



СВІТ ЧОТИРИКУТНИКІВ



8 КЛАС



Предмет математика
настільки серйозний,
що корисно не упустити випадків
робити його цікавим.

Б.Паскаль



ЗМІСТ

1. Паралелограм.
2. Паралелограм і його властивості.
3. Прямокутник і його властивості.
4. Площа і периметр прямокутника.
5. Задачі.
6. Ромб і його властивості.
7. Периметр і площа ромба.
8. Розв'язування задач.
9. Квадрат.
10. Периметр і площа квадрата.
11. Порівняльна таблиця паралелограмів.
12. Таблиця паралелограми.
13. Додаткові задачі до розділів.
14. Література.

Мета:

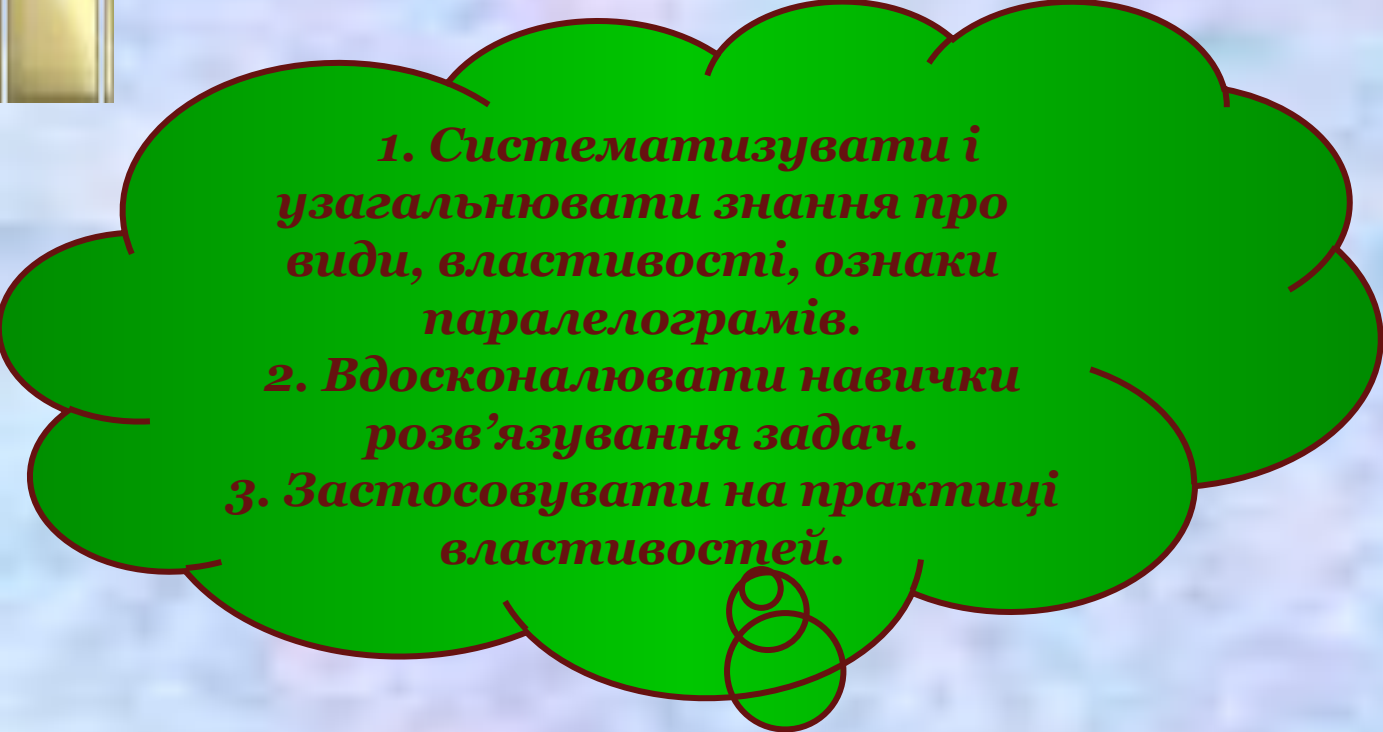
- систематизувати і повторити знання про властивості паралелограмів;
- закріпити уміння і навички використання властивостей при розв'язуванні задач;
- продовжити вдосконалення навичок роботи у групах, показати практичну значимість геометрії.
- розвивати логічне мислення, творчі здібності; вміння систематизувати та узагальнювати.
- виховувати самостійність, уважність, інтерес до предмету, повагу один до одного, виховувати почуття відповідальності, самоконтролю.

Це ми повинні знати.

1. Яка фігура називається паралелограмом?
2. Яка фігура називається прямокутником; ромбом; квадратом?
3. Властивості прямокутника.
4. Властивості ромба.
5. Властивості квадрата.
6. Чим відрізняється квадрат від ромба?
7. Різницю між квадратом і прямокутником.
8. Властивості діагоналей ромба.
9. Площу і периметр паралелограмів.

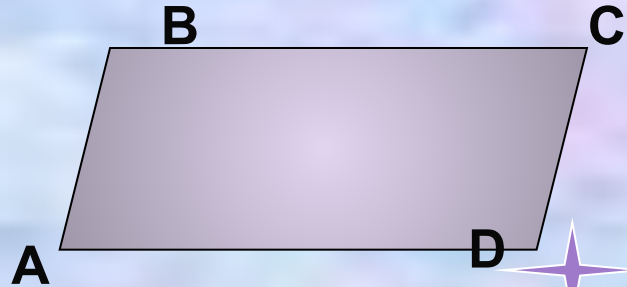


**Що ми
повинні
вміти?**

- 
- 1. Систематизувати і узагальнювати знання про види, властивості, ознаки паралелограмів.**
 - 2. Вдосконалювати навички розв'язування задач.**
 - 3. Застосовувати на практиці властивостей.**



Паралелограм і його властивості



Паралелограм $ABCD$ - це чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні, тобто лежать на паралельних прямих.

У паралелограма протилежні сторони рівні.

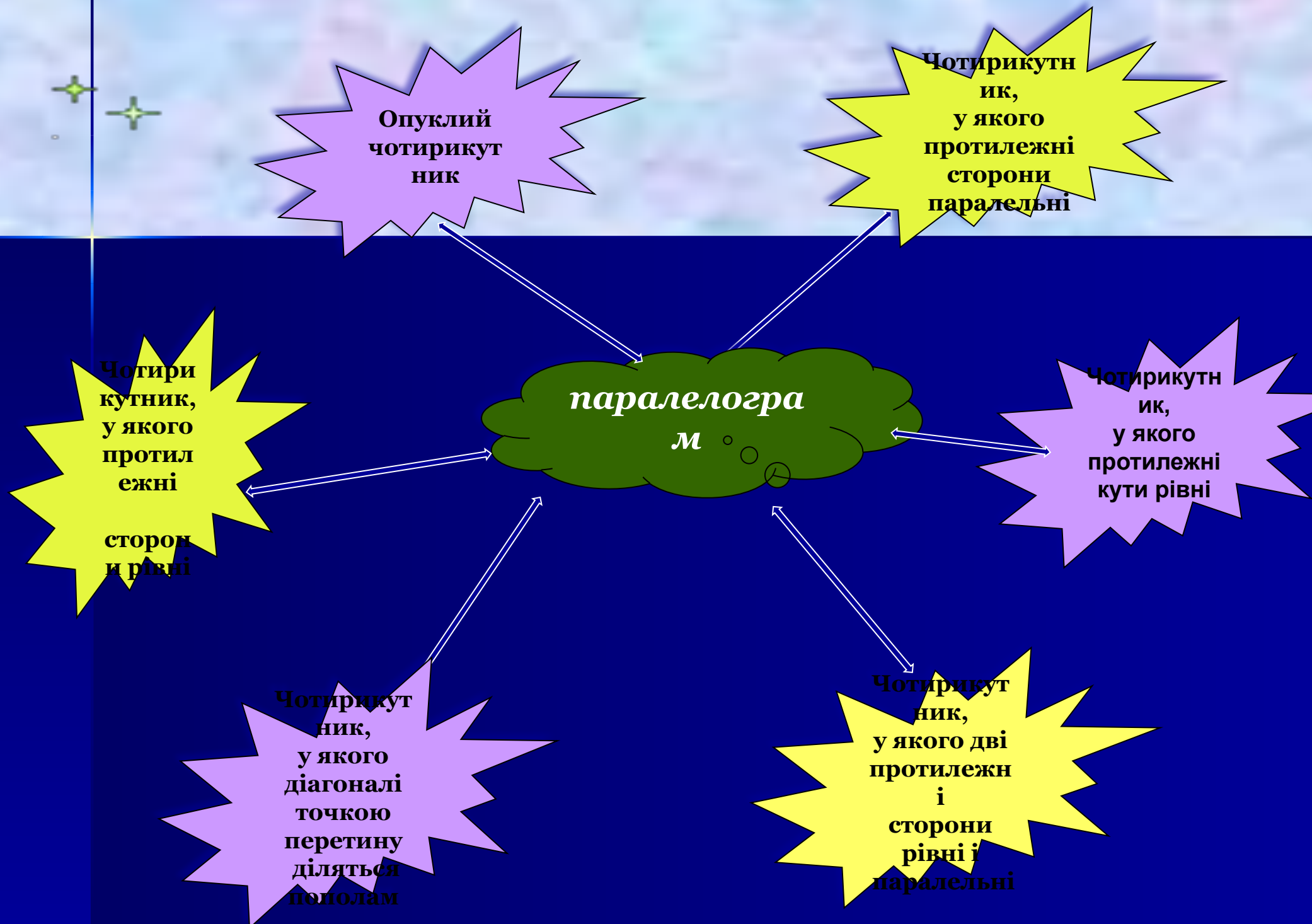
У паралелограма протилежні кути рівні.

