

Глава 5.
Аналитические функции и конформные отображения.

5.1 Аналитические функции.

Определение 1. Функция $W = f(z)$ называется аналитической в т. z_0 , если она дифференцируема в каждой точке некоторой окрестности т. z_0 .

Замечание 1. Из определения следует, что функция, аналитическая в т. z_0 обязательно окажется аналитической в каждой точке некоторой окрестности т. z_0 . Поэтому множество точек аналитичности функции — открытое множество.



Примеры

1. Функция $W = z^2$ имеет производную в каждой точке $z \in \mathbb{C}$, следовательно она аналитична на всей комплексной плоскости.

Определение 3 Функция, аналитичная на всей комплексной плоскости, называется **целой**.

2. Сумма f степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ аналитична в круге сходимости $K_R = |z-z_0| < R$.

Замечание 2. Дифференцируемость функции в точке и аналитичность — разные понятия. Если функция f аналитична в некоторой т. z_0 , то она дифференцируема в этой точке. Обратное может быть не верным.

Пример. Функция $W = x^3 + 3ix^2y$ определена на \mathbb{C} .
Проверим является ли она дифференцируемой.

Здесь $U(x, y) = x^3$, $V(x, y) = 3x^2y$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 6xy, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 3x^2$$

Частные производные непрерывны на \mathbb{C} . Однако условия ДЭКР выполнимы при $6xy = 0$, т.е. при $x = 0 \vee y = 0$, т.е. на осях координат. Но в любой окрестности точки, лежащей на оси Ox или Oy найдется точка, в которой функция не является дифференцируемой. Итак, данная функция дифференцируема на осях координат, но не является аналитичной.

Замечание 3. Нередко используется понятие аналитической функции в т. $z = \infty$

Определение 4. Функцию $W = f(z)$, определенную в некоторой окрестности т. $z = \infty$ называется аналитической в т. $z = \infty$, если функция $g(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ аналитична в т. $\xi = 0$

Пример

$f(z) = \frac{1}{z}$ определена в окрестности т. $z = \infty$.

Рассмотрим функцию $g(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{1}{\frac{1}{\xi}} = \xi$. Эта

функция аналитична в т. $\xi = 0$. Следовательно,

$f(z) = \frac{1}{z}$ аналитична в т. $z = \infty$

Отметим некоторые свойства аналитических функций, вытекающие из определения аналитической функции и свойств дифференцируемых функций.

1. Если f_1 и f_2 -аналитические функции в области G , то их сумма, разность, произведение есть функции аналитические в области G .

Частное $\frac{f_1}{f_2}$ является аналитической функцией всюду в G , где $f_2 \neq 0$.

2. Множество значений функции $w = f(z) \neq \text{const}$, аналитической в области G плоскости (z) является областью в плоскости (w) .

3. Если $w = f(z)$ является аналитической в области D комплексной плоскости (z) , причем в области ее значений E комплексной области (w) определена аналитическая функция $\xi = \varphi(w)$, то функция $\xi = \varphi(f(z))$ является аналитической функцией в области D .

4. Если $w = f(z)$ является аналитической в области D , причем $|f'(z)| \neq 0$, то в области ее значений E определена обратная функция $z = \varphi(w)$, являющаяся аналитической функцией в E . При этом, если $w_0 = f(z_0)$, то имеет место равенство $\varphi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

Задание. Уметь обосновывать любое из указанных свойств.

5.2 Сопряженные гармонические функции.

В дальнейшем мы убедимся, что функция, аналитическая в области G , имеет производную любого порядка. В частности для аналитической функции f ее действительная и мнимая части имеют непрерывные частные производные второго порядка в области G . Каждая из производных аналитической функции является аналитической функцией и тем самым непрерывной в G .

Пользуясь тем, что

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ найдем } f''(z)$$

двумя способами:

$$f''(z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2};$$

$$f''(z) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) - i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Отсюда $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \dots ? \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \dots ? \dots - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$

Поставьте вместо ? необходимый знак.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Уравнение такого вида носит название уравнение Лапласа.

Определение 1. Функции, обладающие в некоторой области непрерывными частными производными второго порядка и удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими функциями.

Какое утверждение можно сделать относительно действительной и мнимой частей аналитической функции $w = f(z)$?

Действительная и мнимая части
аналитической функции являются
гармоническими функциями.

Если же $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ - произвольные
гармонические функции в области G , то
функция $F(z) = \varphi(x, y) + i \psi(x, y)$ не
обязательно будет аналитической в G .

Определение 2. Две гармонические функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, удовлетворяющие условиям ДЭКРа называются сопряженными гармоническими функциями. Итак, действительная и мнимая части аналитической функции в области G являются сопряженными гармоническими функциями.

Покажем, как по одной из сопряженных гармонических функций найти другую с точностью до постоянного слагаемого и тем самым найти аналитическую функцию, если известны ее действительная и мнимая часть.

Пусть $u(x, y)$ - функция гармоническая в области G . Покажем, как найти аналитическую функцию

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, действительная часть которой $u(x, y) = \varphi(x, y)$.

Для отыскания мнимой части имеем два уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = Q(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = P(x, y).$$

Функции $P(x, y) = \frac{-\partial u}{\partial y}$ и $Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$

непрерывны в G и обладают в G

непрерывными частными производными

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{-\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

В силу чего?

В силу уравнения Лапласа (гармоническая функция φ удовлетворяет уравнению Лапласа).

