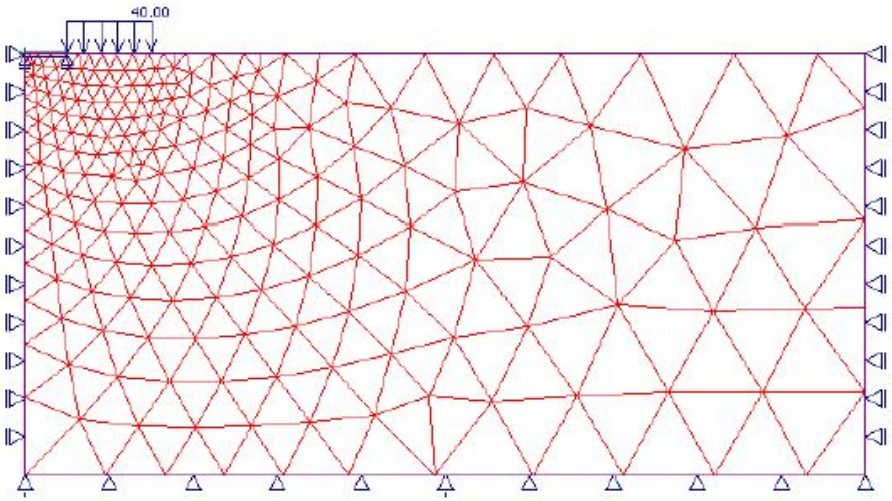


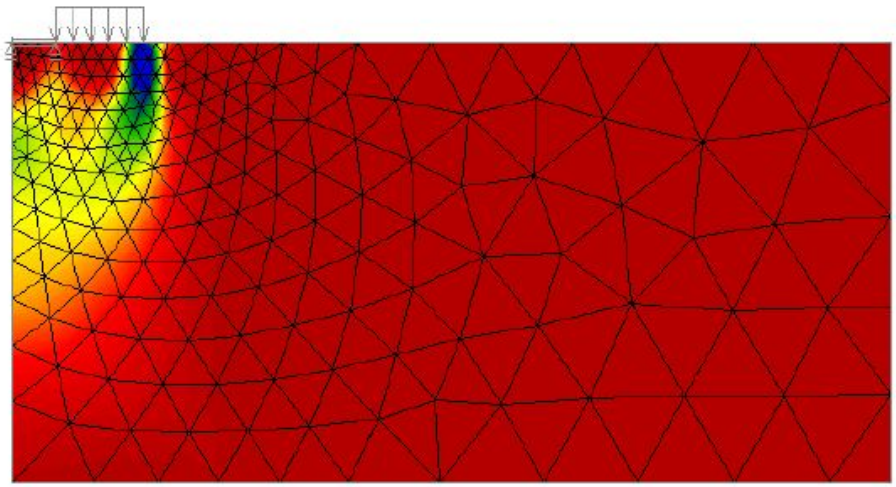
Dřevo

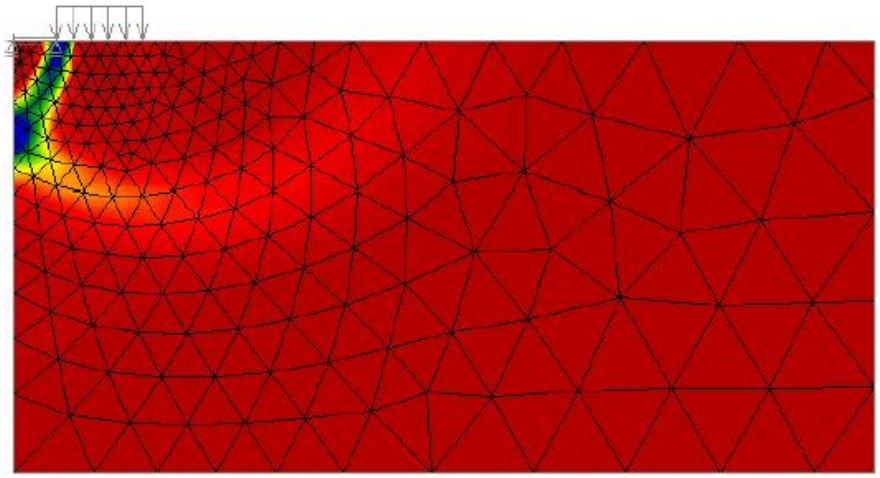


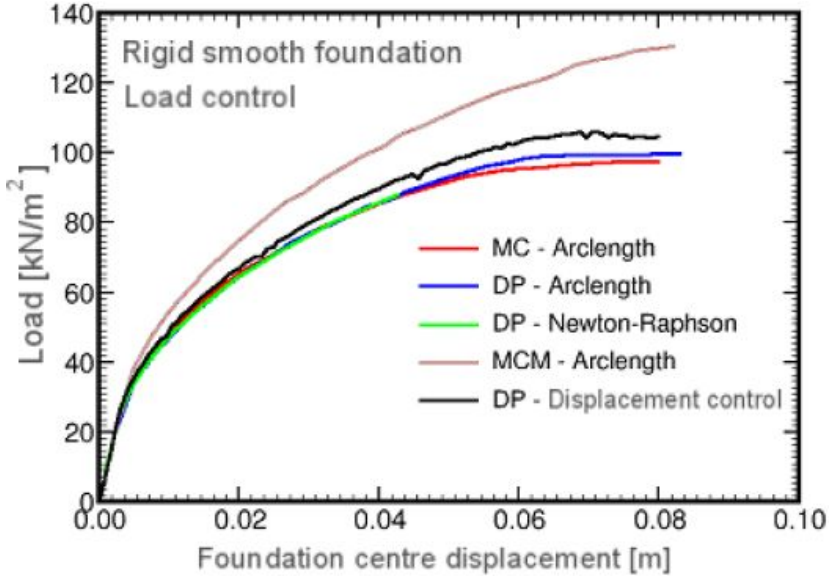
Fyzikální rovnice – trvalé plastické deformace

Příklady – zatížení základového pasu



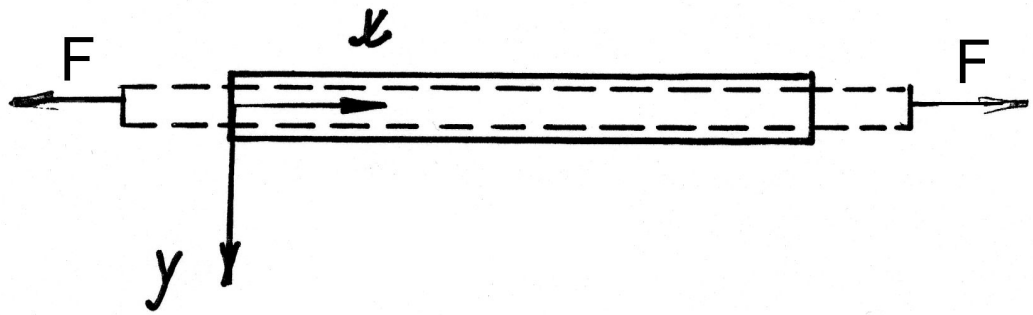






Fyzikální rovnice – trojosá napjatost

- Rozšířený Hookeův zákon – platí v lineárně pružné oblasti
- Vliv příčné kontrakce – zúžení při tahové zkoušce



$$\sigma_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_z = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E}$$

ν …[-] Poissonovo číslo (součinitel příčné kontrakce)

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \qquad 0 \le \nu \le 0{,}5$$

ocel: $\nu \approx 0{,}3$

beton: $\nu \approx 0{,}15$

Fyzikální rovnice – trojosá napjatost

$$\sigma_y \;\blacktriangleright\!\!\blacktriangleright\; \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \qquad \varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} \qquad \varepsilon_z = -\nu \cdot \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\sigma_z \;\blacktriangleright\!\!\blacktriangleright\; \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \qquad \varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} \qquad \varepsilon_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_z}{E}$$

Vliv změny teploty na relativní protažení:

$$\varepsilon_x^t = \varepsilon_y^t = \varepsilon_z^t = \alpha t$$

α [K^{-1}] … součinitel teplotní roztažnosti

t [K] … změna teploty

(ocel, beton: $\alpha = 12.10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$)