У паралелограма сума кутів, що прилягають до однієї сторони дорівнює 180°

Діагональ ділить паралелограм на два рівні трикутники.

Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться пополам.

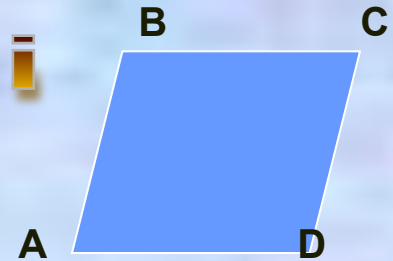
Запам'ятай!



А як називається чотирикутник, якщо?

- а) Якщо дві протилежні сторони чотирикутника паралельні й рівні, то цей чотирикутник — паралелограм,
- б) Якщо протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм ,
- в) Якщо діагоналі чотирикутника діляться точкою перетину навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм .

Усні задачі



1. Чи є чотирикутник ABCD паралелограмом, якщо:
 - а) $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 150^\circ$, $\angle C = 30^\circ$;
 - б) $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 80^\circ$?
2. Доведіть, що якщо діагональ AC ділить чотирикутник ABCD на два рівні трикутники ABC і CDA, то ABCD — паралелограм.



математичний дикта

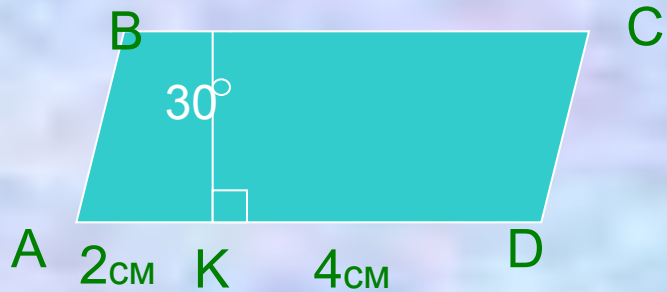
Закінчіть речення так, щоб утворилося істинне твердження.

- Паралелограм — це чотирикутник, у якого протилежні сторони...
- У паралелограмі протилежні кути і сторони...
- У паралелограма сума двох сусідніх кутів дорівнює...
- У паралелограма сума всіх кутів дорівнює...
- Якщо дві протилежні сторони чотирикутника паралельні й рівні, то...
- Якщо діагоналі чотирикутника діляться точкою перетину навпіл, то...

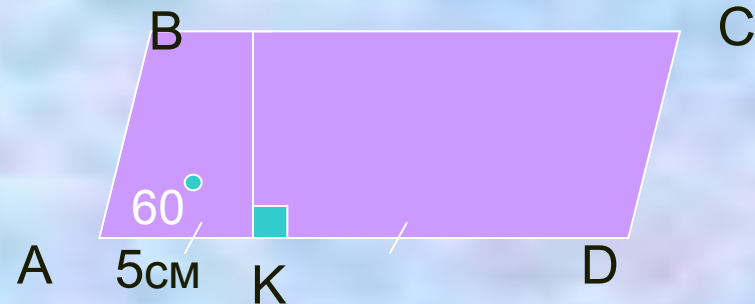


Знайти сторони паралелограма.

Задача1.

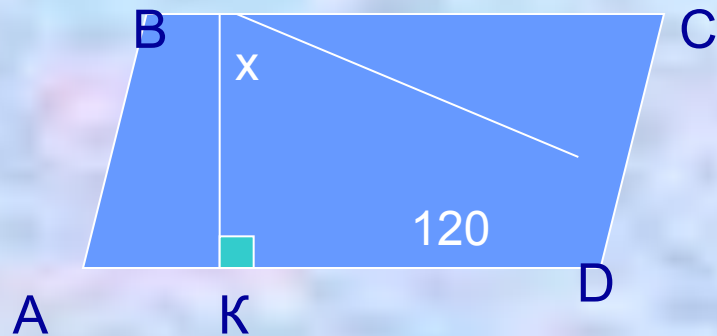


Задача2.

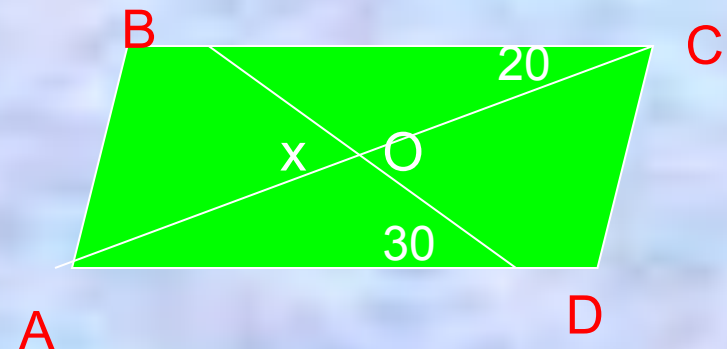


ЗНАЙТИ КУТ Х.

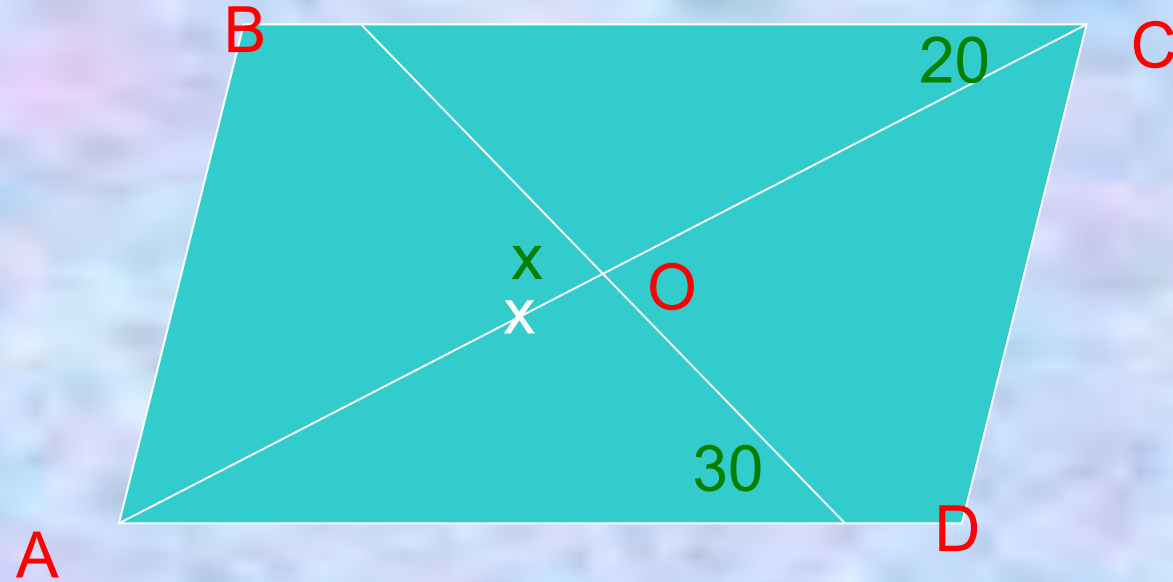
Задача3.



Задача4.