Поэтому $\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$ не

зависит от пути интегрирования, соединяющего т. (x_0, y_0) и т. (x, y) в области G , следовательно представляет функцию от переменных x, y

Положим $\psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$

Тогда $\psi(x, y)$ имеет те же частные производные, что и искомая функция $v(x, y)$. Действительно

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = P(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = Q(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Поэтому $v(x, y)$ может отличаться от $\psi(x, y)$ на постоянное слагаемое c :

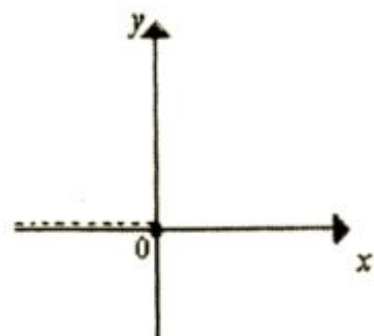
$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (Pdx + Qdy) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy \right) + C$$

Вычисляя $v(x, y)$ по этой формуле, имеем две дифференцируемые функции $u(x, y) = \varphi(x, y)$ и $v(x, y) = \psi(x, y) + C$, связанные условиями ДЭЖР.

Отсюда следует, что

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u(x, y) + i(\psi(x, y) + C)$
-аналитическая функция в D .

Замечание. По мнимой части
аналитической функции можно
восстановить ее действительную
часть с точностью до
действительного постоянного
слагаемого.



Пример. Пусть область G получается из комплексной области исключением

полуоси $y=0, x \leq 0$. Легко проверить, что функция $v(x, y) = 2e^x \cos y + 2x - 3y$.

гармоническая в G . Действительно,

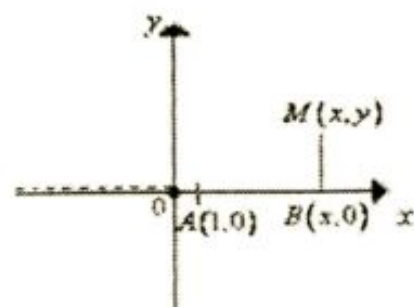
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^x \cos y + 2; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2e^x \sin y - 3;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2e^x \cos y; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -2e^x \cos y;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2e^x \cos y + (-2e^x \cos y) = 0.$$

Функция $u(x, y)$, сопряженная с $v(x, y)$, удовлетворяет условиям ДЭКР:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2e^x \sin y - 3; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2e^x \cos y - 2.$$



$$[AB] v=0, dy=0$$

$$[BM] x=\text{const}, dx=0$$

Тогда

$$u(x, y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} (-2e^x \sin y - 3) dx + (-2e^x \cos y - 2) dy + C$$

$$u(x, y) = - \int_1^x 3 dx + \int_0^y (-2e^x \cos y - 2) dy + C$$

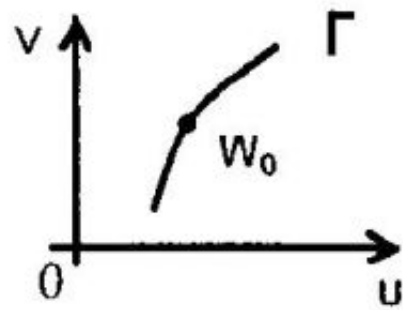
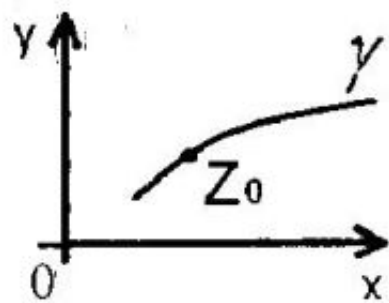
$$u(x, y) = -3x \Big|_1^x - 2e^x \sin y \Big|_0^y - 2y \Big|_0^y + C.$$

$$u(x, y) = -3x - 2e^y \sin y - 2y + C.$$

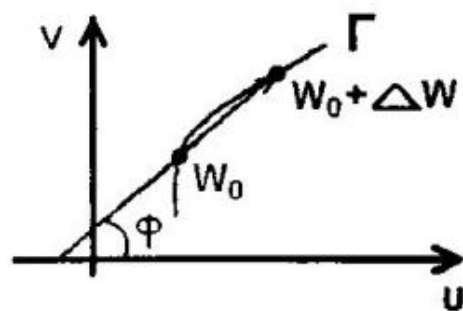
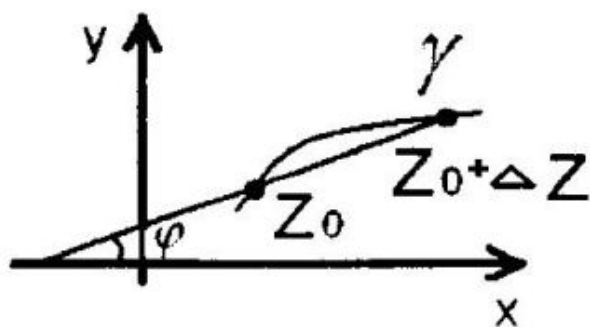
5.3. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Пусть $w = f(z)$ — аналитическая функция в области G комплексной плоскости (z) . Значения функции f будем изображать в плоскости (w) . Каждой т. $z = x + iy \in G$ будем ставить в соответствие единственную точку $w = u + iv$ в плоскости (w) .