Fyzikální rovnice – rozšířený Hookeův zákon

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z\right) + \alpha t$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x\right) + \alpha t$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y\right) + \alpha t$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

$$\varepsilon = C\sigma + \varepsilon_0$$

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0)$$

$$C = D^{-1}$$

C – (6x6) matice poddajnosti

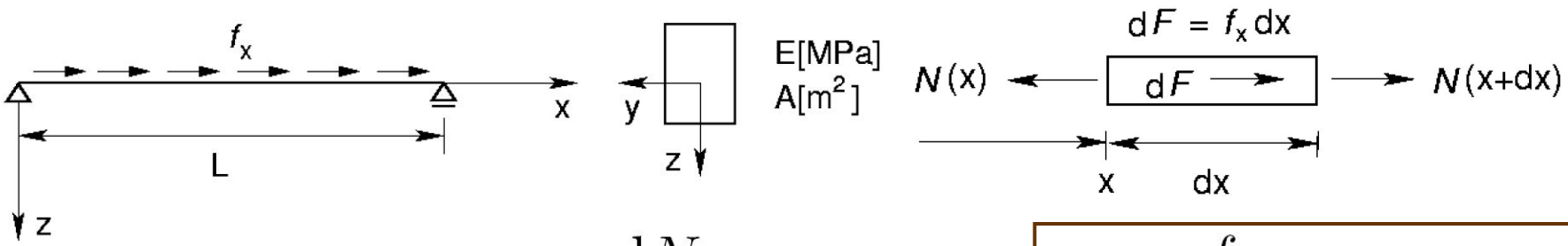
D – (6x6) matice tuhosti

G [Pa] … modul pružnosti ve smyku

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$ (jen 2 konstanty nezávislé)

PŘÍKLAD: deformační varianta teorie pružnosti v 1D

Zadání : určete posun bodů střednice prostě podepřeného přímého prutu zatíženého rovnoměrným spojitým zatížením



- podmínka rovnováhy $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} + f_x = 0 \rightarrow \boxed{u = \dfrac{f_x}{2EA}(2Lx - x^2)}$
- fyzikální rovnice $N = EA\varepsilon$
- geometrické rovnice $\varepsilon = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

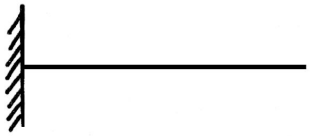
Diferenciální podmínka rovnováhy $\boxed{EAu'' + f_x = 0}$

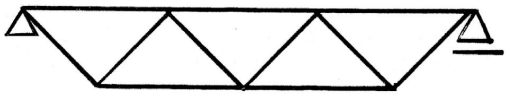
Okrajové podmínky $u(0) = 0 \quad u'(L) = 0 \ldots (N = 0)$

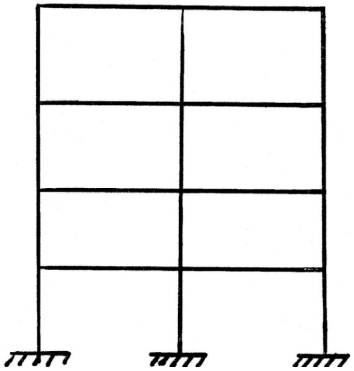
ANALÝZA PRUTŮ

Základní pojmy a definice

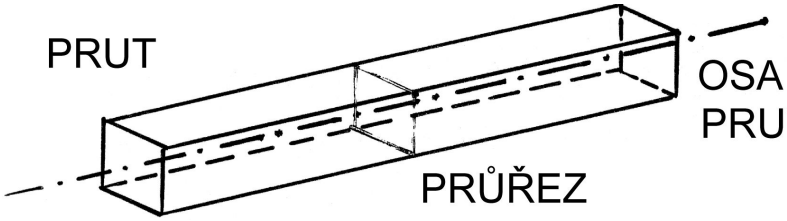
PRUTOVÉ KONSTRUKCE







PRUT

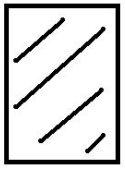


Základní algoritmus:

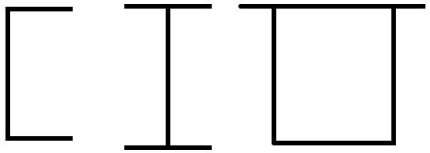
- Stanovení vnitřních sil v průřezech (statika)
- Výpočet napětí a deformací v bodech průřezů (pružnost a pevnost)

PRŮŘEZY

Masivní



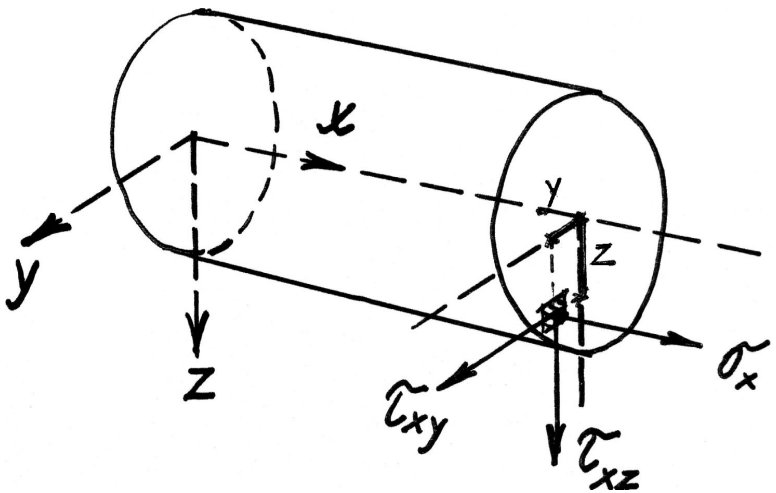
Tenkostěnné



Integrální definice vnitřních sil

Složky napětí v průřezu prutu

$$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$$



Vnitřní síly v průřezu prutu

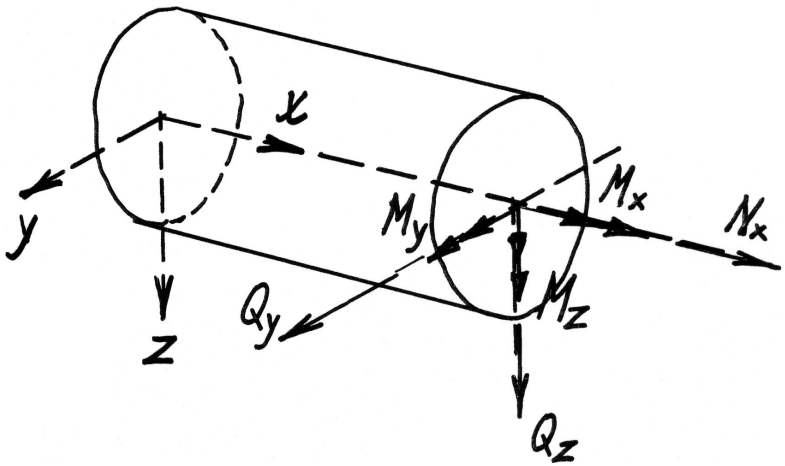
$$N_x,\ Q_y,\ Q_z \qquad M_x,\ M_y,\ M_z$$

Vnitřní síly – výslednice napětí

$$N_x = \iint_A \sigma_x \mathrm{d}A \qquad M_x = \iint_A \left(\tau_{xz} y - \tau_{xy} z\right) \mathrm{d}A$$

$$Q_y = \iint_A \tau_{xy} \mathrm{d}A \qquad M_y = \iint_A \sigma_x z \mathrm{d}A$$

$$Q_z = \iint_A \tau_{xz} \mathrm{d}A \qquad M_z = \iint_A -\sigma_x y \mathrm{d}A$$



$N_x,\ M_y,\ M_z,\ Q_y,\ Q_z$	▸▸	ohyb
M_x	▸▸	kroucení

OHYB PRUTŮ

přetvoření		napětí		vnitřní síly
$u,\ v,\ w$	▶▶	σ_x $\tau_{xy},\ \tau_{xz}$	▶▶	$M_y,\ M_z,\ N_x$ $Q_y,\ Q_z$