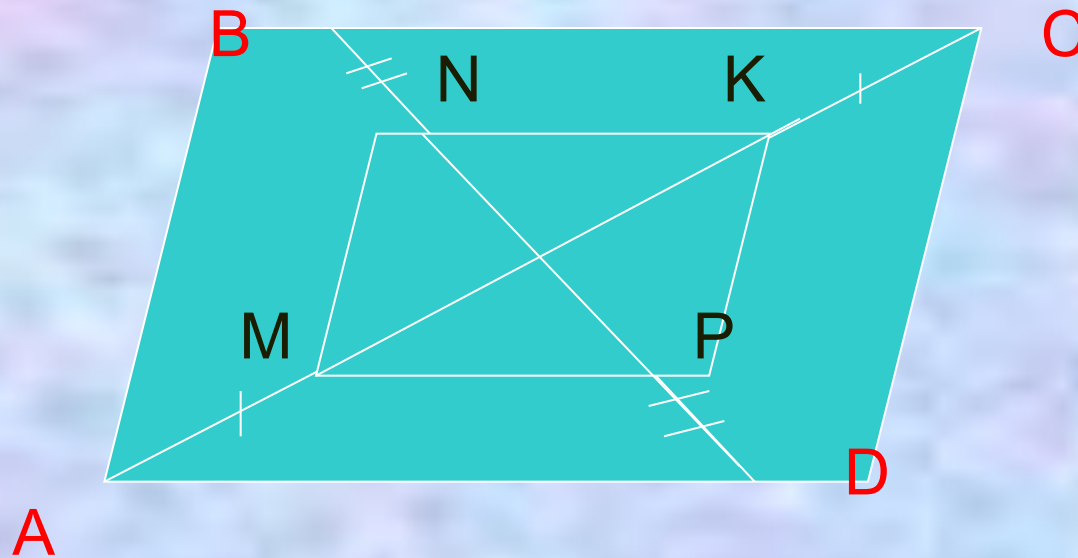


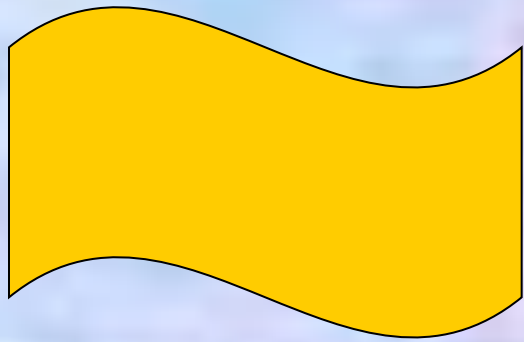
Задача. Знайти кут x .



Задача*.

ABCD-паралелограм, $AM=KC$, $BN=PD$. Доведіть, що $MP=PK$.

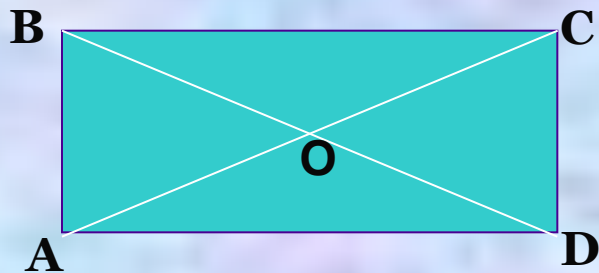




Прямокутник

Означення. Прямокутник - це чотирикутник, у якого всі кути прямі, тобто, рівні 90° .

Довжиною прямокутника називають довжину довшої пари його сторін, а шириною довжину коротшої пари сторін.

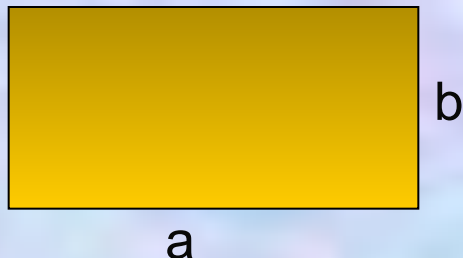


Властивості прямокутника

1. Діагоналі прямокутника рівні.
2. Прямокутник є паралелограмом і його протилежні сторони паралельні.
3. Сторони прямокутника є одночасно його висотами.
4. Квадрат діагоналі прямокутника рівний сумі квадратів двох його суміжних сторін.
5. Довжина діагоналі прямокутника обчислюється за теоремою Піфагора і рівна квадратному кореню з суми квадратів довжини і ширини.



Площа і периметр прямокутника



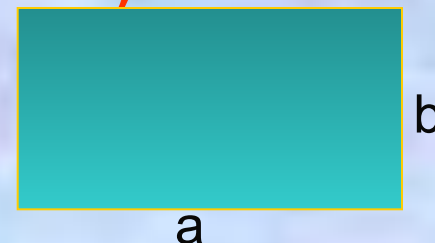
Величина площі прямокутника рівна добутку ширини прямокутника на його довжину.

$$S = ab$$

Периметр прямокутника рівний подвоєній сумі довжин його ширини і довжини.

$$P = 2(a + b)$$

перевір себе.

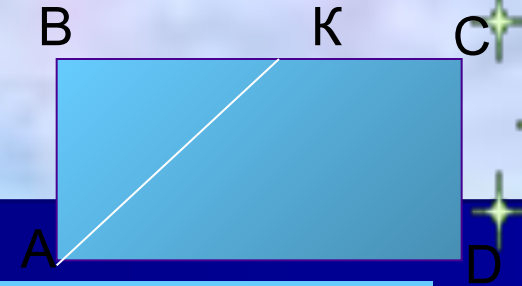


Знайти площу і периметр прямокутника, якщо:

- а) $a = 8\text{см}$, $b = 4\text{см}$;
- б) $a = 2\text{см}$, $b = 14\text{см}$;
- в) $a = 8,5\text{см}$, $b = 4\text{см}$;
- г) $a = 3\text{см}$, $b = 4\text{см}$;
- д) $a = 5\text{см}$, $b = 4\text{см}$;

- а) $S = 32\text{ см}^2$; $P = 24\text{см}$.
- б) $S = 28\text{ см}^2$; $P = 32\text{см}$.
- в) $S = 34\text{ см}^2$; $P = 25\text{см}$.
- г) $S = 12\text{ см}^2$; $P = 14\text{см}$.
- д) $S = 20\text{ см}^2$; $P = 18\text{см}$.

Працюємо разом



Задача 1. Бісектриса одного з кутів прямокутника ділить його сторону пополам. Знайдіть периметр трикутника, якщо його менша сторона дорівнює 10 см.

Розв'язання:

Так як AK – бісектриса кута A , то $\angle BAK = \angle KAD$. $\angle BKA = \angle KAD$, як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих BC і AD та січній AK .

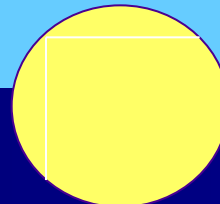
Звідси $\angle BAK = \angle BKA$ і трикутник ABK – рівнобедрений. $AB = BK = 10$ см. $BK = KC$ за умовою, отже $BC = 2BK = 2 \cdot 10 = 20$ (см).

$$P = 2(a + b) = 2 \cdot (10 + 20) = 60 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 60 см.

Задача 2. (Самостійно) З однієї точки кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди, віддалені від центра на 6 см і 10 см. Знайдіть їх довжини.

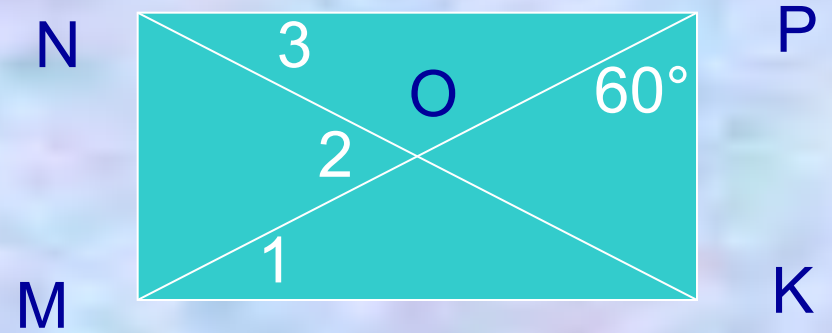
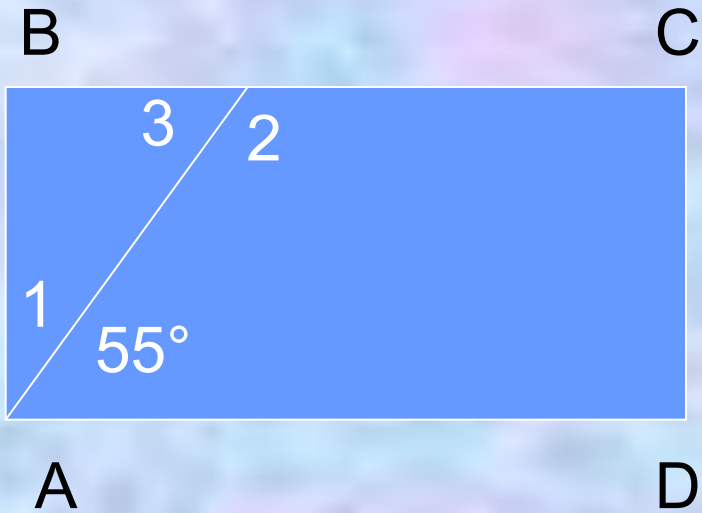
Відповідь: 12 см; 20 см .



