

# VZTAH MEZI NAPĚTÍM A DEFORMACÍ

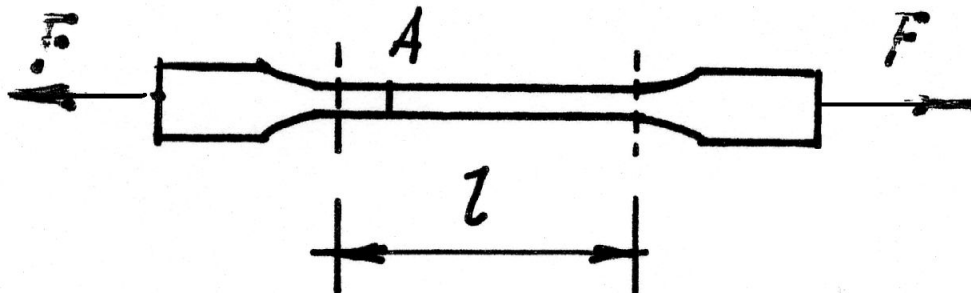
## FYZIKÁLNÍ ROVNICE

Vztahy mezi složkami napětí  $\{\sigma\}$  a složkami deformace  $\{\varepsilon\}$ .

Určeny experimentálně, vyjadřují fyzikální vlastnosti materiálu.

- **Jednoosá napjatost**

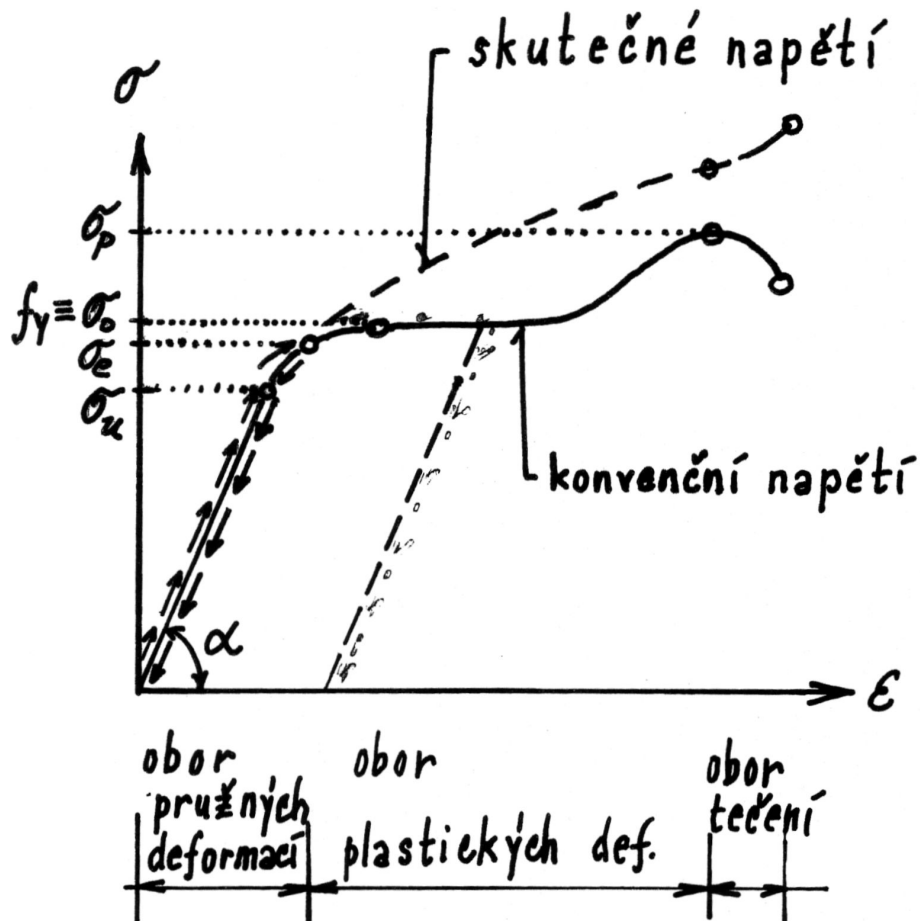
tahová zkouška ►► pracovní diagram



$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

# Fyzikální rovnice

## Příklad : pracovní diagram oceli



$\sigma_u$  - mez úměrnosti

$\sigma_e$  - mez pružnosti  
(elasticity)