Předpoklady: podélná deformace ε_x je řádově větší než ostatní složky deformace

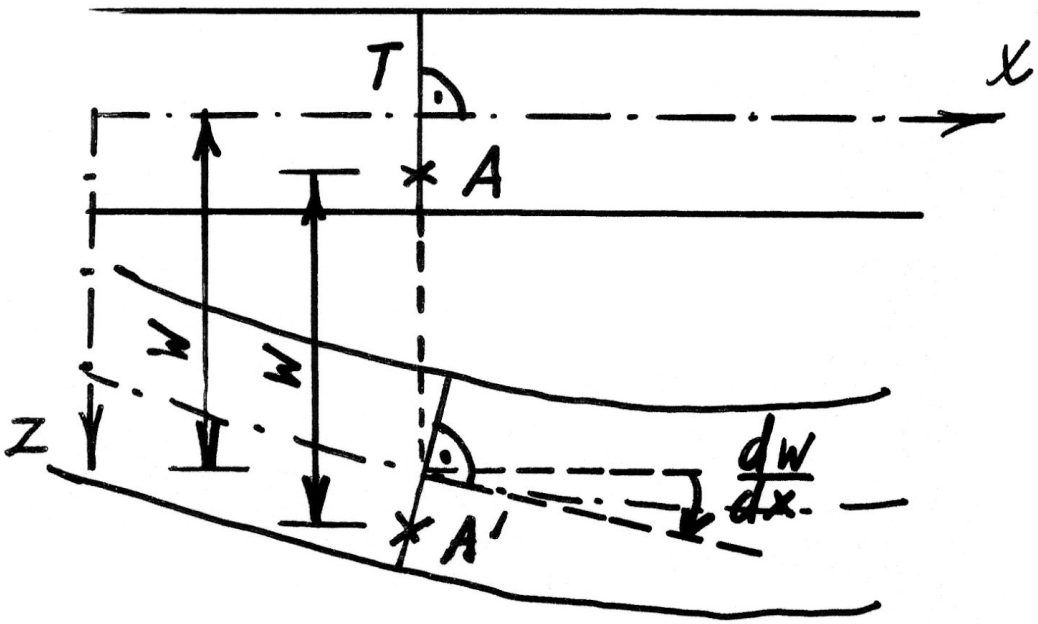
a) $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0$ tvar průřezu se nemění

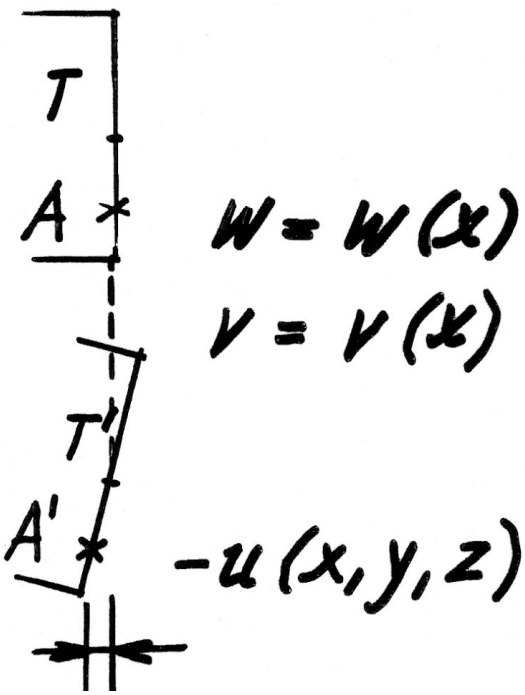
b) $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$ zachování pravých úhlů v rovinách XY a XZ

OHYB PRUTŮ

Bernoulli – Navierova hypotéza

Průřezy rovinné a kolmé k ose prutu před deformací zůstávají rovinné a kolmé k ose prutu i po deformaci