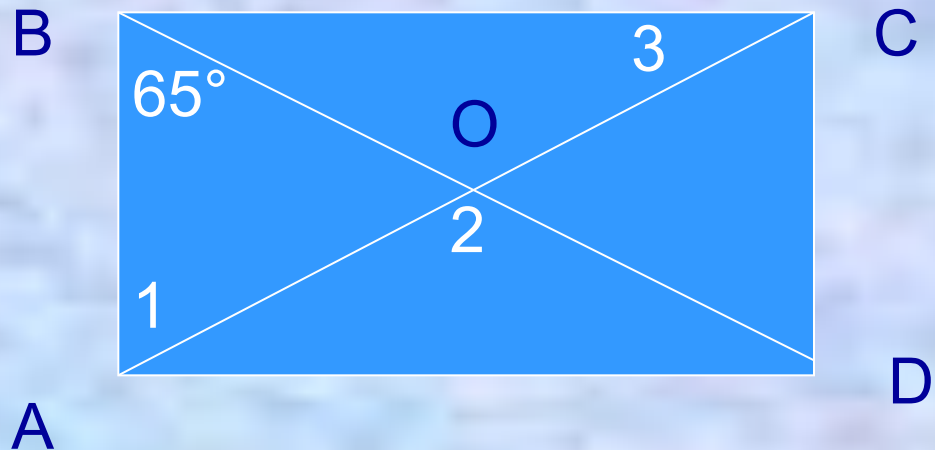
Знайти кути 1, 2, 3.

Задача2.

Задача1.

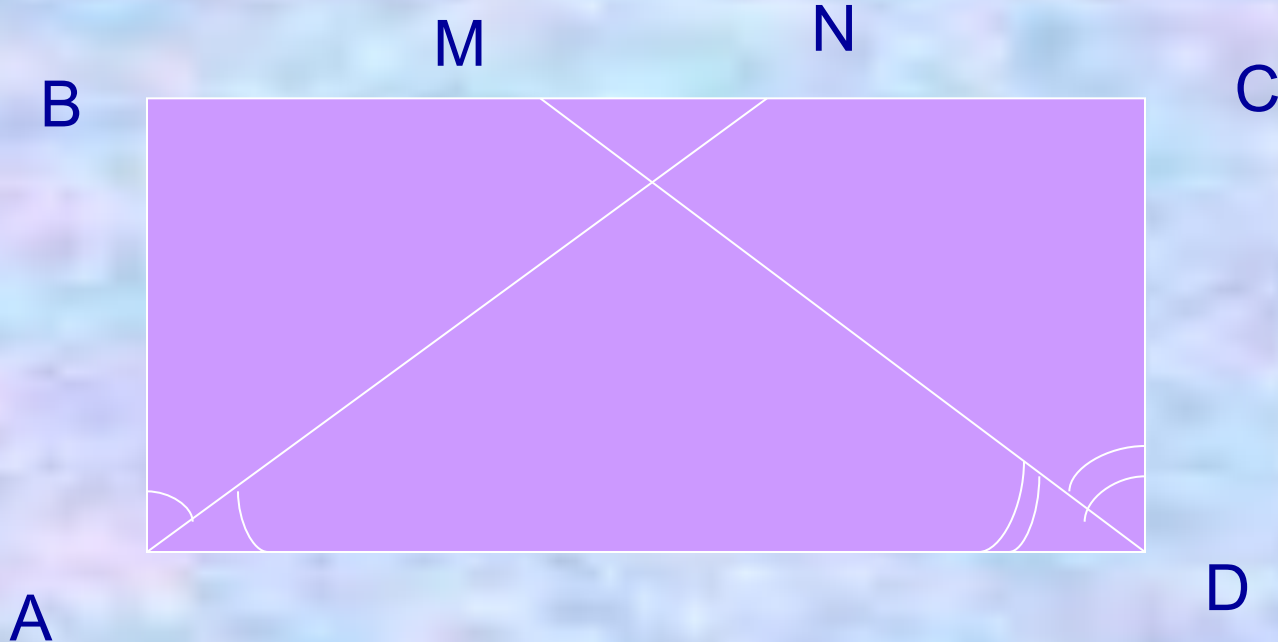


Задача3.



Задача*.

$AB=a$, $BC=c$. AN і DM бісектриси кутів A і D .
Знайдіть довжину відрізка MN .



Ромб

Означення. Ромб - це чотирикутник, у якого всі сторони рівні.

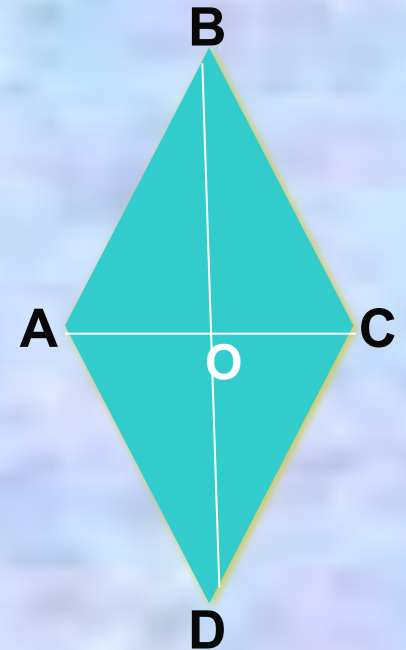
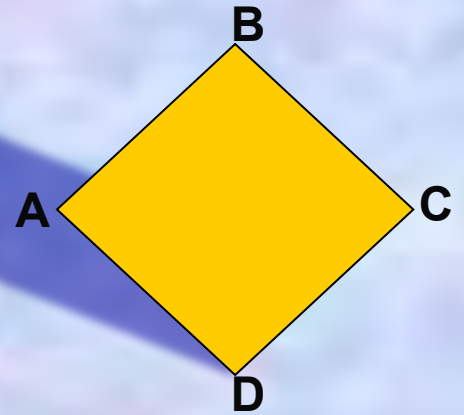
Слово «ромб» вперше уживається у працях Герона і Папи Александрійського.

Властивості ромба

Так як ромб є паралелограмом, то всі властивості паралелограма є властивостями ромба.

Проте він має свої властивості.

1. Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом і в точці перетину діляться навпіл.
2. Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів ($\angle DCA = \angle BCA$, $\angle ABD = \angle CBD$).
3. Сума квадратів діагоналей рівна квадрату сторони, помноженому на чотири.
4. Діагональ ділить ромб на два рівні рівнобедрені трикутники.
5. Діагоналі ділять ромб на чотири рівні прямокутні трикутники.

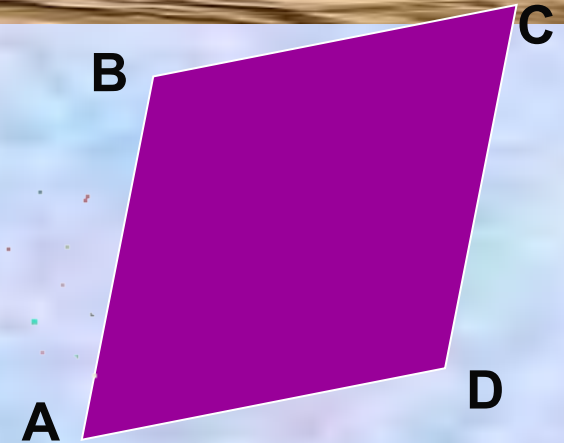


А хочеш знати що?



Ромб має наступні елементи симетрії:

- одну вісь симетрії яка перпендикулярна площині ромба і проходить через його центр;
- дві осі симетрії другого порядку, з яких дві проходять вздовж діагоналей ромба.



Площа ромба

1. Площа ромба рівна половині добутку його діагоналей.

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2$$

2. Оскільки ромб є паралелограмом, тоді його площа також рівна добутку його сторони на висоту опущену на цю сторону.

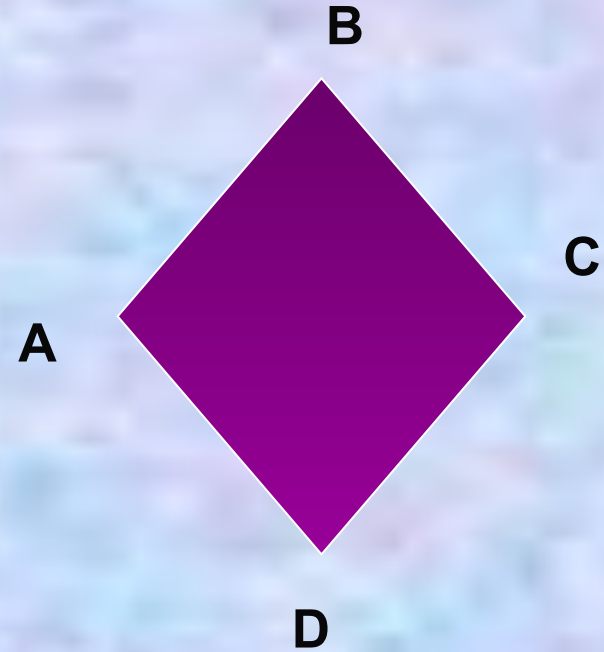
$$S = ah$$

3. Площа ромба рівна квадрату його сторони на синус кута між сторонами.

$$S = a^2 \sin \alpha$$



Працюємо разом



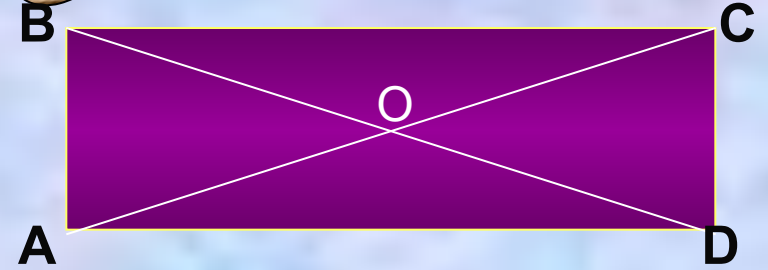
Знайти периметр і площу ромба.