$\sigma_0 \equiv f_y$  - mez kluzu  
(plasticity)  
(tečení)

$\sigma_p$  - mez pevnosti

# Fyzikální rovnice

## Hookeův zákon

Platí pouze v pružné oblasti až do meze úměrnosti ( $\sigma \leq \sigma_u$ )

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$E = \operatorname{tg} \alpha$  [Pa]... Youngův modul pružnosti

ocel:  $2,1 \cdot 10^5$  MPa

beton:  $2,1 \cdot 10^4$  MPa

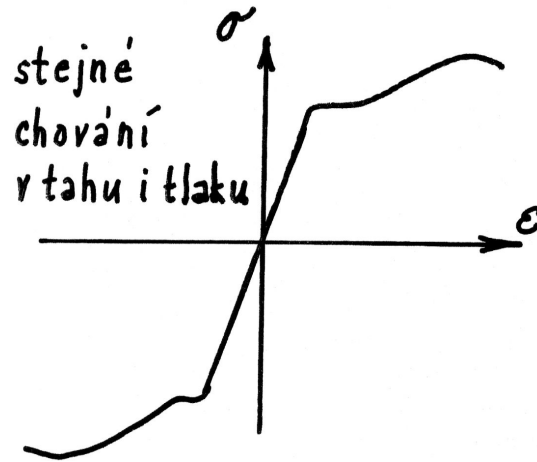
