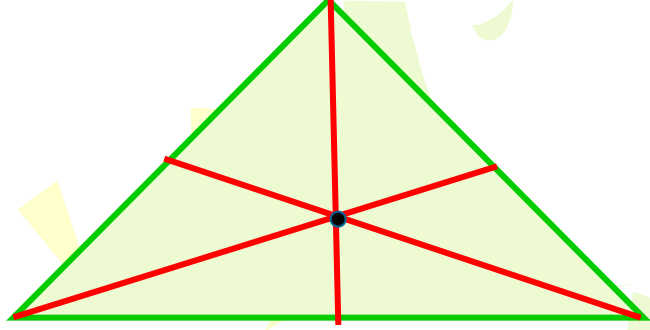
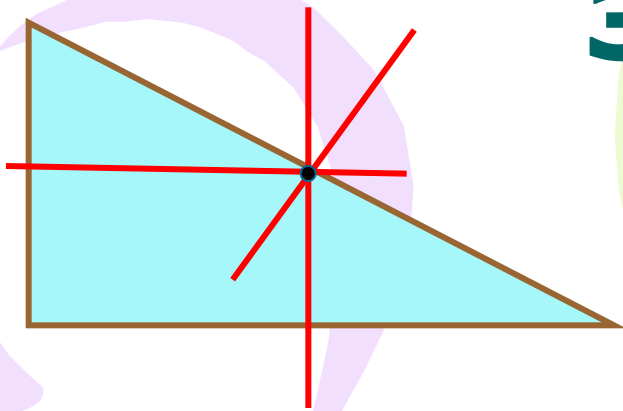


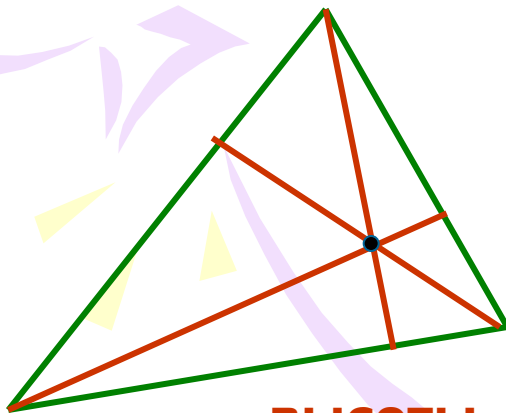
# Четыре замечательные точки треугольника



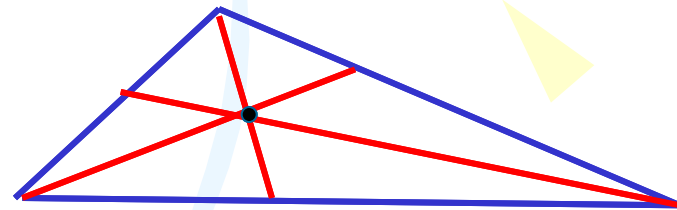
медианы



серединные перпендикуляры



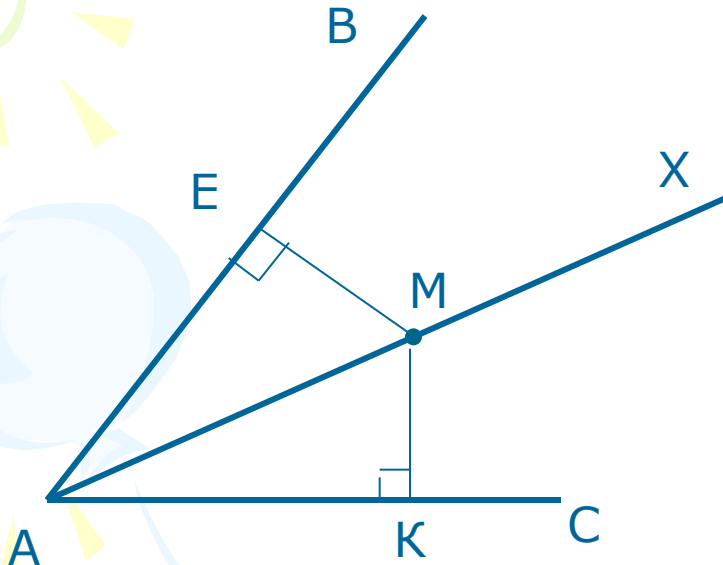
ВЫСОТЫ



биссектрисы

# Свойство биссектрисы неразвёрнутого угла

Теорема 1. **Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла  
равноудалена от его сторон.**