- а) $a = 8\text{см}$;
- б) $a = 2\text{см}$;
- в) $a = 8,5\text{см}$;
- г) $a = 3\text{см}$;
- д) $a = 5\text{см}$

- а) $S = 64\text{см}^2$; $P = 32\text{см}$.
- б) $S = 4\text{см}^2$; $P = 8\text{см}$.
- в) $S = 72,25\text{ см}^2$; $P = 34\text{см}$.
- г) $S = 9\text{ см}^2$; $P = 12\text{см}$.
- д) $S = 25\text{ см}^2$; $P = 20\text{см}$.



Перевір себе.

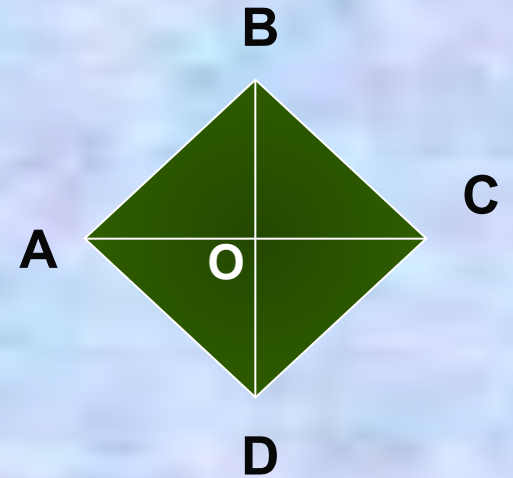


Теорема 1. Діагоналі прямокутника рівні.

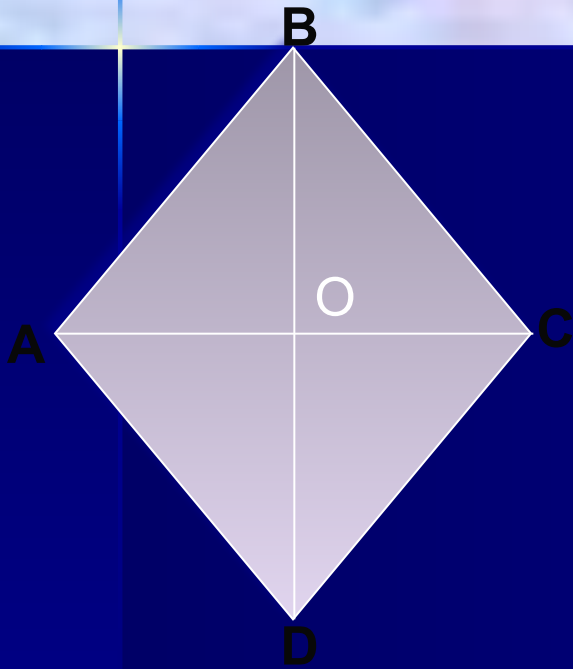
Твердження теореми випливає з рівності прямокутних трикутників BAD і CDA . У них кути BAD і CDA прямі, катет AD спільник, а катети AB і CD рівні як протилежні сторони паралелограма. З рівності трикутників випливає, що їх гіпотенузи теж рівні. А гіпотенузи є діагоналями прямокутника. Теорему доведено.

Теорема 2. Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом. Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.

Доведення. Нехай $ABCD$ – даний ромб., а O – точка перетину його діагоналей. За властивість. Паралелограма $AO = OC$. Отже у рівнобедреному трикутнику ABC відрізок BO є медіаною. За властивістю рівнобедреного трикутника медіана, проведена до його основи, є бісектрисою і висотою. А це означає, що діагональ BD є бісектрисою кута B і перпендикулярна до діагоналі AC . Теорему доведено.



Працюємо разом.



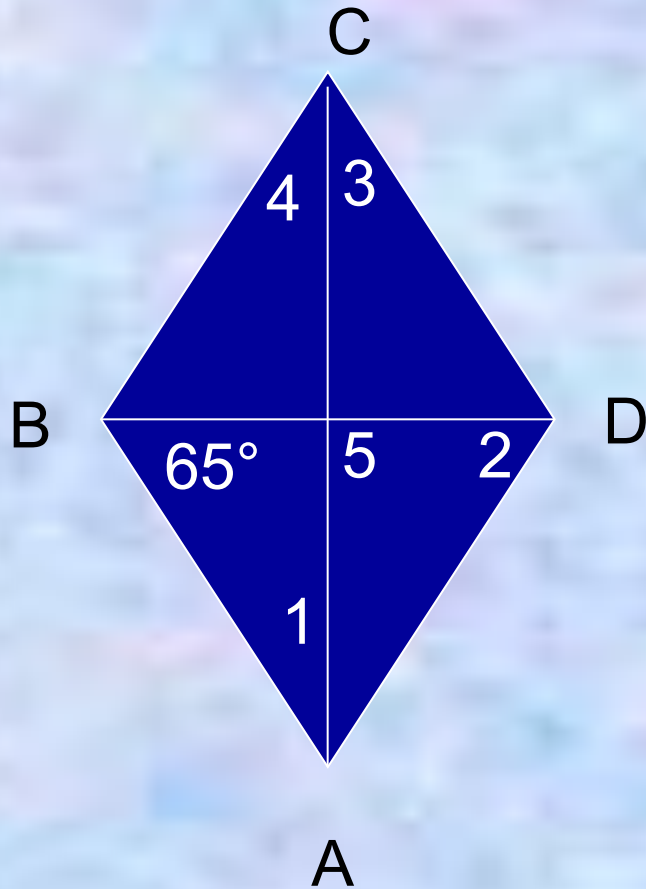
Нехай $ABCD$ - даний ромб, а O – точка перетину діагоналей.

1. Яка фігура називається ромбом?
2. Сформулювати теорему про діагоналі паралелограма.
3. Яким є трикутник ABC ?
4. Чим є для трикутника ABC відрізок BO ?
5. Чим є промінь BO для кута ABC ?
6. Який можна зробити висновок про взаємне розміщення діагоналей ромба і променів BA , BO , BC ?
7. Назвіть вид трикутників на які ділять ромб його діагоналі?



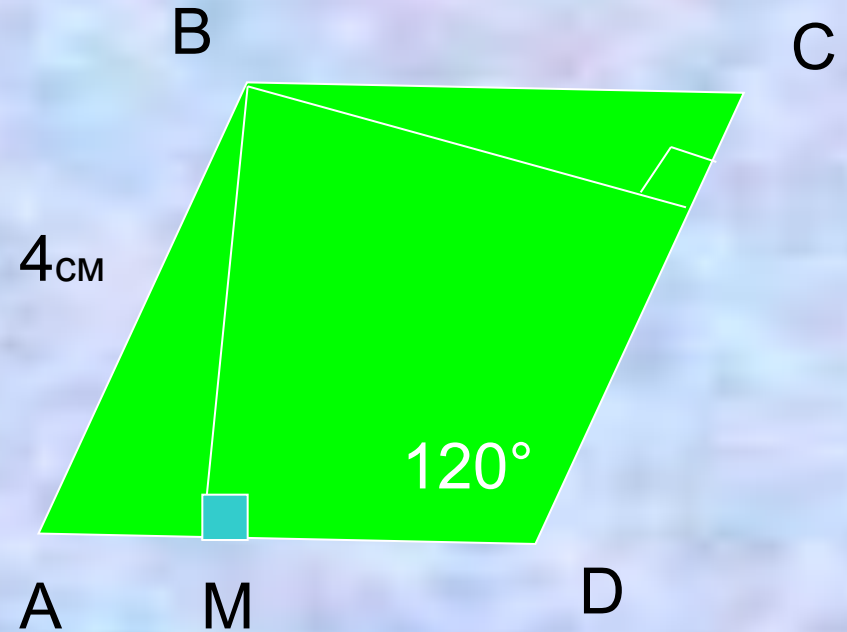
Задача1.

Знайти кути 1, 2, 3, 4, 5.

