

ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ

§ 1. Формула Бернулли

ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ

§ 1. Формула Бернулли

§ 1. Формула Бернулли

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события A* .

В разных независимых испытаниях событие A может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность.

ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ

§ 1. Формула Бернулли

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события A* .

В разных независимых испытаниях событие A может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность события A в каждом испытании одна и та же, а именно равна p . Следовательно, вероятность ненаступления события A в каждом испытании также постоянна и равна $q = 1 - p$.

Поставим перед собой задачу вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз и, следовательно, не осуществится $n - k$ раз. Важно подчеркнуть, что не требуется, чтобы событие A повторилось ровно k раз в определенной последовательности. Например, если речь идет о появлении события A три раза в четырех испытаниях, то возможны следующие сложные события: $AAA\bar{A}$, $AA\bar{A}A$, $A\bar{A}AA$, $\bar{A}AAA$. Запись $AAA\bar{A}$ означает, что в первом, втором и третьем испытаниях событие A наступило, а в четвертом испытании оно не появилось, т. е. наступило противоположное событие \bar{A} : соответственный смысл имеют и другие записи.

Искомую вероятность обозначим $P_n(k)$. Например, символ $P_5(3)$ означает вероятность того, что в пяти испытаниях событие появится ровно 3 раза и, следовательно, не наступит 2 раза.

Поставленную задачу можно решить с помощью так называемой формулы Бернулли.

Вывод формулы Бернулли. Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A наступит k раз и не наступит $n - k$ раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий равна $p^k q^{n-k}$. Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по k элементов, т. е. C_n^k . Так как эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Поскольку же вероятности всех этих сложных событий одинаковы, то искомая вероятность (появления k раз события A в n испытаниях) равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Пример. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна $p = 0,75$. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода электроэнергии в продолжение каждого из 6 суток постоянна и равна $p = 0,75$. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна $q = 1 - p = 1 - 0,75 = 0,25$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = C_6^2 p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} (0,75)^4 \cdot (0,25)^2 = 0,30.$$

§ 2. Локальная теорема Лапласа

Локальная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

при $x = (k - np) / \sqrt{npq}$.

Имеются таблицы, в которых помещены значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, соответствующие положительным значениям аргумента x (см. приложение 1). Для отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как функция $\varphi(x)$ четна, т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Итак, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $x = (k - np) / \sqrt{npq}$.

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1492	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	989	973	957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013

Пример 1. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение. По условию, $n = 400$; $k = 80$; $p = 0,2$; $q = 0,8$. Воспользуемся асимптотической формулой Лапласа:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(x).$$

Вычислим определяемое данными задачи значение x :

$$x = (k - np) / \sqrt{npq} = (80 - 400 \cdot 0,2) / 8 = 0.$$

По таблице приложения 1 находим $\varphi(0) = 0,3989$.

Искомая вероятность

$$P_{400}(80) = (1/8) \cdot 0,3989 = 0,04986.$$

Формула Бернулли приводит примерно к такому же результату (выкладки ввиду их громоздкости опущены):

$$P_{400}(80) = 0,0498.$$

Пример 2. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле $p=0,75$. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах стрелок поразит мишень 8 раз.

Решение. По условию, $n=10$; $k=8$; $p=0,75$; $q=0,25$. Воспользуемся асимптотической формулой Лапласа:

$$P_{10}(8) \simeq \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \cdot \varphi(x) = 0,7301 \cdot \varphi(x).$$

Вычислим определяемое данными задачи значение x :

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{8 - 10 \cdot 0,75}{\sqrt{10 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \simeq 0,36.$$

По таблице приложения 1 находим $\varphi(0,36) = 0,3739$.

Искомая вероятность

$$P_{10}(8) = 0,7301 \cdot 0,3739 = 0,273.$$

Формула Бернулли приводит к иному результату, а именно $P_{10}(8) = 0,282$. Столь значительное расхождение ответов объясняется тем, что в настоящем примере n имеет малое значение (формула Лапласа дает достаточно хорошие приближения лишь при достаточно больших значениях n).

§ 3. Интегральная теорема Лапласа

§ 3. Интегральная теорема Лапласа

Вновь предположим, что производится n испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p ($0 < p < 1$). Как вычислить вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз (для краткости будем говорить «от k_1 до k_2 раз»)? На этот вопрос отвечает интегральная теорема Лапласа, которую мы приводим ниже, опустив доказательство.

§ 3. Интегральная теорема Лапласа

Вновь предположим, что производится n испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p ($0 < p < 1$). Как вычислить вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз (для краткости будем говорить «от k_1 до k_2 раз»)? На этот вопрос отвечает интегральная теорема Лапласа, которую мы приводим ниже, опустив доказательство.