Пусть z_0 - произвольная точка области $G \subset (z)$ и γ - проходящая через т. z_0 кривая, заданная со своим направлением и имеющая определенную касательную в т. z_0 . Предположим, что $f'(z_0) \neq 0$. В плоскости (w) образом кривой γ будет кривая Γ , проходящая через т. $w_0 = f(z_0)$.



Чтобы выяснить геометрический смысл производной $f'(z_0)$ представим $f'(z_0)$ в показательной форме $f'(z_0) = |f'(z_0)| e^{Arg f'(z_0)}$



Возьмем произвольную т. $z_0 + \Delta z$ на линии γ и обозначим образ этой точки $f(z_0 + \Delta z) = w_0 + \Delta w$. Эта точка лежит на линии Γ . При стремлении т. $z_0 + \Delta z$ к z_0 по линии γ соответствующая ей т. $w_0 + \Delta w$ движется по линии Γ к т. w_0 , причем Δz и Δw стремятся к нулю одновременно.

Из равенства $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = k e^{i\alpha}$ находим

$$(1) \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) \right| = k, (2) \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Arg} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \alpha$$

(с точностью до кратных 2π) Здесь также входит требование: $f'(z_0) \neq 0$, т.к. в противном случае α не имел бы определенного значения.

Рассмотрим равенство (2). Так как

$$\operatorname{Arg} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \operatorname{Arg} \Delta w - \operatorname{Arg} \Delta z, \text{ то равенство (2) примет}$$

вид $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Arg} \Delta w - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Arg} \Delta z = \alpha. \quad (3)$

Выясним геометрический смысл равенства (3).

очевидно $\Delta z = (z_0 + \Delta z) - z_0$ изображается вектором соединяющим т. z_0 и $z_0 + \Delta z$. Так же Δw - есть вектор, соединяющий точки w_0 и $w_0 + \Delta w$.

Следовательно $Arg \Delta z$ есть угол φ между положительным направлением Ox и вектором Δz , а $Arg \Delta w$ - угол Φ между положительным направлением оси Ou и вектором Δw . Таким образом, равенство (3) будет иметь вид

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Phi - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varphi = \alpha \quad (4)$$

Что представляют собой $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Phi$ и $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varphi$?

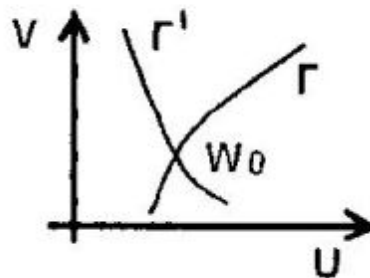
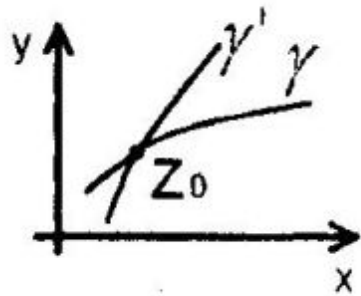
В пределе направление вектора Δz совпадает с направлением касательной к линии y в т. z_0 , а направление Δw — с направлением касательной к линии в т. w_0 , которая существует?!

Обозначая через ψ и Ψ углы, образованные касательными к линиям y и Γ соответственно в точках z_0 и w_0 с осями Ox и Ou перепишем (4) в виде:

$$\Psi - \psi = \alpha \quad \text{или} \quad \Psi = \psi + \alpha. \quad (5)$$

Определение: Будем считать положительные направления осей Ox и Ox' совпадающими между собой. Угол $\Psi - \psi$ называется углом поворота касательной к кривой γ в т. z_0 при отображении f .

Таким образом, α - угол поворота касательной к линии γ в т. z_0 при отображении f или иначе α — угол между первоначальным и отображенным направлениями.



Пусть теперь через т. z_0 проходит еще линия γ' и ее образом при отображении f

является Γ' , проходящая через т. w_0 .

Повторяя проведенные рассуждения, получаем (6)

$\Psi' - \psi' = \alpha$, где ψ' и

Ψ' есть предельные значения φ' и

Φ' для линий γ' и Γ' .

Из равенств (5) $\Psi - \psi = \alpha$ и (6) $\Psi' - \psi' = \alpha$ получим
(7) $\Psi' - \psi' = \Psi - \psi$ или $\Psi' - \Psi = \psi' - \psi$.

Заметив, что $\psi' - \psi$ и

$\Psi' - \Psi$ — соответственно углы между касательными
к линиям γ и γ' в т. z_0 и Γ и Γ' в т. w_0 ,
усматриваем из равенства (7) следующее: ...?...

две произвольные линии, выходящие из т. z_0 , отображаются в две соответствующие линии, выходящие из т. $w_0 = f(z_0)$, так что угол между касательными к данным линиям и их образами будет один и тот же как по величине, так и по направлению.

Это означает, что если положительное направление линии γ в т. z_0 переходит в положительное направление линии γ' путем поворота на некоторый угол в определенном направлении, то соответствующее направление линии Γ переходит в направление Γ' путем поворота на тот же угол и в том же направлении.

Итак, отображение с помощью
аналитической функции обладает
свойством сохранения (консерватизма)
углов в тех точках, где производная
 $f'(z) \neq 0$.

Выясним теперь геометрический смысл модуля производной.

Равенство (1) может быть переписано так

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = k \quad (8).$$

Геометрически $|\Delta z|$ означает длину вектора Δz , т.е. расстояние между точками z_0 и $z_0 + \Delta z$; аналогично $|\Delta w|$ - расстояние между точками w_0 и $w_0 + \Delta w$. Что показывает равенство (8)?