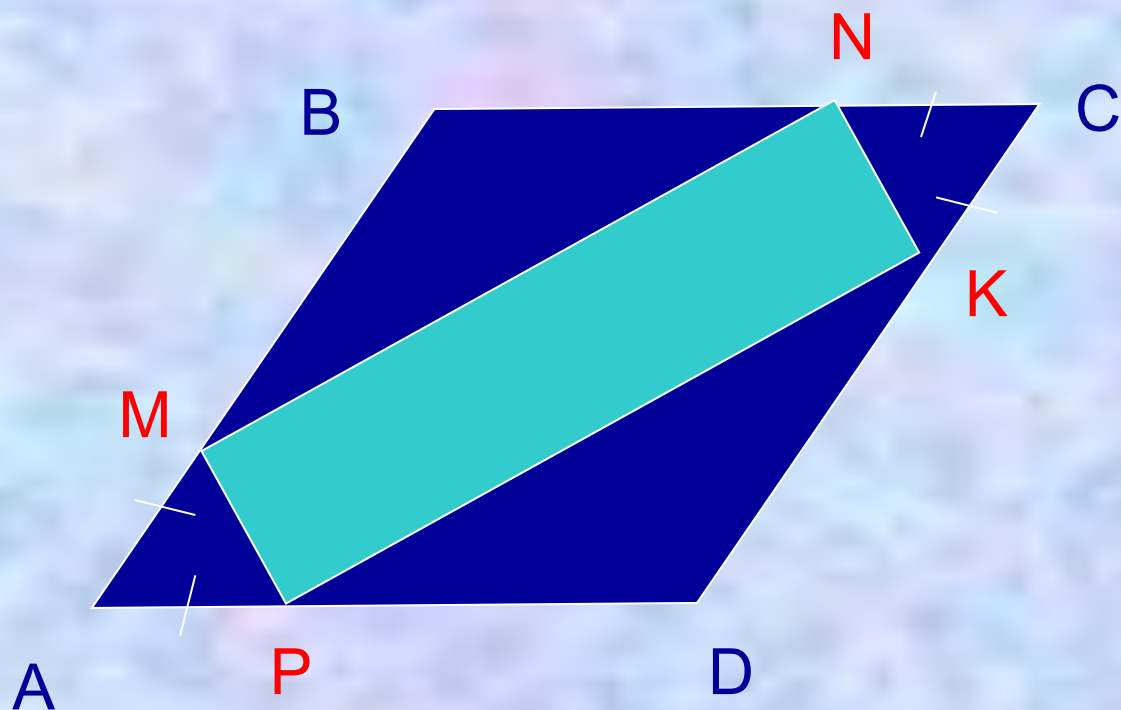


Задача2.

ABCD-ромб. Знайти довжини відрізків AM, MB, BM.



Задача*.



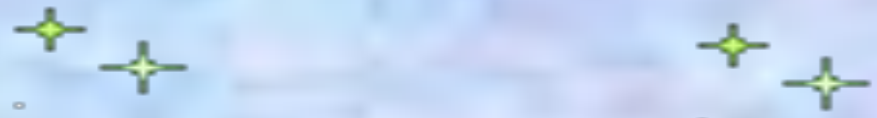
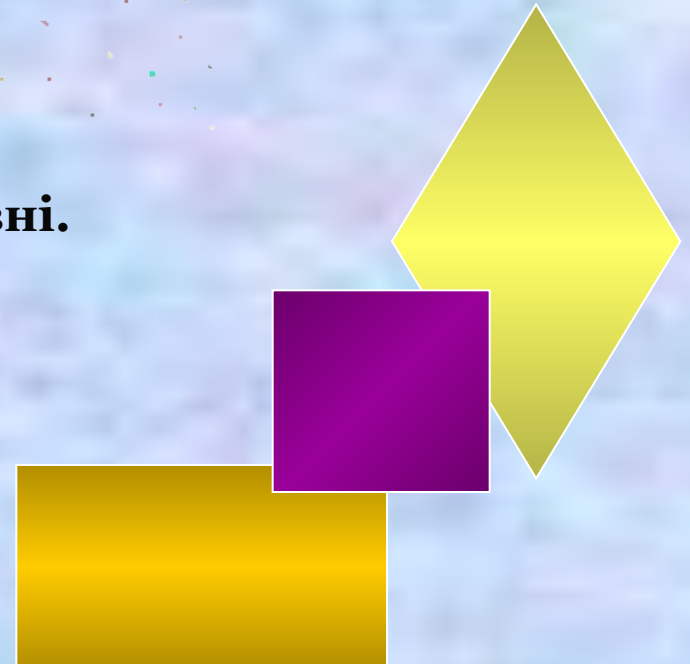
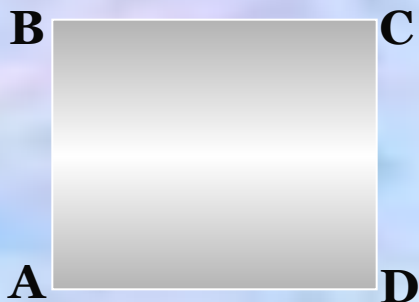
$ABCD$ -ромб.
Довести, що $MNRK$ -
прямокутник.

Квадрат

Квадрат – це прямокутник у якого всі сторони рівні.

Квадрат є також ромбом у якого всі кути рівні.

Тому він має властивості прямокутника і ромба



А чи знаєш ти ?

Квадрат володіє найбільшою кількістю симетрій серед всіх чотирикутників.

При розрізанні квадрата діагоналлю отримуємо два рівнобедрених прямокутних трикутники.

Діагональ квадрата рівна добутку сторони і квадратного кореня з двійки.

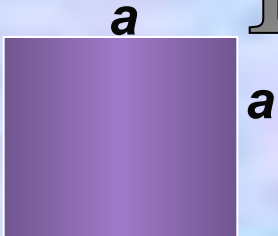
Радіус описаного кола дорівнює половині добутку сторони і квадратного кореня з двійки.

Радіус вписаного кола дорівнює половині сторони квадрата.

У квадрата центри вписаного і описаного кіл і центр симетрії співпадають.



Периметр і площа квадрата



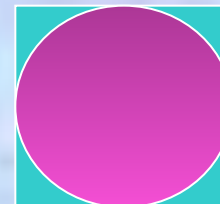
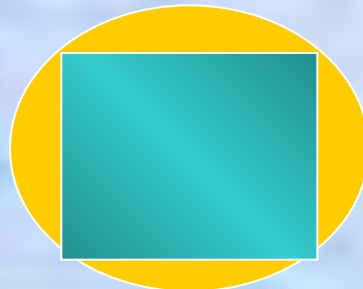
Нехай a - сторона квадрата, R - радіус описаного кола, r - радіус вписаного кола.

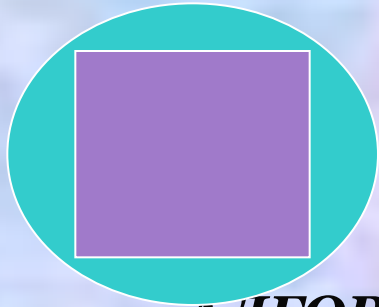
Тоді периметр квадрата рівний:

$$P = 4a = 4(20,5)R^2 = r^2.$$

а площа S квадрата розраховується по формулі

$$S = a^2 = 2R^2 = 4r^2.$$



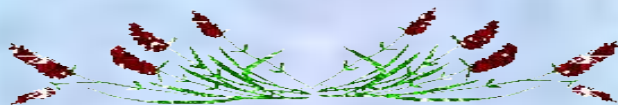
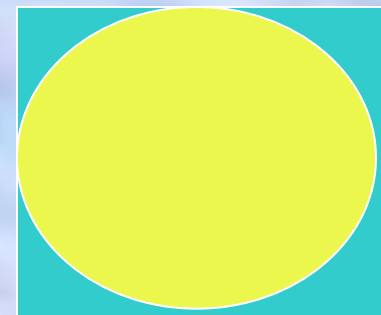


АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ ВПИСАНОГО КВАДРАТА

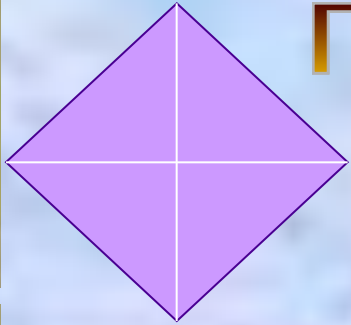
1. Побудуйте довільне коло.
2. Проведіть перпендикулярні діаметри цього кола.
3. Через точки перетину кола з діаметрами побудуйте квадрат.
4. Отримали вписаний квадрат.

АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ ОПИСАНОГО НАВКОЛО КОЛА КВАДРАТА

1. Побудуйте довільне коло.
2. Проведіть перпендикулярні діаметри цього кола.
3. Отримали точки перетину кола і діаметрів.
4. Проведіть дотичні до кола в точки перетину діаметрів кола і кола.
5. Отримали описаний квадрат.



Працюємо в групах.



I група.