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна определенному интегралу

$$P_n(k_1, k_2) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-z^2/2} dz, \quad (*)$$

где $x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$ и $x'' = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$.

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальными таблицами, так как неопределенный интеграл $\int e^{-z^2/2} dz$ не выражается через элементарные функции. Таблица для

интеграла $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ приведена в конце книги

(см. приложение 2). В таблице даны значения функции $\Phi(x)$ для положительных значений x и для $x=0$; для $x < 0$ пользуются той же таблицей [функция $\Phi(x)$ не-

четна, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$]. В таблице приведены значения интеграла лишь до $x=5$, так как для $x > 5$ можно принять $\Phi(x) = 0,5$. Функцию $\Phi(x)$ часто называют *функцией Лапласа*.

Для того чтобы можно было пользоваться таблицей функции Лапласа, преобразуем соотношение (*) так:

$$\begin{aligned}
 P_n(k_1, k_2) &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^0 e^{-z^2/2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x''} e^{-z^2/2} dz = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x''} e^{-z^2/2} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x'} e^{-z^2/2} dz = \Phi(x'') - \Phi(x').
 \end{aligned}$$

Итак, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз,

$$P_n(k_1, k_2) \simeq \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где $x' = (k_1 - np) / \sqrt{npq}$ и $x'' = (k_2 - np) / \sqrt{npq}$.

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	0,94	0,3264
0,23	0,0910	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	0,94	0,3264
0,23	0,0910	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,96	0,3315	1,37	0,4147	1,78	0,4625	2,36	0,4909
0,97	0,3340	1,38	0,4162	1,79	0,4633	2,38	0,4913
0,98	0,3365	1,39	0,4177	1,80	0,4641	2,40	0,4918
0,99	0,3389	1,40	0,4192	1,81	0,4649	2,42	0,4922
1,00	0,3413	1,41	0,4207	1,82	0,4656	2,44	0,4927
1,01	0,3438	1,42	0,4222	1,83	0,4664	2,46	0,4931
1,02	0,3461	1,43	0,4235	1,84	0,4671	2,48	0,4934
1,03	0,3485	1,44	0,4251	1,85	0,4678	2,50	0,4938
1,04	0,3508	1,45	0,4265	1,86	0,4686	2,52	0,4941
1,05	0,3531	1,46	0,4279	1,87	0,4693	2,54	0,4945
1,06	0,3554	1,47	0,4292	1,88	0,4699	2,56	0,4948
1,07	0,3577	1,48	0,4305	1,89	0,4706	2,58	0,4951
1,08	0,3599	1,49	0,4319	1,90	0,4713	2,60	0,4953
1,09	0,3621	1,50	0,4332	1,91	0,4719	2,62	0,4956
1,10	0,3643	1,51	0,4345	1,92	0,4726	2,64	0,4959
1,11	0,3665	1,52	0,4357	1,93	0,4732	2,66	0,4961
1,12	0,3686	1,53	0,4370	1,94	0,4738	2,68	0,4963
1,13	0,3708	1,54	0,4382	1,95	0,4744	2,70	0,4965
1,14	0,3729	1,55	0,4394	1,96	0,4750	2,72	0,4967
1,15	0,3749	1,56	0,4406	1,97	0,4756	2,74	0,4969
1,16	0,3770	1,57	0,4418	1,98	0,4761	2,76	0,4971
1,17	0,3790	1,58	0,4429	1,99	0,4767	2,78	0,4973
1,18	0,3810	1,59	0,4441	2,00	0,4772	2,80	0,4974
1,19	0,3830	1,60	0,4452	2,02	0,4783	2,82	0,4976
1,20	0,3849	1,61	0,4463	2,04	0,4793	2,84	0,4977
1,21	0,3869	1,62	0,4474	2,05	0,4803	2,86	0,4979
1,22	0,3888	1,63	0,4484	2,08	0,4812	2,88	0,4980
1,23	0,3907	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,24	0,3925	1,65	0,4505	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,25	0,3944	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,26	0,3962	1,67	0,4525	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,27	0,3980	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,98	0,4986
1,28	0,3997	1,69	0,4545	2,20	0,4861	3,00	0,49865
1,29	0,4015	1,70	0,4554	2,22	0,4868	3,20	0,49931
1,30	0,4032	1,71	0,4564	2,24	0,4875	3,40	0,49966
1,31	0,4049	1,72	0,4573	2,26	0,4881	3,60	0,499841
1,32	0,4066	1,73	0,4582	2,28	0,4887	3,80	0,499928
1,33	0,4082	1,74	0,4591	2,30	0,4893	4,00	0,499968
1,34	0,4099	1,75	0,4599	2,32	0,4898	4,50	0,499997
1,35	0,4115	1,76	0,4608	2,34	0,4904	5,00	0,499997
1,36	0,4131	1,77	0,4616				