Равенство (8) показывает, что отношение бесконечно малого расстояния между отображенными точками к бесконечно малому расстоянию между первоначальными точками, равное в пределе $k = |f'(z_0)|$ не зависит от направления линии γ .

Из этого ясно, что $k = |f'(z_0)|$ можно рассматривать как величину масштаба в т. z_0 при отображении посредством функции $w = f(z)$. Если $k > 1$ расстояние увеличивается, т.е. происходит растяжение; если $k < 1$, то наоборот происходит сжатие, при $k = 1$ расстояние остается неизменным, т.е. бесконечно малый элемент, выходящий из т. z_0 , заменяется эквивалентным ему бесконечно-малым элементом, выходящим из т. w_0 .

Итак, модуль производной $|f'(z_0)|$ можно рассматривать как коэффициент растяжения в т. z_0 при отображении посредством функции $w = f(z)$.

Пример. Функция $w = 1 + i2z$ имеет производную $w' = 2i$ и является аналитической во всей плоскости (z) , $w' \neq 0$ во всей плоскости. Модуль производной $|w'| = |2i| = 2$. Отображение производит растяжение в каждой точке плоскости с коэффициентом 2.

$\arg w' = \arg 2i = \frac{\pi}{2}$. Следовательно в каждой точке происходит вращение на угол $\frac{\pi}{2}$.

5.4. Конформные отображения

Определение 1. Отображение, которое в т. z_0 сохраняет углы и обладает постоянством растяжений, называется конформным в т. z_0 .

Определение 2. Отображение называется конформным в области, если оно конформно в каждой точке области.

Замечание. Из полученных результатов в пункте 5.3. вытекает, что отображение, осуществляемое с помощью аналитической функции $w = f(z)$ в точке z_0 , где $f'(z_0) \neq 0$ обладает свойствами сохранения углов и постоянством растяжений, следовательно оно является конформным.

Примеры.

1) $w = 2z^2 - 4z + 1$ конформно в т. $z_0 = \frac{1-i}{2}$.

2) $w = 1 + i2z$ конформно на всей плоскости.

3) $w = \frac{1}{2z+1}$; $D = \{z \in \mathbf{C} \mid z \neq -\frac{1}{2}\}$

$w' = \frac{-2}{(2z+1)^2}$ - существует на множестве D .

Поскольку $w' \neq 0$, отображение конформно на D .

$$|w'| = \left| \frac{2}{(2z+1)^2} \right| = \frac{2}{|2z+1|^2}; \quad |w'| > 1 \quad \text{в тех точках,}$$

где $|2z+1|^2 < 2$, т.е. $|2z+1| < \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| z + \frac{1}{2} \right| < \frac{\sqrt{2}}{2}$. В

круге $\left| z + \frac{1}{2} \right| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ происходит растяжение. В

области $\left| z + \frac{1}{2} \right| > \frac{\sqrt{2}}{2}$ происходит сжатие. На

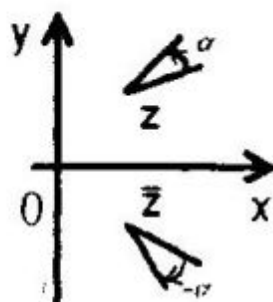
окружности $\left| z + \frac{1}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ коэффициент растяжения

равен 1.

Как было доказано, свойство сохранения углов означает, что сохраняется не только абсолютная величина углов между кривыми, пересекающимися в т. ε_0 , но и их направления.

Определение 3. Отображения, при которых сохраняются абсолютные величины углов между кривыми и их образами, но направления углов меняются на противоположные, называются конформными отображениями II рода.

Рассмотренные ранее отображения, называются отображениями I рода.



Пример. Пусть дано отображение $w = \bar{z}$. Будем изображать переменную w в той же плоскости, что и z . Видим, что при рассматриваемом отображении всякая т. z переходит в т. \bar{z} , симметричную т. z

относительно действительной оси. Ясно, что при таком отображении всякие два направления, выходящие из т. z и образующие между собой угол α , перейдут в два соответствующих направления, симметричные с первыми, угол между которыми $-\alpha$.

Таким образом, величина углов сохраняется, направление отсчета меняется как обратное. Далее это отображение обладает свойством постоянства растяжений, т.к. при нем не происходит изменение масштаба ($|\bar{z}'| = |z'|$). Следовательно, рассматриваемое отображение есть конформное отображение II рода.

Если $w = f(z)$ — аналитическая в области G и в этой области $f'(z) \neq 0$, то отображение, осуществляемое ею есть конформное I рода.

Предположим, что $w = f(z)$ аналитична в области G , и в этой области $f'(z) \neq 0$. Покажем, что отображение $\xi = \overline{f(z)}$ является конформным II рода.

В самом деле, это отображение может быть рассмотрено как композиция двух отображений $w = f(z)$ и $\xi = \bar{w}$.

При первом углы сохраняются как **по величине**, так и по направлению, при втором направление осчета углов меняется на противоположное. Кроме того данное отображение обладает свойством постоянства растяжений, т.к. **это** свойство присуще обоим составляющим отображениям

Итак, всякое отображение, устанавливаемое при помощи функции, значения которой являются сопряженными со значениями аналитической функции, есть конформное отображение 2-го рода. Обратно, пусть конформное отображение II рода осуществляется при помощи функции $w = F(z)$. Тогда $F(z)$ является комплексно сопряженной аналитической функцией $\overline{F(\bar{z})}$.