Дати відповідь: Чи буде чотирикутник квадратом, якщо його діагоналі:

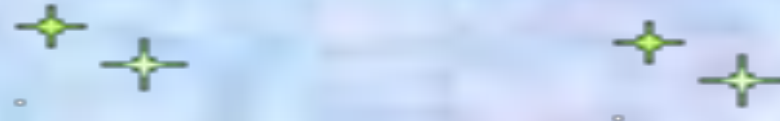
- а) рівні і взаємно перпендикулярні;
- б) взаємно перпендикулярні і мають спільну середину;
- в) рівні, взаємно перпендикулярні і мають спільну середину.

II група.

Довести. Доведіть, що ромб, у якого один кут прямий, є квадратом.

III група.

Дати відповідь: Який чотирикутник називається квадратом? Сформулюйте основні властивості квадрата.



Порівняльна характеристика паралелограмів

| № | властивості | прямокутник | ромб | квадрат |
|----|---|-------------|------|---------|
| 1 | Протилежні сторони рівні | + | + | + |
| 2 | Всі сторони рівні | - | + | + |
| 3 | Протилежні кути рівні | + | + | + |
| 4 | Всі кути рівні (по 90°) | + | - | + |
| 5 | Сума кутів, прилеглих до однієї сторони дорівнює 180° | + | + | + |
| 6 | Діагональ ділить на два рівні трикутники | + | + | + |
| 7 | Діагональ ділить на два рівні рівнобедрені трикутники | - | + | + |
| 8 | Діагональ ділить на два рівні прямокутні трикутники | + | - | + |
| 9 | Діагоналі точкою перетину діляться пополам | + | + | + |
| 10 | Діагоналі ділять на чотири прямокутні трикутники | - | + | + |
| 11 | Діагоналі перетинаються під прямим кутом (взаємноперпендикулярні) | - | + | + |
| 12 | Діагоналі є бісектрисами кутів | - | + | + |

Запам'ятай!

Паралелограми

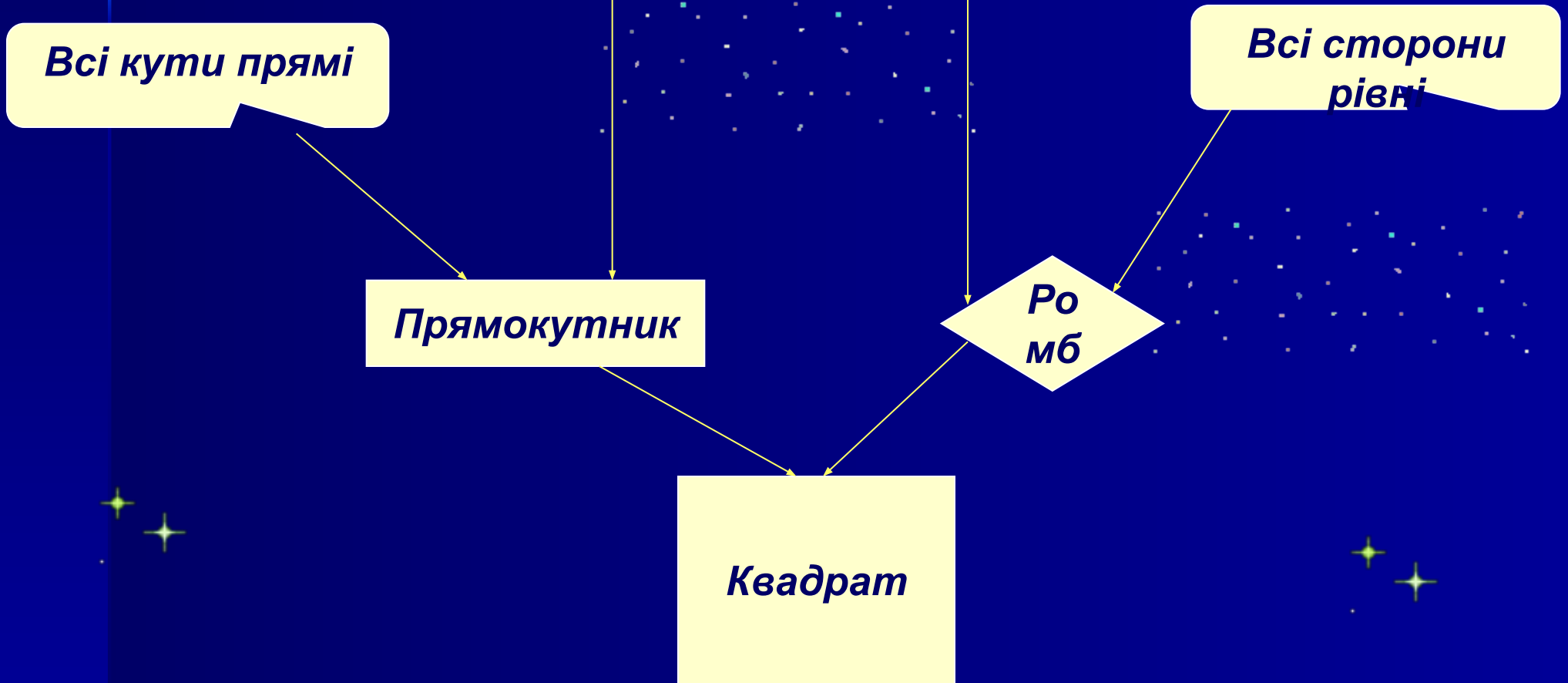
Всі кути прямі

**Всі сторони
рівні**

Прямокутник

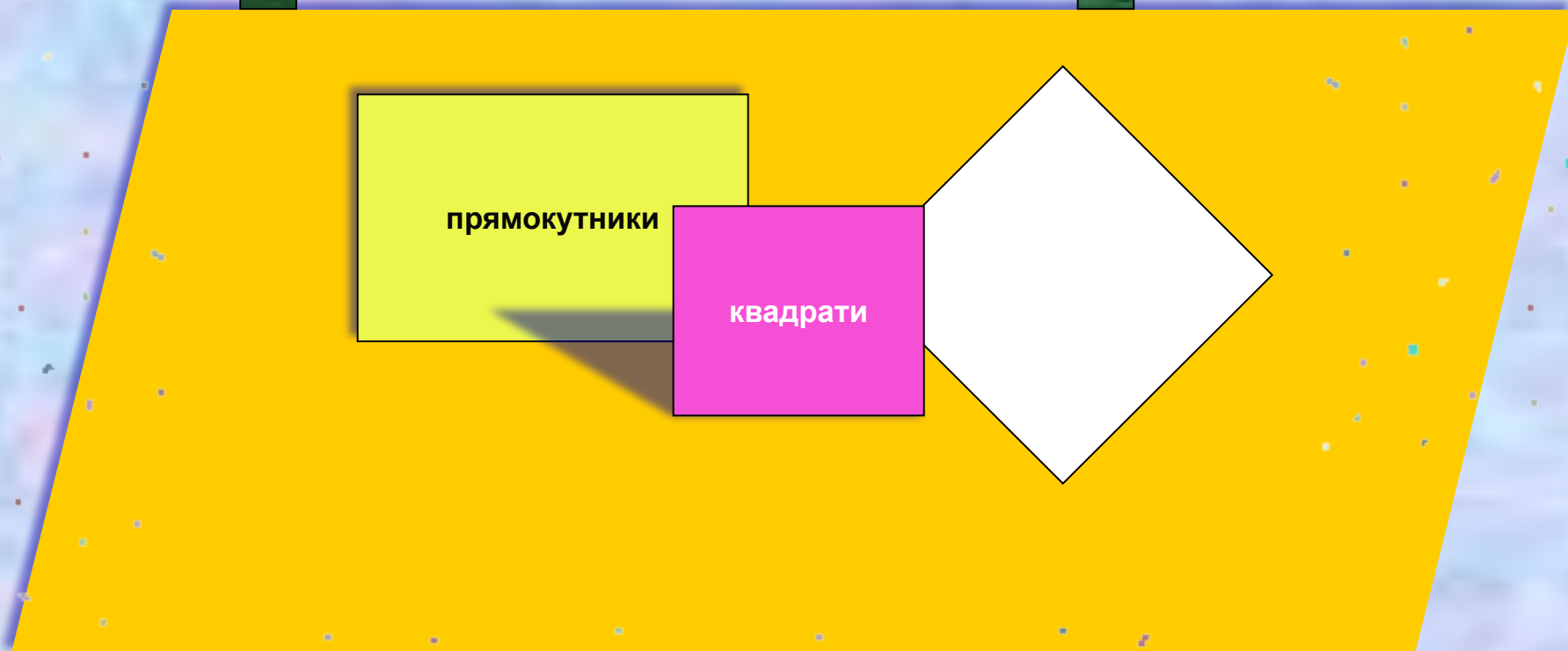
**Ро
мб**

Квадрат



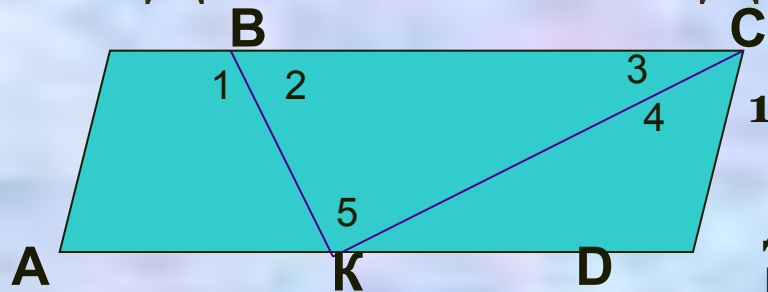
паралелограми

паралелограми



Додаткові задачі

Вчимося використовувати прийом
нанизування на одну ідею
декілька задач



1. Дано: ABCD паралелограм. $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$.