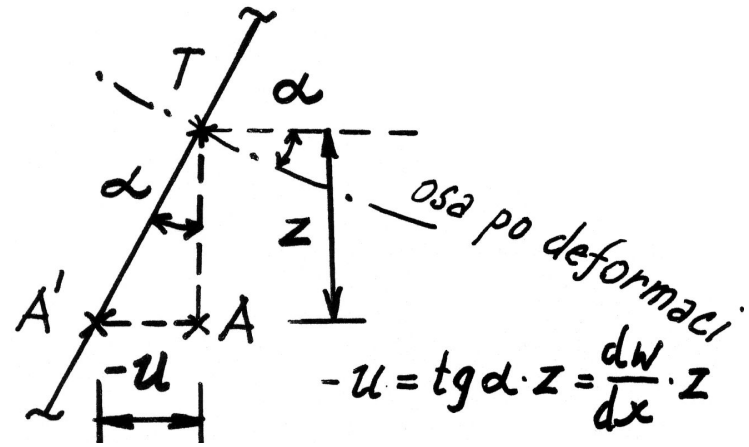


OHYB PRUTŮ

Funkce posunutí u(x,y,z)

$$u(x,y,z) = A(x) + B(x)\cdot y + C(x)\cdot z$$

$A(x)=u_0$ translace



Z předpokladu b) plyne:

α) $\gamma_{xy} = 0$

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x)}{\partial x} = 0$$

$$B(x) + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad B(x) = -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -v'$$

rotace kolem z

β) $\gamma_{xz} = 0$

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x)}{\partial x} = 0$$

$$C(x) + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad C(x) = -\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = -w'$$

rotace kolem y

OHYB PRUTŮ

Kinematika

$$u = u_0 - v'(x) \cdot y - w'(x) \cdot z$$

Deformace – poměrné přetvoření

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u_0' - v'' \cdot y - w'' \cdot z$$

Normálové napětí

Z fyzikálních rovnic:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{\partial u}{\partial x} = E\left(u_0' - v'' \cdot y - w'' \cdot z\right) \qquad (*)$$

OHYB PRUTŮ

Vnitřní síly vyjádřené z pole posunutí $u,\ v,\ w$

$$N_x = \iint_A \sigma_x \mathrm{d}A = E\left(u_0' \overset{A}{\cancel{\iint_A \mathrm{d}A}} - v'' \overset{S_z}{\cancel{\iint_A y\mathrm{d}A}} - w'' \overset{S_y}{\cancel{\iint_A z\mathrm{d}A}} \right)$$

$$-M_z = \iint_A \sigma_x y\mathrm{d}A = E\left(u_0' \overset{S_z}{\cancel{\iint_A y\mathrm{d}A}} - v'' \overset{I_z}{\cancel{\iint_A y^2\mathrm{d}A}} - w'' \overset{D_{yz}}{\cancel{\iint_A yz\mathrm{d}A}} \right)$$

$$M_y = \iint_A \sigma_x z\mathrm{d}A = E\left(u_0' \overset{S_y}{\cancel{\iint_A z\mathrm{d}A}} - v'' \overset{D_{yz}}{\cancel{\iint_A yz\mathrm{d}A}} - w'' \overset{I_y}{\cancel{\iint_A z^2\mathrm{d}A}} \right)$$

OHYB PRUTŮ

Vnitřní síly vyjádřené z pole posunutí $u,\ v,\ w$

V maticovém tvaru:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} N_x \\ -M_z \\ M_y \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & S_z & S_y \\ S_z & I_z & D_{yz} \\ S_y & D_{yz} & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0' \\ -v'' \\ -w'' \end{Bmatrix}} \qquad (**)$$

matice tuhosti průřezu

OHYB PRUTŮ

Napětí vyjádřené z vnitřních sil – inverzní vyjádření r. (**)

Předpoklad: těžišťové osy $\longrightarrow$ $S_y = S_z = 0$

Řešení soustavy rovnic (**)

$$\boxed{\begin{aligned} u_0' &= \frac{N_x}{EA} \\ -v'' &= -\frac{M_z I_y + M_y D_{yz}}{EI} \\ -w'' &= \frac{M_y I_z + M_z D_{yz}}{EI} \end{aligned}}$$

$$I = I_y I_z - D_{yz}^2$$

(***)

OHYB PRUTŮ – normálové napětí

Vzorec pro funkci σ_x, jsou-li Y,Z libovolné těžišťové osy:

Obdržíme dosazením z r. (***) do r. (*)

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z I_y + M_y D_{yz}}{I} y + \frac{M_y I_z + M_z D_{yz}}{I} z$$