dřevo:  $10^4$  MPa

Zeminy (porézní materiál) –  $E=25$  MPa

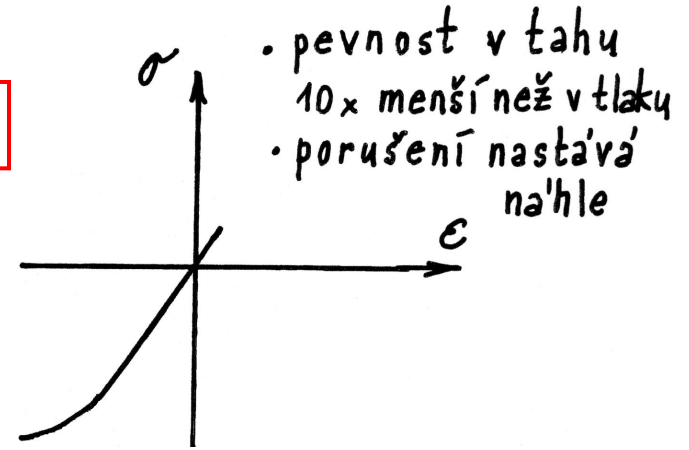
# Fyzikální rovnice – pracovní diagramy

## Příklady

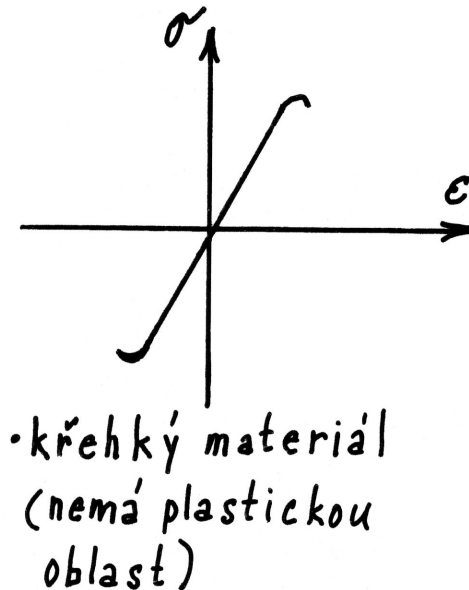
Ocel



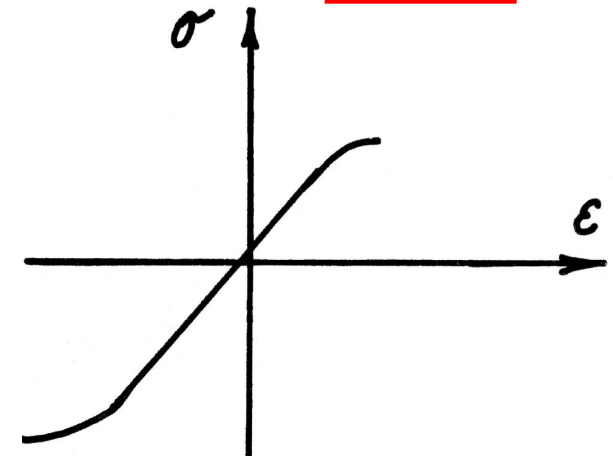
Beton



Litina

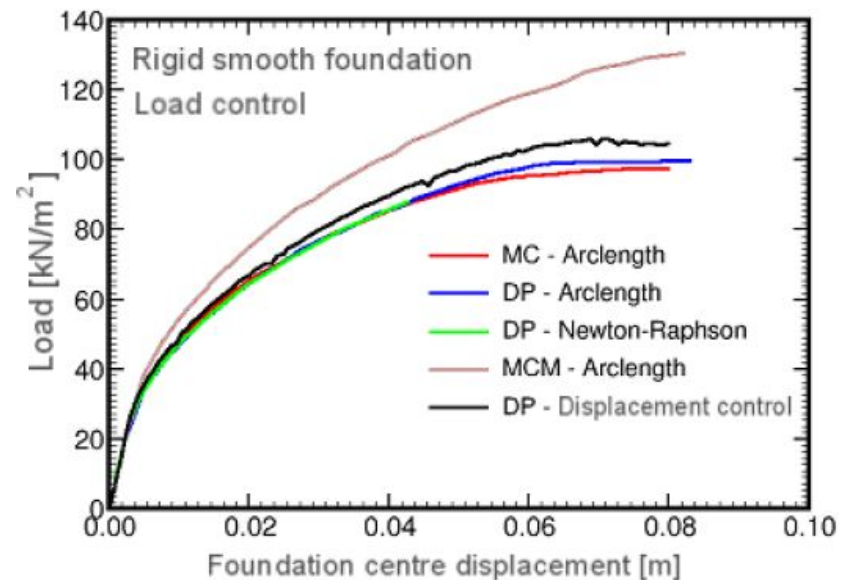
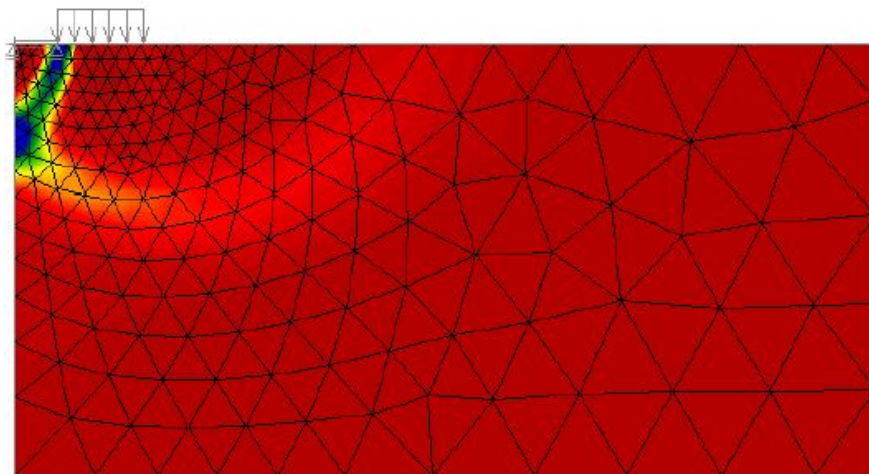
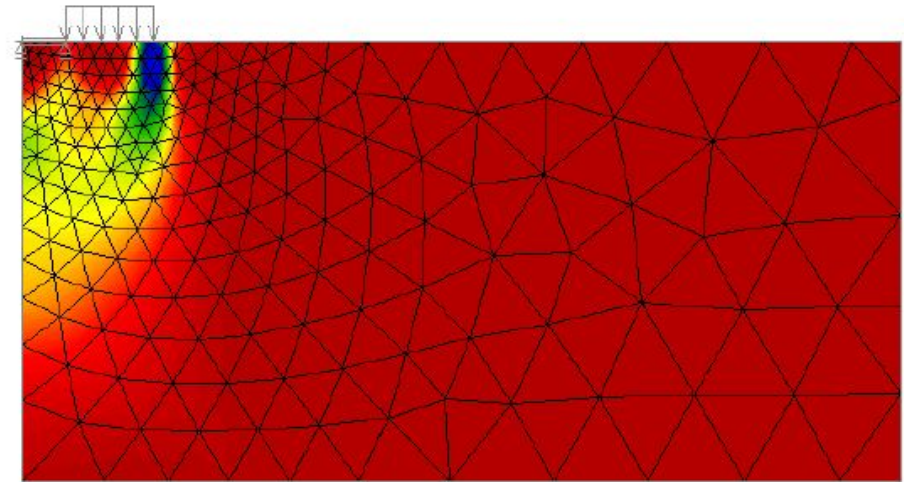
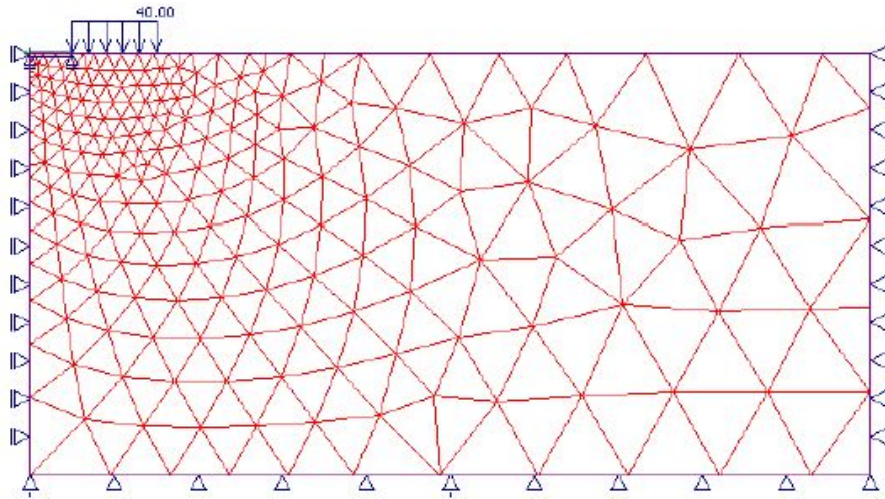