Доказать самостоятельно.

5.5 Однолистные функции. Области однолистности аналитической функции.

Определение. Функция $w = f(z)$ называется **однолистной** в области G , если в различных точках этой области она принимает различные значения.

Замечание. Из этого определения следует, что всякая однолистная функция имеет обратную.

Примеры.

1) $w = az + b$ однолистка на всей плоскости. С. Пусть $z_1 \neq z_2 \Rightarrow w_2 - w_1 = (az_2 + b) - (az_1 + b) = a(z_2 - z_1) \neq 0$, т.е. $w_1 \neq w_2$

2) $w = \frac{1}{z}$ определена на $D = \mathbb{C} - \{0\}$ и однолистна

Пусть $z_1 \neq z_2$, $w_2 - w_1 = \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 * z_2} \neq 0$, т.е.

$$w_1 \neq w_2$$

3) $w = e^z$ область определения $D = \mathbb{C}$

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то $|e^{z_1}| = e^{x_1}$, $|e^{z_2}| = e^{x_2}$.

Положим теперь $x_1 = x_2 = x$ и $y_1 \neq y_2$.

Тогда

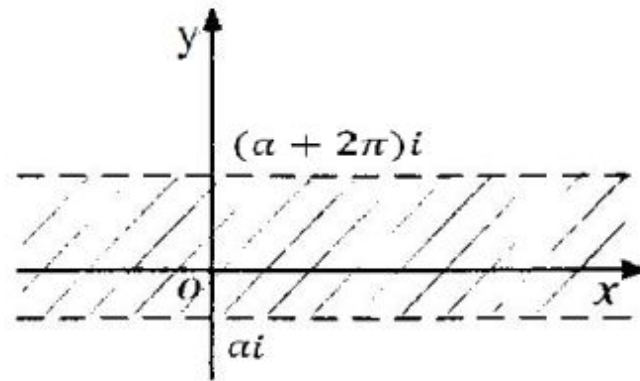
$$\begin{aligned} e^{z_1} - e^{z_2} &= e^x (e^{y_1} - e^{y_2}) = e^x ((\cos y_1 + i \sin y_1) - (\cos y_2 + i \sin y_2)) = \\ &= e^x \left(-2 \sin \frac{y_1 + y_2}{2} \sin \frac{y_1 - y_2}{2} + 2i \cos \frac{y_1 + y_2}{2} \sin \frac{y_1 - y_2}{2} \right) = \\ &= 2i e^x \sin \frac{y_1 - y_2}{2} \left(\cos \frac{y_1 + y_2}{2} + i \sin \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = 2i e^x \sin \frac{y_1 - y_2}{2} e^{i \frac{y_1 + y_2}{2}} \end{aligned}$$

Это выражение обращается в нуль только в тех точках,

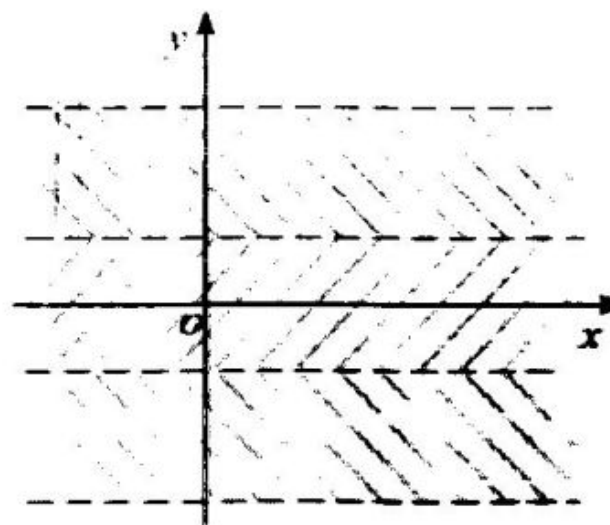
где $\sin \frac{y_1 - y_2}{2} = 0$, т.е. при $y_1 - y_2 = 2\pi K, K \in Z$

Итак, эта функция не является однолистной, однако для нее можно указать так называемую область однолиственности, т.е. такую область, в различных точках которой функция принимает различные значения.

Мы показали, что $e^{z_1} = e^{z_2}$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2 + 2\pi K$, $K \in \mathbb{Z}$. Поэтому, если выберем область в виде полосы шириной 2π со сторонами параллельными действительной оси, то внутри нее в двух различных точках $z_1 \neq z_2$ функция $w = e^z$ будет принимать различные значения.



В заштрихованной области функция $w = e^z$ однолистна.



Любая полоса шириной 2π со сторонами параллельными действительной оси является областью однолиственности функции $w=e^z$. И в каждой такой области для функции $w=e^z$ существует обратная функция.

Задание. Докажите, что функция $w = z^n$ не является однолистной и покажите, что область однолистности для нее есть угол с вершиной в начале координат раствором $\frac{2\pi}{n}$.

Глава 6

Элементарные функции и задаваемые ими коформ- ные отображения

6.1 Линейная функция

Определение. Линейной называется функция $w = az + b$, где a, b - комплексные постоянные, а $a \neq 0$.

Область определения $D = \mathbb{C}$, функция однолистка, $w' = a$, следовательно функция аналитична на \mathbb{C} .