Пример. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК равна $p=0,2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение. По условию, $p=0,2$; $q=0,8$; $n=400$; $k_1=70$; $k_2=100$. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_{400}(70, 100) \approx \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5.$$

Таким образом, имеем

$$P_{400}(70, 100) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25).$$

По таблице приложения 2 находим:

$$\Phi(2,5) = 0,4938; \quad \Phi(1,25) = 0,3944.$$

Искомая вероятность

$$P_{400}(70, 100) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

§ 4. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

§ 4. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

Вновь будем считать, что производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p ($0 < p < 1$). Поставим перед собой задачу найти вероятность того, что отклонение относительной частоты m/n от постоянной вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа $\varepsilon > 0$. Другими словами, найдем вероятность осуществления неравенства

$$|m/n - p| \leq \varepsilon. \quad (*)$$

Эту вероятность будем обозначать так: $P(|m/n - p| \leq \varepsilon)$.

Заменяем неравенство (*) ему равносильными:

$$-\varepsilon \leq m/n - p \leq \varepsilon \quad \text{или} \quad -\varepsilon \leq (m - np)/n \leq \varepsilon.$$

Умножая эти неравенства на положительный множитель $\sqrt{n/(pq)}$, получим неравенства, равносильные исходному:

$$-\varepsilon \sqrt{n/(pq)} \leq (m - np)/\sqrt{npq} \leq \varepsilon \sqrt{n/(pq)}.$$

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа в форме, указанной в замечании (см. § 3). Положив $x' = -\varepsilon \sqrt{n/(pq)}$ и $x'' = \varepsilon \sqrt{n/(pq)}$, имеем

$$\begin{aligned} P(-\varepsilon \sqrt{n/(pq)} \leq (m - np)/\sqrt{npq} \leq \varepsilon \sqrt{n/(pq)}) &\approx \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon \sqrt{n/(pq)}}^{\varepsilon \sqrt{n/(pq)}} e^{-z^2/2} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon \sqrt{n/(pq)}} e^{-z^2/2} dz = \\ &= 2\Phi(\varepsilon \sqrt{n/(pq)}). \end{aligned}$$

Наконец, заменив неравенства, заключенные в скобках, равносильным им исходным неравенством, окончательно получим

$$P(|m/n - p| \leq \varepsilon) \approx 2\Phi(\varepsilon \sqrt{n/(pq)}).$$

Итак, вероятность осуществления неравенства $|m/n - p| \leq \epsilon$ приближенно равна значению удвоенной функции Лапласа $2\Phi(x)$ при $x = \epsilon\sqrt{n/(pq)}$.

Пример 1. Вероятность того, что деталь не стандартна, $p=0,1$. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности $p=0,1$ по абсолютной величине не более чем на 0,03.

Решение. По условию, $n=400$; $p=0,1$; $q=0,9$; $\varepsilon=0,03$. Требуется найти вероятность $P(|m/400 - 0,1| \leq 0,03)$. Пользуясь формулой $P(|m/n - p| \leq \varepsilon) \approx 2\Phi(\varepsilon \sqrt{n/(pq)})$, имеем

$$P(|m/400 - 0,1| \leq 0,03) \approx 2\Phi(0,03 \sqrt{400/(0,1 \cdot 0,9)}) = 2\Phi(2).$$

По таблице приложения 2 находим $\Phi(2) = 0,4772$. Следовательно, $2\Phi(2) = 0,9544$.

Итак, искомая вероятность приближенно равна 0,9544.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей в каждой, то примерно в 95,44% этих проб отклонение относительной частоты от постоянной вероятности $p=0,1$ по абсолютной величине не превысит 0,03.

Пример 2. Вероятность того, что деталь не стандартна, $p=0,1$. Найти, сколько деталей надо отобрать, чтобы с вероятностью, равной $0,9544$, можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей (среди отобранных) отклонится от постоянной вероятности p по абсолютной величине не более чем на $0,03$.

Решение. По условию, $p=0,1$; $q=0,9$; $e=0,03$; $P(|m/n - 0,1| < 0,03) = 0,9544$. Требуется найти n .

Воспользуемся формулой

$$P(|m/n - p| < e) \approx 2\Phi(e \sqrt{n/(pq)}).$$

В силу условия

$$2\Phi(0,03 \sqrt{n/(0,1 \cdot 0,9)}) = 2\Phi(0,1 \sqrt{n}) = 0,9544.$$

Следовательно, $\Phi(0,1 \sqrt{n}) = 0,4772$.

По таблице приложения 2 находим $\Phi(2) = 0,4772$.

Для отыскания числа n получаем уравнение $0,1 \sqrt{n} = 2$. Отсюда искомое число деталей $n = 400$.