Dřevo



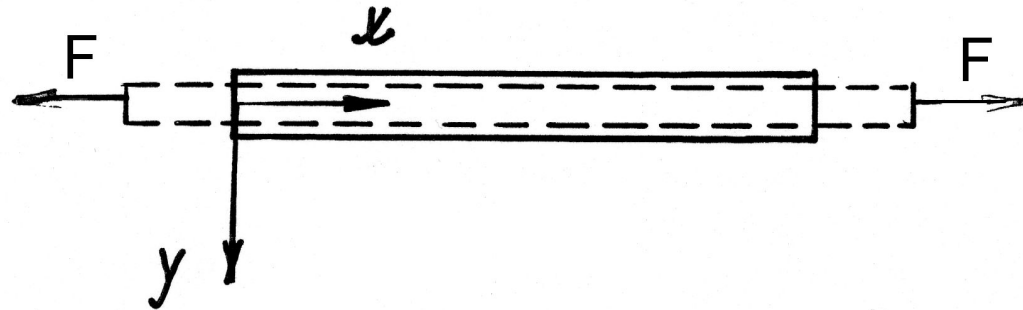
# Fyzikální rovnice – trvalé plastické deformace

## Příklady – zatížení základového pasu



# Fyzikální rovnice – trojosá napjatost

- Rozšířený Hookeův zákon – platí v lineárně pružné oblasti
- Vliv příčné kontrakce – zúžení při tahové zkoušce



$$\sigma_x \gg \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_z = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E}$$

$\nu$ ...[-] Poissonovo číslo (součinitel příčné kontrakce)

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \quad 0 \leq \nu \leq 0,5 \quad \begin{array}{l} \text{ocel: } \nu \approx 0,3 \\ \text{beton: } \nu \approx 0,15 \end{array}$$

# Fyzikální rovnice – trojosá napjatost

$$\sigma_y \quad \gg \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \quad \varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} \quad \varepsilon_z = -\nu \cdot \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\sigma_z \quad \gg \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad \varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} \quad \varepsilon_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_z}{E}$$

Vliv změny teploty na relativní protažení:

$$\varepsilon_x^t = \varepsilon_y^t = \varepsilon_z^t = \alpha t$$

$\alpha$  [K<sup>-1</sup>] ... součinitel teplotní roztažnosti

$t$  [K] ... změna teploty

(ocel, beton:  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ )

# Fyzikální rovnice – rozšířený Hookeův zákon

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) + \alpha t$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x) + \alpha t$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha t$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

$$\varepsilon = \mathbf{C}\sigma + \varepsilon_0$$

$$\sigma = \mathbf{D}(\varepsilon - \varepsilon_0)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}$$

$\mathbf{C}$  – (6x6) matice  
poddajnosti

$\mathbf{D}$  – (6x6) matice  
tuhosti

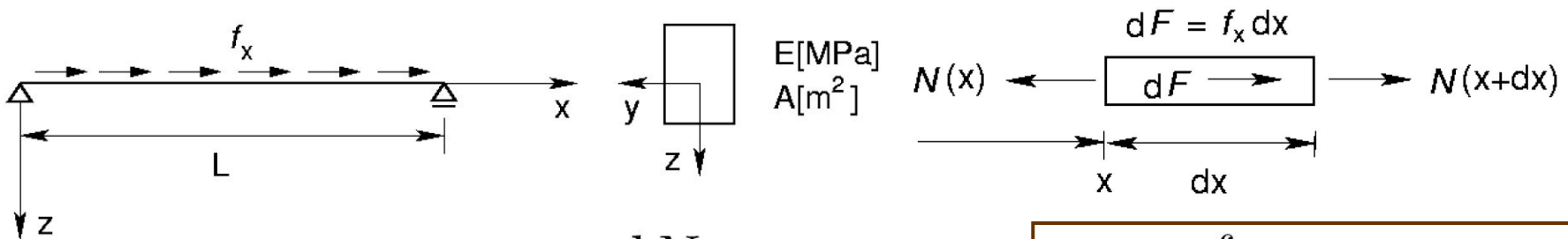
$G$  [Pa] ... modul pružnosti ve smyku

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{jen 2 konstanty nezávislé})$$



# PŘÍKLAD: deformační varianta teorie pružnosti v 1D

Zadání : určete posun bodů střednice prostě podepřeného přímého prutu zatíženého rovnoměrným spojitým zatížením



- podmínka rovnováhy  $\frac{dN}{dx} + f_x = 0 \rightarrow u = \frac{f_x}{2EA} (2Lx - x^2)$
- fyzikální rovnice  $N = EA\varepsilon$
- geometrické rovnice  $\varepsilon = \frac{du}{dx}$

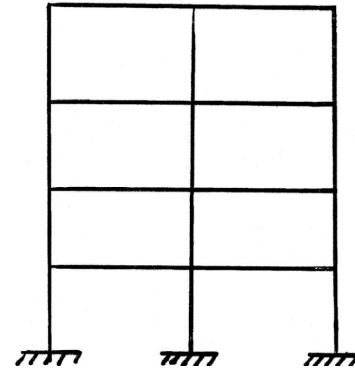
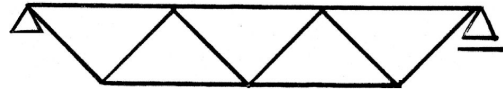
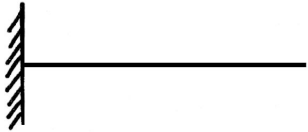
Diferenciální podmínka rovnováhy  $EAu'' + f_x = 0$

Okrajové podmínky  $u(0) = 0 \quad u'(L) = 0 \dots (N = 0)$

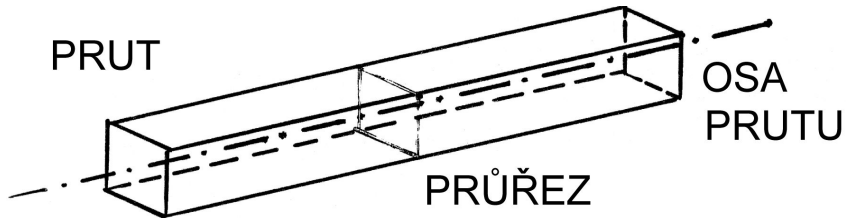
# ANALÝZA PRUTŮ

# Základní pojmy a definice

PRUTOVÉ KONSTRUKCE



PRUT



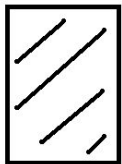
OSA  
PRUTU

PRŮŘEZ

Základní algoritmus:

- Stanovení vnitřních sil v průřezech (statika)
- Výpočet napětí a deformací v bodech průřezů (pružnost a pevnost)