Vzorec pro funkci σ_x, jsou-li Y,Z hlavní těžišťové osy (D_{yz}=0):

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

OHYB PRUTŮ

Zvláštní případy namáhání

1. Prostý tah (tlak) $N_x \neq 0 \;\; (M_y = M_z = 0)$

2. Jednoduchý ohyb $M_y \neq 0 \; (M_z = N_x = 0)$

nebo

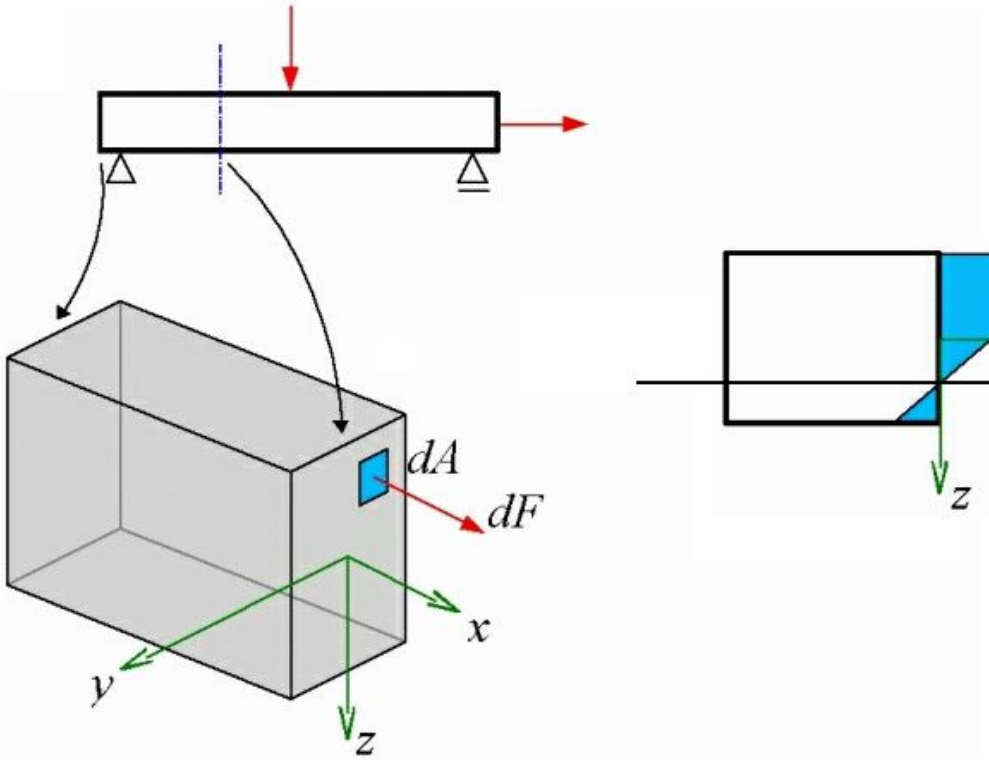
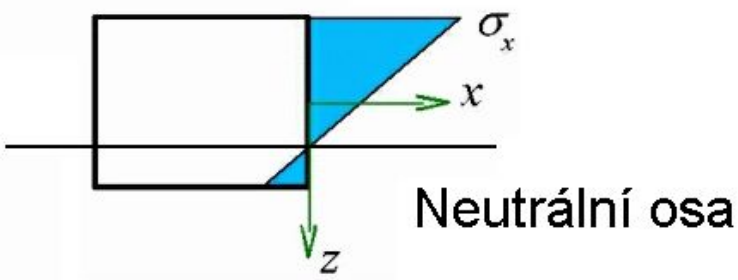
$M_z \neq 0 \;\; (M_y = N_x = 0)$

3. Šikmý ohyb $M_y \neq 0, \; M_z \neq 0 \; (N_x = 0)$

4. Kombinace tahu (tlaku) s ohybem

$N_x \neq 0, M_y \neq 0, M_z \neq 0$

OHYB PRUTŮ

Neutrální osa

σ_x je lineární funkce y, z a představuje rovinu, protínající průřez v přímce nazývané neutrální osa $(\sigma_x = 0)$.