Эта функция устанавливает...? отображение ...? рода

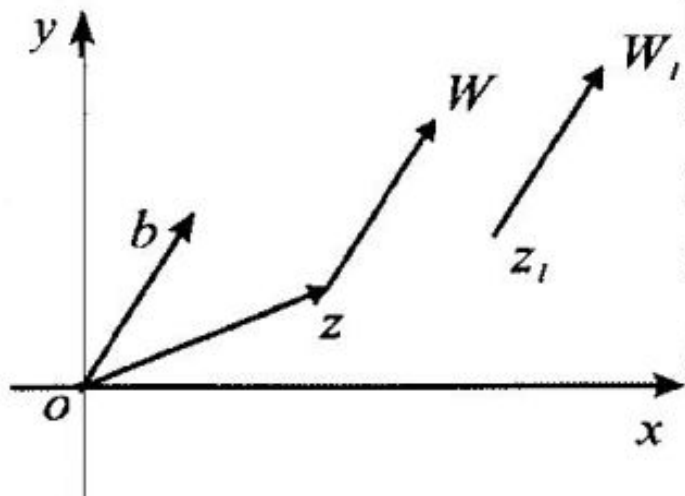
Итак, линейная функция устанавливает конформное отображение I рода с постоянным коэффициентом растяжения $k=|a|$ и одинаковым углом поворота равным $Arg a$.

Изучим подробнее отображение, осуществляемое данной функцией. При этом совместим плоскости (z) и (w) так, чтобы совпали их оси координат. Рассмотрим сначала частные случаи.

1. Пусть $a=1$. Функция примет вид (2) $w=z+b$.

Эта функция каждой точке z ставит в соответствие т. $w=z+b$.

Так как сложение комплексных чисел геометрически сводится к сложению векторов, то при отображении $w=z+b$ каждая т. z смещается в соответствующую т. w на вектор b , изображающий число b .



В виду того, что b постоянно, вектор сдвига одинаков для всех точек плоскости, и мы имеем преобразование параллельного переноса.

Если положим $z = x + iy$, $b = b_1 + ib_2$, $z = U + iV$, то равенство (2) $w = z + b$ запишется в равносильном ему

виде (3)
$$\begin{cases} U = x + b_1 \\ V = y + b_2 \end{cases}$$

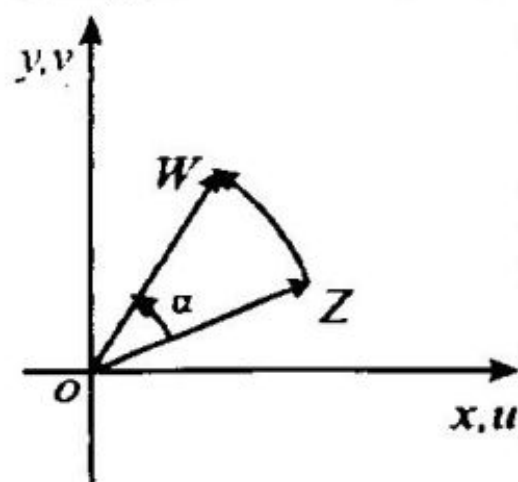
формулы параллельного переноса в декартовых координатах.

2. $|a|=1, b=0$. Запишем a в тригонометрической форме (4) $a = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Функция примет вид $w = \cos \alpha + i \sin \alpha$.

Очевидно $|w|=|z|$ и $Arg w = Arg z + \alpha$

Поясните?

Следовательно точки z и w находятся на одинаковом



расстоянии от нулевой точки и аргументы их отличаются на один угол α . Таким образом отображение осуществляемое функцией есть вращение на угол α вокруг начала координат. Если $z = x + iy$

$w = U + iV$, то отображение

$w = az, |a| = 1$ запишется в виде:

$$\begin{aligned} U &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ V &= x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned} \quad (5)$$

— формулы вращения в декартовых координатах

3. $\arg a=0, b=0$. В этом случае коэффициент при z , т.е. a является действительным положительным числом $a=k$. Функция $w=kz$ ставит в соответствие каждому комплексному числу z комплексное число w такое, что $|w|=k|z|$, $\text{Arg } w = \text{Arg } z$. Это значит, что точки z и w лежат на одном луче, исходящем из нулевой точки и отношение $\frac{|w|}{|z|} = k$. следовательно отображение является ?

гомотетией с центром в нулевой точке и коэффициентом k . При $k > 1$ имеем растяжение, при $k < 1$ - сжатие, при $k = 1$ - тождественное преобразование плоскости.

Вернемся к рассмотрению общего случая.

Положим $a = k(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, тогда (1) примет вид $w = k(\cos \alpha + i \sin \alpha)z + b$. Это преобразование может быть получено путем последовательного выполнения преобразований:

$\xi = (\cos \alpha + i \sin \alpha) * z$ - вращение на угол α ,

$\tau = k * \xi$ — гомотетия,

$w = \tau + b$ — параллельный перенос

Укажем некоторые свойства линейной функции

1. Линейная функция $w = az + b$, где $|a| = 1$.
Сохраняет расстояние между точками.

Доказательство.

Пусть z_1, z_2 - произвольные точки комплексной плоскости (z)

$$w_2 - w_1 = az_1 + b - (az_2 + b) = a(z_1 - z_2) . \text{ Так как } |a| = 1, \text{ то } |w_2 - w_1| = |z_2 - z_1| .$$

2. Линейная функция $w = az + b$ отображает треугольник на подобный ему треугольник.