Довести, що $\angle 5 = 90^\circ$

Розв'язок: $\angle B + \angle C = 180^\circ$, $2(\angle 4 + \angle 1) = 180^\circ$,

Звідси $\angle 4 + \angle 1 = 90^\circ$,

$\angle 5 = 180^\circ - (\angle 4 + \angle 1) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Відповідь: 90° .

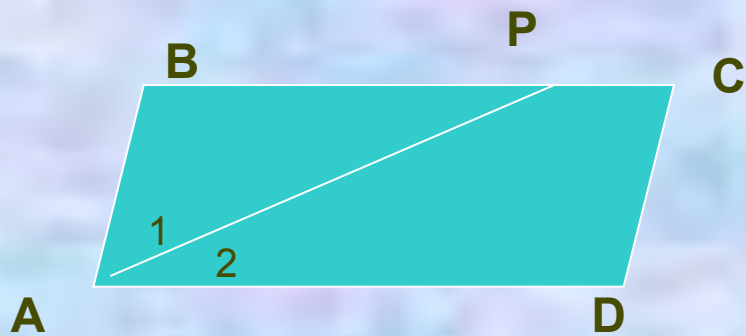
Працюємо в групах.

2. Дано: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$; $\angle 5 + \angle 3 = 150^\circ$; $BC = 12$ см. Знайти BK. (1 група)

3. Дано: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$; $\angle 3 - \angle 2 = 20^\circ$; Знайти $\angle A$. (2 група)

4. Дано: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$; $AD = 20$ см, $BK = 10$ см, $DC + BC = 34$ см.
Знайти KD. (3 група)

Працюємо разом



Розв'язуємо задачі з коментарем.

Задача 1. $\angle 1 = \angle 2$, $BP = 3$ см. Знайти периметр паралелограма ABCD.

Задача 2. $\angle 1 = \angle 2$, $AP = 15$ см, $DC = 9$ см. Знайти периметр паралелограма ABCD.

Задача 3. $\angle 1 = \angle 2$, периметр паралелограма ABCD дорівнює 52 см. $PC - AD = 8$ см. Знайти AD.

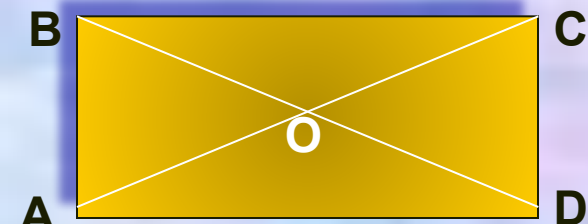
Задача 4. $\angle 1 = \angle 2$, периметр паралелограма ABCD дорівнює 20 см. $AD = 3PC$. Знайти AD.

Задача 5. $\angle 1 = \angle 2$, $AD = AB + 2$ см, $AB = PC - 1$ см. Знайти периметр паралелограма ABCD.

Задача 6. $\angle 1 = \angle 2$, $AP = AB + 3$ см, $AD = AP$. Периметр паралелограма ABCD дорівнює 26 см. Знайти периметр чотирикутника APCD.

Прямокутник

Працюємо в групах

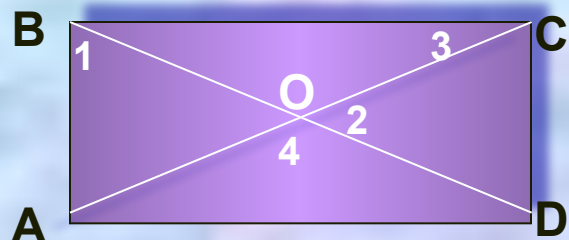


Мал. 1

I група. Задача 1. Різниця периметрів $\triangle ABD$ і $\triangle AOD$ дорівнює 4 см. Знайти AB . (Мал. 1)

Задача 2. $\sphericalangle 1 : \sphericalangle 3 = 7 : 2$. Знайти $\sphericalangle 4$. (мал. 2)

II група. Задача 1. Сума периметрів $\triangle AOD$ і $\triangle BOC$ дорівнює 64 см. $AD + BC = 24$ см. Знайти AC . (Мал. 1)



Мал. 2

Задача 2. $AC : CD = 2 : 1$. Довести, що $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$. (Мал.2)

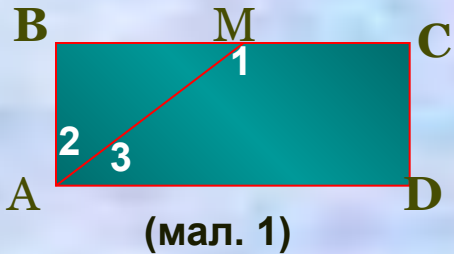
III група. Задача 3. Дано: $\sphericalangle 1 = 57^\circ$. Знайти $\sphericalangle 2$. (мал.2)

Задача 4. Довести, що $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 3 = 90^\circ$. (Мал. 2)

Задача 5. $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 63^\circ$. Знайти $\sphericalangle 1$. (мал.2)

Працюємо разом

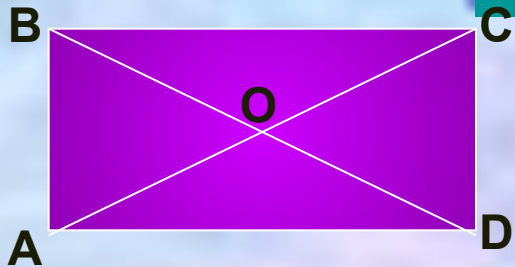
Прямокутник



Задача 1. Дано: $AB = BM$. Знайти $\sphericalangle 1$. (мал. 1)

Задача 2. Дано $AB = BM$, $\sphericalangle 1 + \sphericalangle D = 225^\circ$, $AD = 10$ см .
Знайти $AB + MC$. (мал. 1)

Задача 3. Дано: $AB = 3$ см, $MC = 7$ см, $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 2$. Знайти периметр прямокутника ABCD.



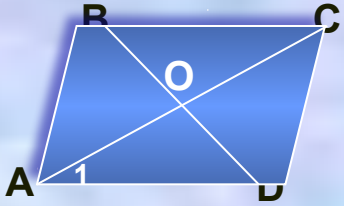
Задача 4. Дано: периметр трикутника AOD дорівнює 18 см. $AC + BD = 22$ см. Знайти BC.

Задача 5. Дано: периметр трикутника ACD дорівнює 49 см, а периметр прямокутника ABCD дорівнює 62 см. Знайти AO.

Задача 5. Дано: периметр трикутника COD дорівнює 30 см, $AC + BD = 40$ см. Знайти $\sphericalangle AOD$.

Працюємо разом

Ромб



Задача 1. Периметр ромба ABCD дорівнює 40 см, $BD + AC = 28$ см. Знайти периметр трикутника AOB.

Задача 2. Периметр трикутника AOB дорівнює 36 см. $BD + AC = 42$ см. Знайти AD.

Задача 3. Периметр трикутника AOD дорівнює 14 см, а периметр трикутника ACD дорівнює 20 см. Знайти BD.

Задача 4. У ромба ABCD кут ADC у сім разів більший за $\sphericalangle 1$. Знайти $\sphericalangle BAD$.

Задача 5. Кут BAD дорівнює 28° . Знайти кут CBD.

Задача 6. Різниця периметрів трикутників ABC і AOD дорівнює 6 см. Знайти $AB + AO - DO$.

Задача 7. Довести, що $\sphericalangle DAC + \sphericalangle DBC = \sphericalangle AOD$.

Література:

1. І.Ф. Тесленко, С.М. Чашечніков, Л.І. Чашечнікова. Методика викладання планіметрії // Київ. Освіта. 1992.
2. Г.П. Бевз, В.Г Бевз, Н.Г. Владімірова. Геометрія: Підручник для 8 класу середніх загальноосвітніх закладів/ Київ: Вежа, 2008.
3. Л.С. Атанасян, В,Ф, Бутузов, і ін. Геометрія: Підручник для 7-9 класів / К.:Освіта, 1993.
4. О. Гайштут, Г. Литвиненко. Геометрія – це не складно//Київ: “Магістр -S”, 1997.