Дано:  $\angle BAC$ , AX – биссектриса,

$M \in AX$ ,  $ME \perp AB$ ,  $MK \perp AC$

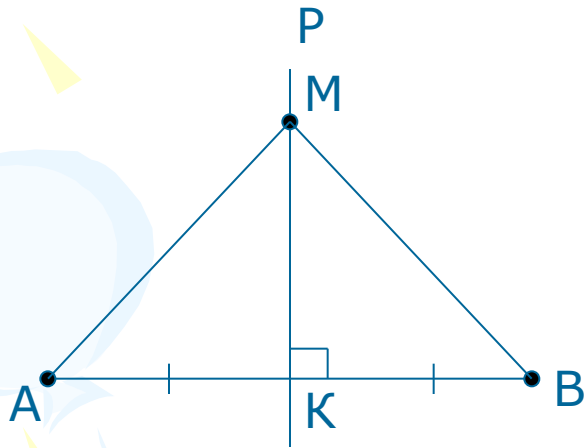
Доказать:  $ME = MK$

Теорема 2 (обратная). **Точка, лежащая внутри неразвёрнутого угла и  
равноудалённая от его сторон, лежит на биссектрисе этого угла.**

**Обобщённая теорема:** биссектриса неразвёрнутого угла –  
множество точек плоскости,  
равноудалённых от сторон этого угла.

# Серединный перпендикуляр к отрезку

Теорема 1. **Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от его концов.**



Дано:  $AB$  – отрезок,  
 $PK$  – серединный перпендикуляр,  
 $M \in PK$

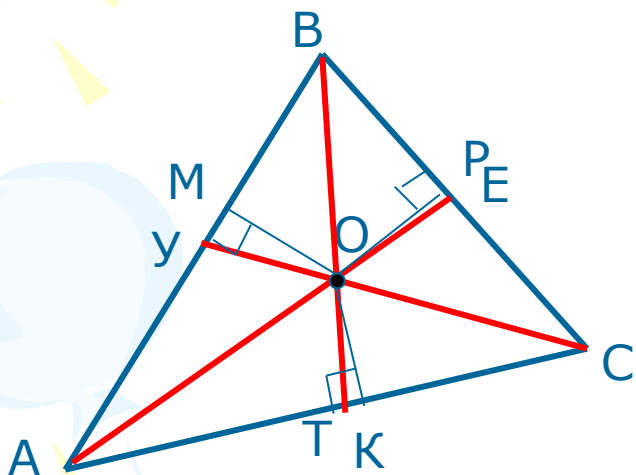
Доказать:  $MA = MB$

Теорема 2. **Точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.**

**Обобщённая теорема:** серединный перпендикуляр к отрезку – множество точек плоскости, равноудалённых от его концов.

# Первая замечательная точка треугольника

Теорема. **Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.**



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AE$ ,  $BT$  – биссектрисы,  
 $O$  – точка их пересечения

Доказать:  $CY$  – биссектриса  $\triangle ABC$ ,  $O \in CY$

Доказательство:

$AE$  – биссектриса и  $OM \perp AB$ ,  $OK \perp AC$ ,  
значит,  $OM = OK$

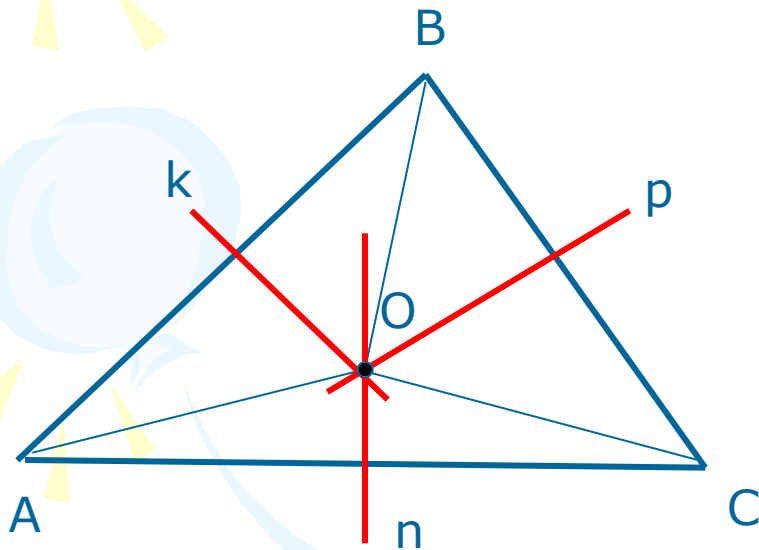
$BT$  – биссектриса, и  $OM \perp AB$ ,  $OP \perp BC$ , значит,  $OM = OP$

Значит,  $OM = OK = OP$  и  $OP \perp BC$ ,  $OK \perp AC$ , следовательно,  
 $O$  лежит на биссектрисе угла  $ACB$ , т. е.  $CY$  – биссектриса  $\triangle ABC$ .

Значит,  $O$  – точка пересечения трёх биссектрис треугольника.

# Вторая замечательная точка треугольника

Теорема. **Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.**



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $k, n$  – серединные перпендикуляры к сторонам треугольника,  
 $O$  – точка их пересечения

Доказать:  $p$  – серединный перпендикуляр к  $BC$ ,  $O \in p$

Доказательство:

$n$  – серединный перпендикуляр к  $AC$  и  $O \in n$ , значит,  $OA = OC$ .

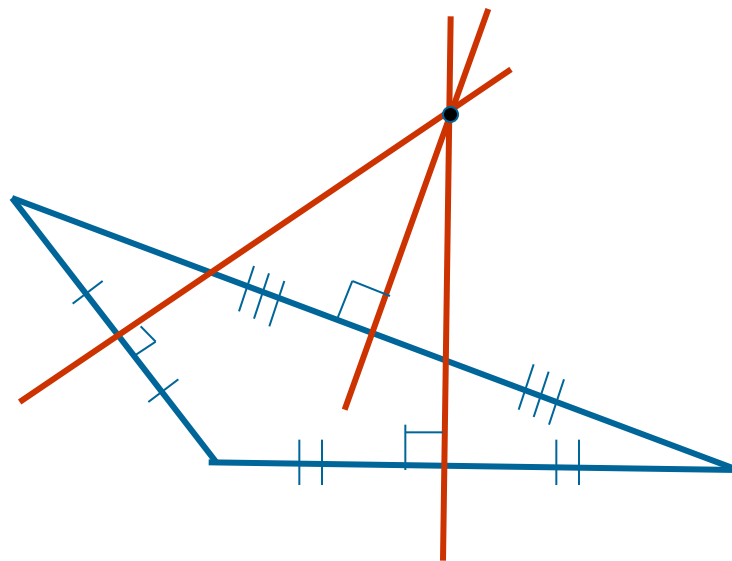
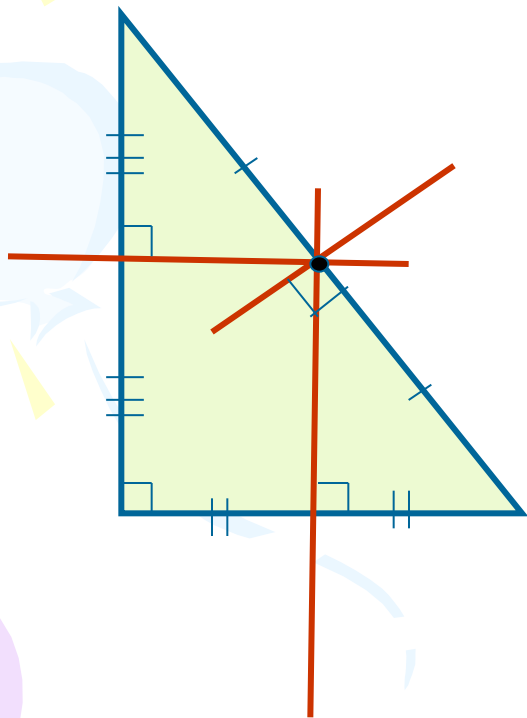
$k$  – серединный перпендикуляр к  $AB$  и  $O \in k$ , значит,  $OA = OB$ .