Доказать самостоятельно.

2. Линейная функция $w = az + b$ отображает окружность на окружность.

Доказательство.

Данное свойство вытекает из того, что составляющие преобразования (вращение, гомотетия, параллельный перенос) обладают этим свойством.

6.2 Функция $w = \frac{1}{z}$

Функция $w = \frac{1}{z}$ определена на множестве $D = \mathbb{C} - \{0\}$, однолистка на D , имеет на этом множестве производную $w' = \frac{-1}{z^2} \neq 0$. Следовательно отображение, осуществляемое функцией $w = \frac{1}{z}$ конформное первого рода во всех точках плоскости \mathbb{C} за исключением $z=0$.

Запишем z в тригонометрической форме $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Тогда

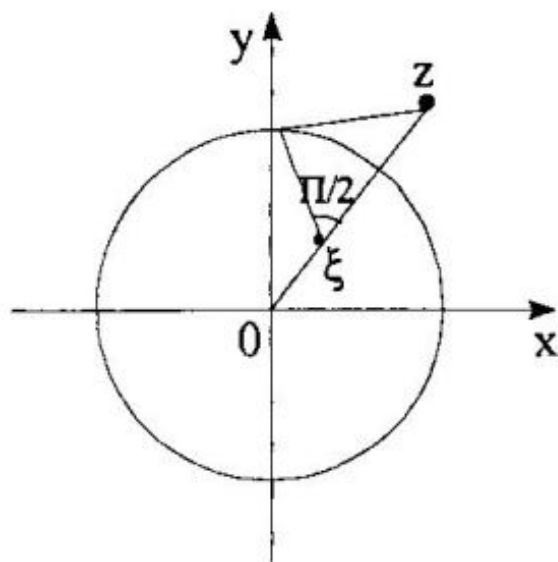
$$w = \frac{1}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{1}{r}(\cos \varphi - i \sin \varphi). \quad \text{Отсюда}$$

следует: $|w| = \frac{1}{r}$, $\text{Arg } w = -\varphi + 2\pi K$

Введем вспомогательную функцию

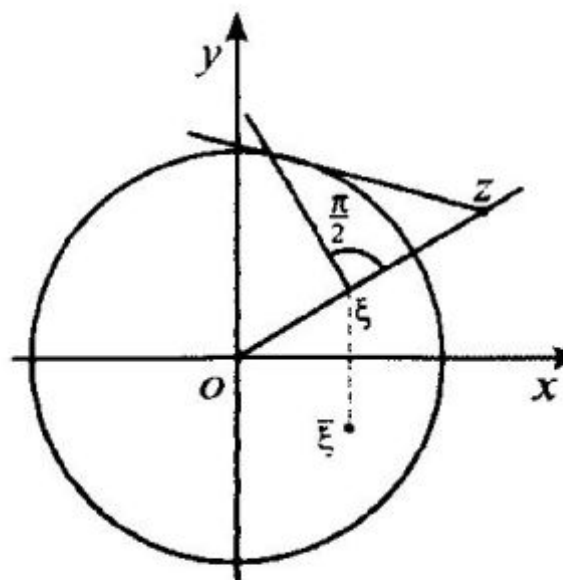
$$\xi = \bar{w} = \frac{1}{r} (\cos \varphi + i \sin \varphi). \text{ Очевидно, } |\xi| = \frac{1}{r},$$

$\text{Arg } \xi = -\varphi + 2\pi K$. Следовательно точки ξ и z находятся на одном луче, выходящем из нулевой точки, что и z , а произведение их модулей $|\xi| * r = 1$. Значит точки ξ и z взаимно инверсны относительно единичной окружности $|z| = 1$



Построение инверсных точек в случае $|z| > 1$ осуществляется следующим образом: из т. z проводим касательную к единичной окружности и из точки касания опускаем перпендикуляр на луч Oz . Основание перпендикуляра является точкой инверсной z .

Если z находится внутри круга $|z|=1$, т.е. $|z|<1$, то построение инверсной т. ξ производится в обратном порядке. Точки единичной окружности при инверсии остаются неподвижными.



После построения т. ξ , инерсной т. z относительно единичной окружности $|z|=1$, построение $w = \bar{\xi}$ состоит в нахождении

точки, симметричной точке ξ относительно действительной оси. Итак, преобразование $w = \frac{1}{z}$ есть наложение двух

преобразований: инверсии относительно единичной окружности и отражения относительно действитель-

ной оси $\xi = \frac{1}{z}, w = \bar{\xi}$

Функция $w = \frac{1}{z}$ не определена в т. $z=0$ и $z=\infty$. Доопределим эту функцию положив в т. $z=0$ $w=\infty$, а в т. $z=\infty$ $w=0$. Теперь эта функция определена на расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$. Это отображение конформно на $\bar{\mathbb{C}}$, если условиться считать, что угол между кривыми в бесконечно удаленной точке равен углу между образами кривых в начале координат.

Круговое свойство отображения $w = \frac{1}{z}$

Докажем, что функция $w = \frac{1}{z}$ преобразует прямую в окружность или в прямую и преобразует окружность в окружность или в прямую. Если считать прямую окружностью бесконечно большого радиуса, то можно сказать, что функция $w = \frac{1}{z}$ преобразует окружность в окружность. Это свойство называется круговым.