Masivní



Tenkostěnné



PRŮŘEZY

# Integrální definice vnitřních sil

Složky napětí v průřezu prutu

$$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$$

Vnitřní síly v průřezu prutu

$$N_x, Q_y, Q_z \quad M_x, M_y, M_z$$

Vnitřní síly – výslednice napětí

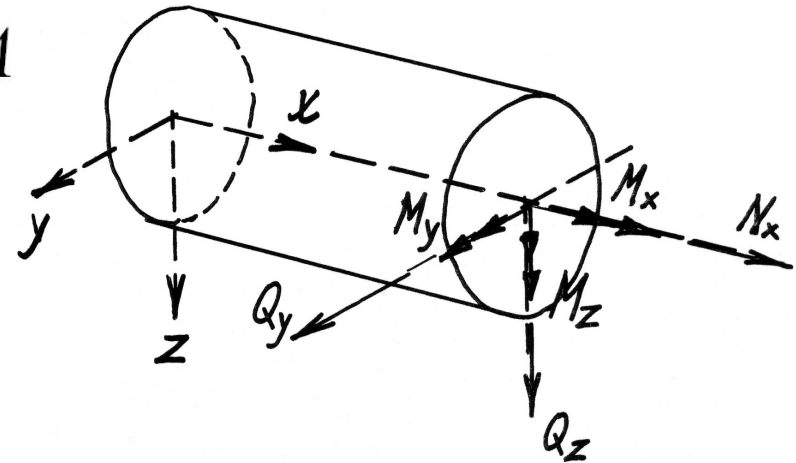
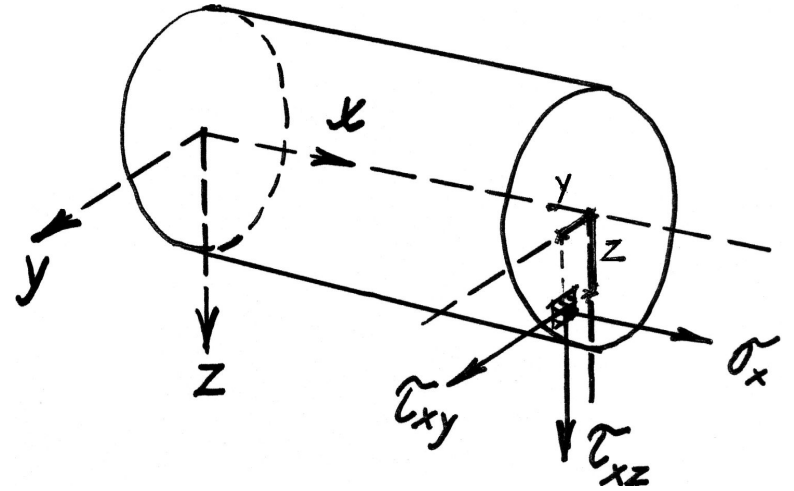
$$N_x = \iint_A \sigma_x dA \quad M_x = \iint_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA$$