Следовательно,  $OA = OB = OC$ , значит,  $O$  лежит на серединном перпендикуляре к стороне  $BC$ , т. е. на  $p$ .

Значит,  $O$  – точка пересечения серединных перпендикуляров  $k, n, p$ .

# Вторая замечательная точка треугольника (продолжение)

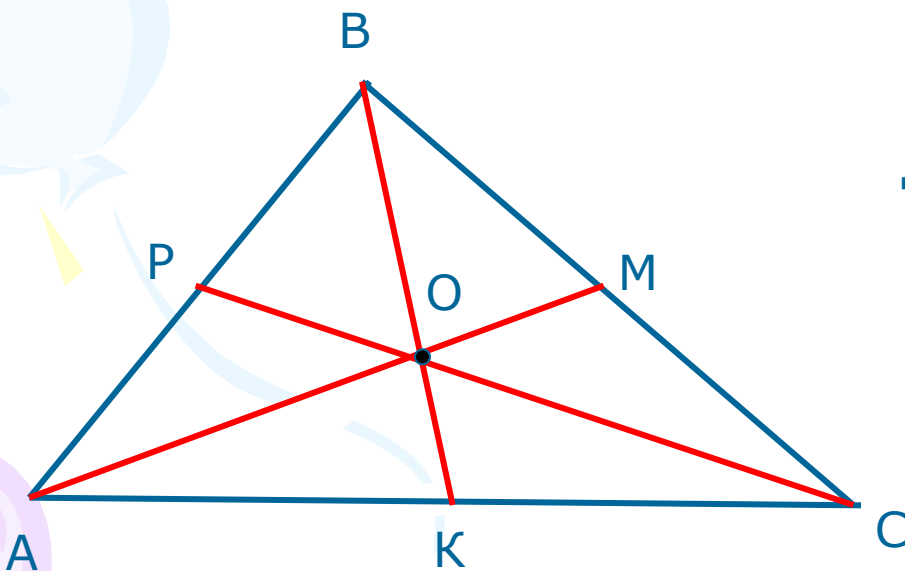
**Ещё возможное расположение:**



# Третья замечательная точка треугольника

Теорема. **Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую в отношении 2: 1, считая от вершины.**