Для доказательства запишем уравнение произвольной окружности в декартовых координатах:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (*)$$

Заметим, что при $A=0$ уравнение изображает прямую, а при $D=0$ - линию, проходящую через т. $z=0$

Из соотношения $w = \frac{1}{z}$ находим $z = \frac{1}{w}$ или

$$x + yi = \frac{1}{U + Vi} = \frac{U - Vi}{U^2 + V^2} \quad \text{откуда} \quad x = \frac{U}{U^2 + V^2} \quad \text{и}$$

$$y = \frac{-V}{U^2 + V^2}$$

Подставляя в уравнение (*) эти значения x и y , находим $A + BU - CV + D(U^2 + V^2) = 0$. Мы получили уравнение окружности в обобщенном виде. При $D=0$ это уравнение изображает прямую.

Итак, функция $w = \frac{1}{z}$ отображает прямую или окружность, проходящие через т. $z=0$ в прямую, а не проходящие — в окружность.

6.3 Дробно-линейная функция

Определение 1. Дробно-линейной называется функция

$$(1) \quad w = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ где } c \neq 0, ad - bc \neq 0$$

Смысл ограничений состоит в том, что:

1. при $c=0, d \neq 0$ $w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ - функция линейна,
2. при $ad - bc = 0$ функция сводится к постоянной $w = \frac{a}{c}$ и преобразует всю плоскость в одну точку.

Доопределим функцию (1) в точках $z = -\frac{d}{c}$ и $z = \infty$,
положив

$$w\left(-\frac{d}{c}\right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{az + b}{cz + d} = \infty \quad \text{и} \quad w(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c}$$

При этих дополнениях функция определена на всей расширенной плоскости (z).

Функция осуществляет взаимно-однозначное отображение плоскости (z) на плоскость (w).

Каждому w ($w \neq \frac{a}{c}$, $w \neq \infty$) соответствует значение

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}, \text{ а при } w = \frac{a}{c} \text{ и } w \neq \infty \text{ имеем}$$

$$z\left(\frac{a}{c}\right) = \infty, \text{ ,. } z(\infty) = -\frac{d}{c}$$

Функция $w = \frac{az + b}{cz + d}$ имеет производную

$w' = \frac{ad - bc}{(cd + d)^2}$ во всех точках плоскости (z) кроме

$z = -\frac{d}{c}$, следовательно она аналитична на всей

плоскости (z) кроме $z = -\frac{d}{c}$. Так как $w'(z) \neq 0$, то

отображение, осуществляемое этой функцией конформно во всей плоскости (z) исключая т. $z = -\frac{d}{c}$

Покажем, что функция конформна в т. $z = -\frac{d}{c}$ и $z = \infty$. Пусть γ_1 и γ_2 две кривые образующие угол с вершиной в т. $z = -\frac{d}{c}$. Их образы — кривые Γ_1 и Γ_2 проходят через т. $w = \infty$. Как было показано ранее угол между кривыми Γ_1 и Γ_2 в т. $w = \infty$ принимается равным между их образами Γ'_1 и Γ'_2 в нулевой точке при отображении $\xi = \frac{1}{w}$. Очевидно, что Γ'_1 и Γ'_2 являются образами кривых γ_1 и γ_2 при отображении $\xi = \frac{1}{w} = \frac{cz + d}{az + b}$, а это отображение конформно в т. $z = -\frac{d}{c}$

Поэтому угол между γ_1 и γ_2 в т. $z = -\frac{d}{c}$ равен углу между Γ'_1 и Γ'_2 в нулевой точке и следовательно углу между Γ_1 и Γ_2 в т. $w = \infty$.

Итак, отображение конформно в т. $z = -\frac{d}{c}$. Конформность дробно линейного отображения в т. $z = \infty$ следует из конформности обратного отображения в т. $w = \frac{a}{c}$.

Записав дробно-линейную функцию в виде

$$w = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}, \text{ замечаем, что она может быть}$$

рассмотрена как наложение преобразований (3)

$\xi = z + \frac{d}{c}$, $\tau = \frac{1}{\xi}$, $w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \tau$, т.е. параллельного переноса в т. $-\frac{d}{c}$, инверсии с полюсом в т. $-\frac{d}{c}$, отражением относительно прямой, проходящей через т. $-\frac{d}{c}$, параллельно действительной оси, и, наконец, линейного преобразования.

Укажем два важных свойства дробно-линейного преобразования:

1. **Круговое свойство.** Каждое из трех преобразований (3) обладает круговым свойством, поэтому дробно-линейное преобразование обладает этим свойством.

Дробно-линейная функция преобразует окружность или прямую, проходящие через точку t . $z = -\frac{d}{c}$ в прямую, а не проходящие через эту точку — в окружность.

Почему?

Это становится ясным, если заметить, что т. $z = -\frac{d}{c}$ переходит в $w = \infty$ и образ линии, проходящей через т. $z = -\frac{d}{c}$ не может быть ограниченным.

1. Симметрия и ее сохранение.

Определение 2. Точки z и w , расположенные на радиусе некоторой окружности C и его продолжении так, что $|Oz| \cdot |O\xi| = R^2$, где O и R обозначают центр и радиус окружности C , называются сопряженными или симметричными относительно C . Центр окружности C считается сопряженным с бесконечно удаленной точкой.

Теорема. Произвольное дробно-линейное преобразование переводит точки z и ξ , симметричные относительно окружности C , в т. w и ω , симметричные относительно образа C' этой окружности.