$$Q_y = \iint_A \tau_{xy} dA \quad M_y = \iint_A \sigma_x z dA$$

$$Q_z = \iint_A \tau_{xz} dA \quad M_z = \iint_A -\sigma_x y dA$$

$$N_x, M_y, M_z, Q_y, Q_z \quad \gg \quad \text{ohyb}$$

$$M_x \quad \gg \quad \text{kroucení}$$



# OHYB PRUTŮ

přetvoření

$u, v, w$



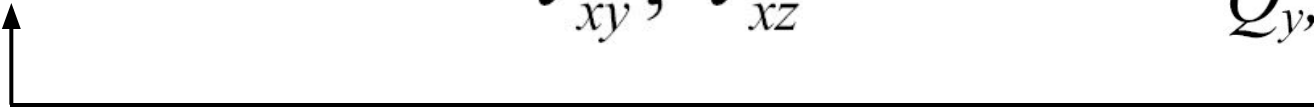
napětí

$\sigma_x$   
 $\tau_{xy}, \tau_{xz}$



vnitřní síly

$M_y, M_z, N_x$   
 $Q_y, Q_z$



**Předpoklady:** podélná deformace  $\varepsilon_x$  je řádově větší než ostatní složky deformace

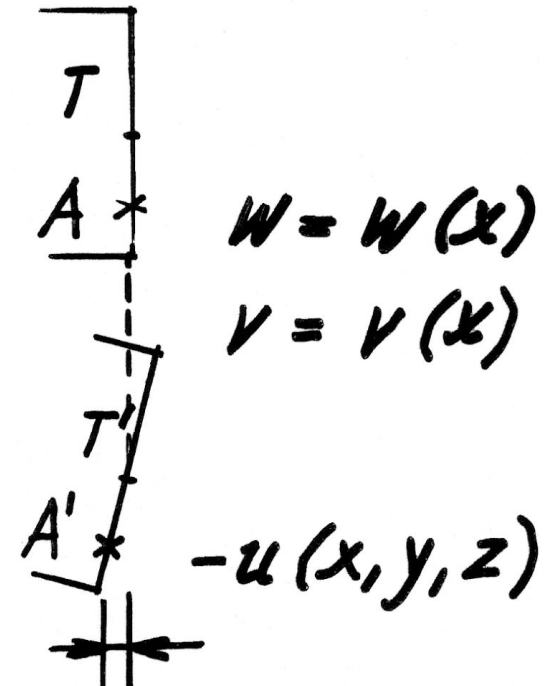
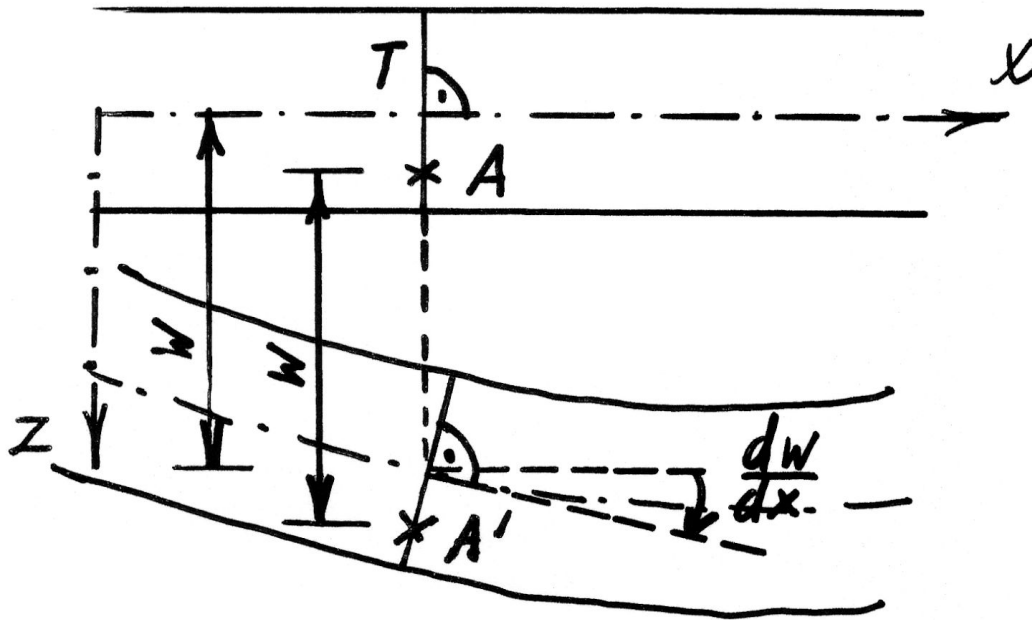
a)  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0$  tvar průřezu se nemění

b)  $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$  zachování pravých úhlů  
v rovinách XY a XZ

# OHYB PRUTŮ

## Bernoulli – Navierova hypotéza

Průřezy rovinné a kolmé k ose prutu před deformací zůstávají rovinné a kolmé k ose prutu i po deformaci

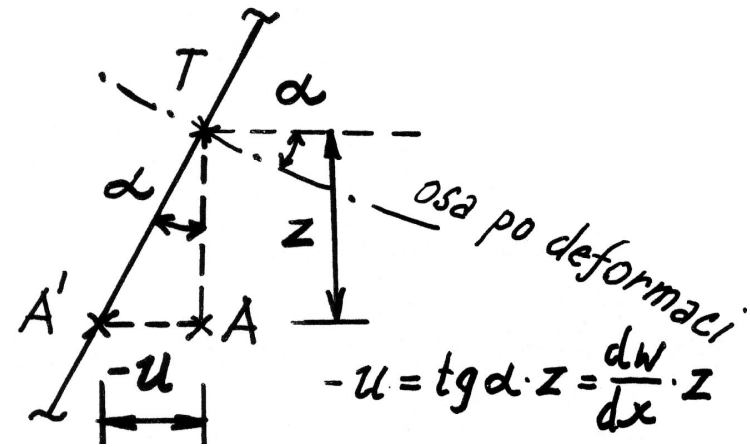


# OHYB PRUTŮ

Funkce posunutí  $u(x, y, z)$

$$u(x, y, z) = A(x) + B(x) \cdot y + C(x) \cdot z$$

$$A(x) = u_0 \text{ translace}$$



Z předpokladu b) plyne:

$$\alpha) \gamma_{xy} = 0$$

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x)}{\partial x} = 0$$

$$B(x) + \frac{dv}{dx} = 0 \quad B(x) = -\frac{dv}{dx} = -v'$$

rotace kolem z

$$\beta) \gamma_{xz} = 0$$

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x)}{\partial x} = 0$$

$$C(x) + \frac{dw}{dx} = 0 \quad C(x) = -\frac{dw}{dx} = -w'$$

rotace kolem y

# OHYB PRUTŮ

## Kinematika

$$u = u_0 - v'(x) \cdot y - w'(x) \cdot z$$

## Deformace – poměrné přetvoření

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = u'_0 - v'' \cdot y - w'' \cdot z$$

## Normálové napětí

Z fyzikálních rovnic:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x} = E(u'_0 - v'' \cdot y - w'' \cdot z) \quad (*)$$



# OHYB PRUTŮ

Vnitřní síly vyjádřené z pole posunutí  $u, v, w$

$$N_x = \iint_A \sigma_x dA = E \left( u'_0 \iint_A dA - v'' \iint_A y dA - w'' \iint_A z dA \right)$$

$$-M_z = \iint_A \sigma_x y dA = E \left( u'_0 \iint_A y dA - v'' \iint_A y^2 dA - w'' \iint_A yz dA \right)$$

$$M_y = \iint_A \sigma_x z dA = E \left( u'_0 \iint_A z dA - v'' \iint_A yz dA - w'' \iint_A z^2 dA \right)$$

# OHYB PRUTŮ

Vnitřní síly vyjádřené z pole posunutí  $u, v, w$

V maticovém tvaru:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ -M_z \\ M_y \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & S_z & S_y \\ S_z & I_z & D_{yz} \\ S_y & D_{yz} & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_0 \\ -v'' \\ -w'' \end{Bmatrix} \quad (**)$$

matice tuhosti průřezu

# OHYB PRUTŮ

Napětí vyjádřené z vnitřních sil – inverzní vyjádření r. (\*\*)

Předpoklad: těžišťové osy  $\longrightarrow S_y = S_z = 0$

Řešení soustavy rovnic (\*\*)

$$u'_0 = \frac{N_x}{EA}$$

$$-v'' = -\frac{M_z I_y + M_y D_{yz}}{EI}$$

$$-w'' = \frac{M_y I_z + M_z D_{yz}}{EI}$$

$$I = I_y I_z - D_{yz}^2$$

(\*\*\*)

# OHYB PRUTŮ – normálové napětí

Vzorec pro funkci  $\sigma_x$ , jsou-li Y,Z libovolné  
těžišťové osy:

Obdržíme dosazením z r. (\*\*\*) do r. (\*)

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z I_y + M_y D_{yz}}{I} y + \frac{M_y I_z + M_z D_{yz}}{I} z$$

Vzorec pro funkci  $\sigma_x$ , jsou-li Y,Z hlavní  
těžišťové osy ( $D_{yz}=0$ ):

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

# OHYB PRUTŮ

## Zvláštní případy namáhání

1. Prostý tah (tlak)  $N_x \neq 0$  ( $M_y = M_z = 0$ )

2. Jednoduchý ohyb  $M_y \neq 0$  ( $M_z = N_x = 0$ )

nebo

$M_z \neq 0$  ( $M_y = N_x = 0$ )

3. Šikmý ohyb  $M_y \neq 0, M_z \neq 0$  ( $N_x=0$ )

4. Kombinace tahu (tlaku) s ohybem

$N_x \neq 0, M_y \neq 0, M_z \neq 0$

# OHYB PRUTŮ

## Neutrální osa

$\sigma_x$  je lineární funkce  $y, z$  a představuje rovinu, protínající průřez v přímce nazývané neutrální osa ( $\sigma_x = 0$ ).