**(центр тяжести треугольника – центроид)**



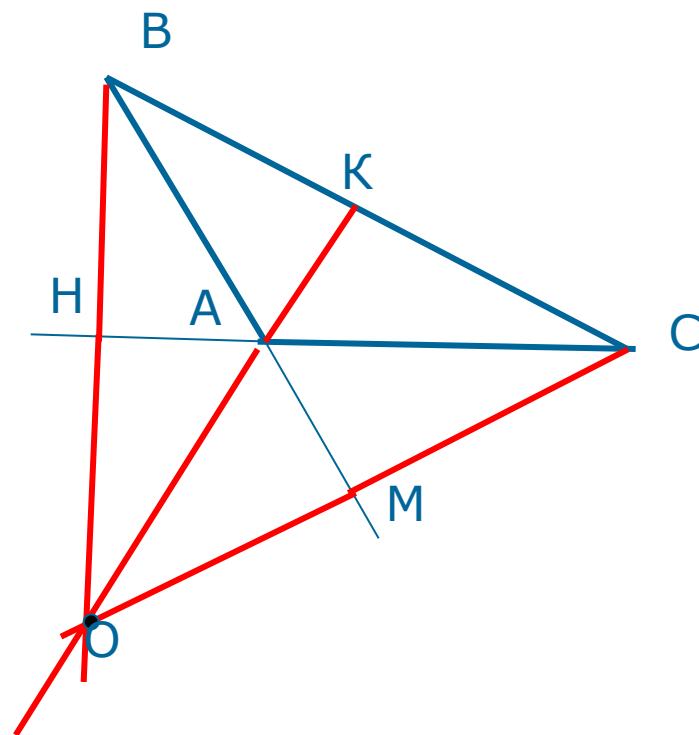
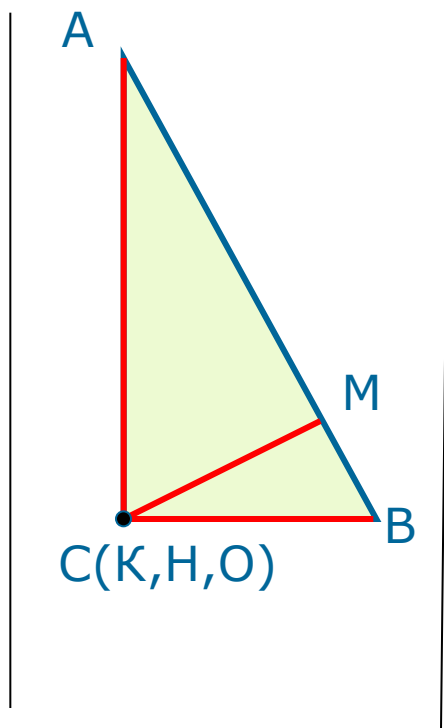
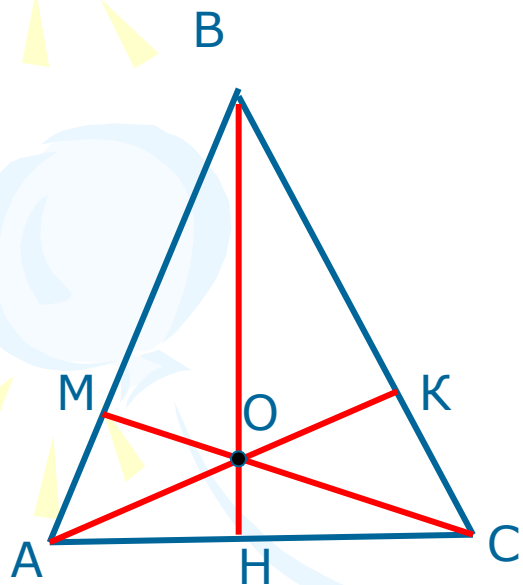
Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AM, BK, CP$  - медианы

Доказать:  $AM \cap BK \cap CP = O$

Доказательство проведено ранее:  
задача 1 п. 62.

# Четвёртая замечательная точка треугольника

Теорема. **Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке (ортоцентр).**



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AK$ ,  $BH$ ,  $CM$  - высоты

Доказать:  $O$  – точка пересечения высот или их продолжений.



## Доказательство:

Через вершины  $B$ ,  $A$ ,  $C$  треугольника  $ABC$  проведём  $ET \parallel AC$ ,  $EY \parallel BC$ ,  $TU \parallel AB$ .

Получим:

$ACBE$  – параллелограмм, значит,  $AC = BE$

$ACTB$  – параллелограмм, значит,  $AC = BT$

Следовательно,  $BE = BT$ , т. е.  $B$  – середина  $ET$ .

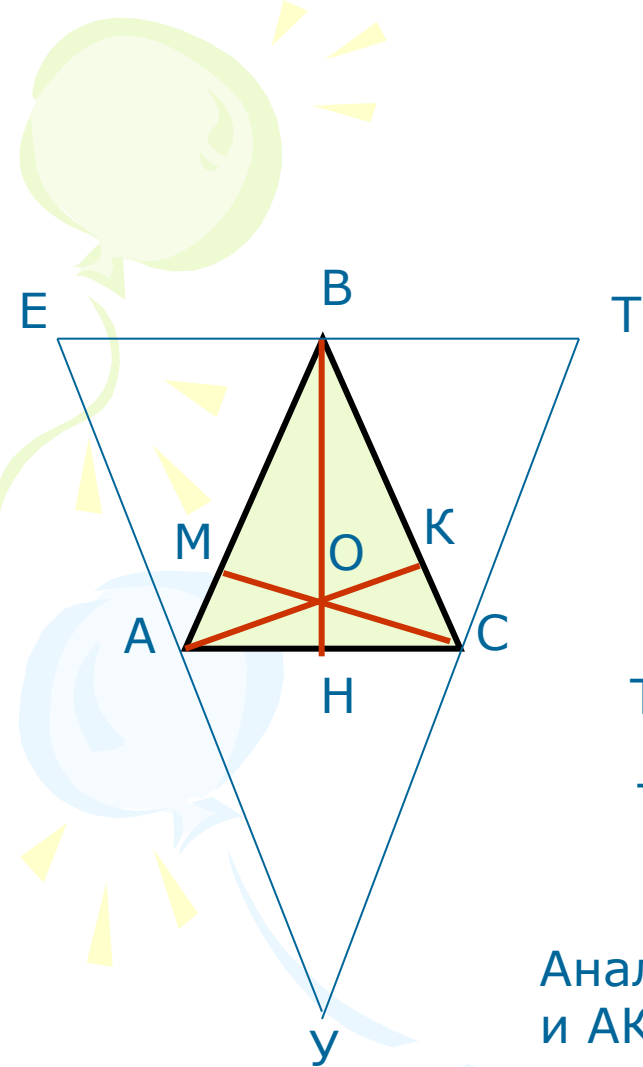
Т.к.  $BH$  – высота  $\triangle ABC$  по условию, то  $BH \perp AC$

Т. к.  $ET \parallel AC$  по построению, значит,  $BH \perp ET$

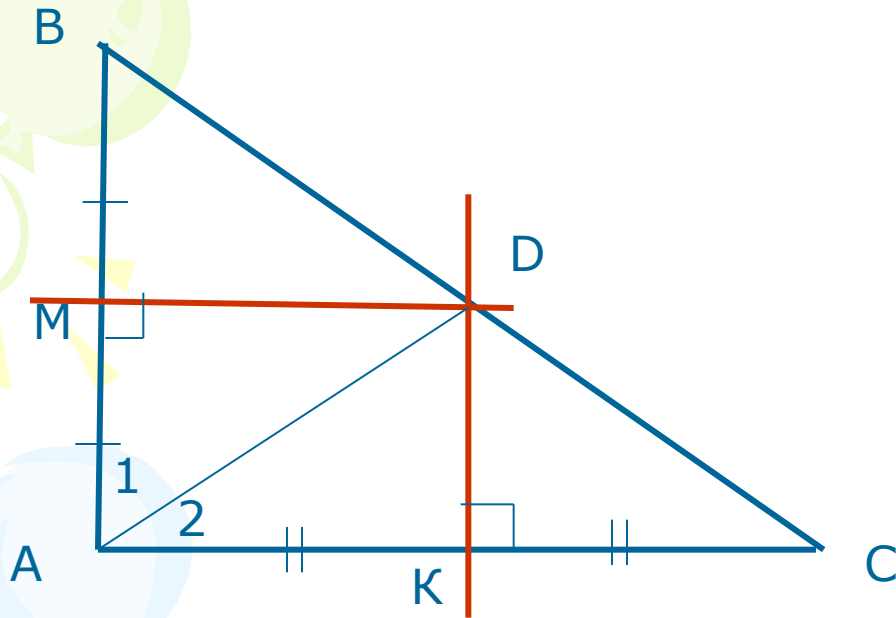
Получим:  $BH$  – серединный перпендикуляр к  $ET$ .

Аналогично,  $CM$  – серединный перпендикуляр к  $TU$  и  $AK$  – серединный перпендикуляр к  $YE$ .

Т. е.  $BH$ ,  $CM$ ,  $AK$  – серединные перпендикуляры к сторонам  $\triangle EYU$ , которые по ранее доказанному пересекаются в одной точке, значит, высоты  $\triangle ABC$  пересекаются в одной точке.



Задача № 680.



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AM = BM$ ,  $MD \perp AB$ ,  
 $AK = KC$ ,  $DK \perp AC$ ,  $D \in BC$ .

Доказать:  $D$  - середина  $BC$ ,  
 $\angle A = \angle B + \angle C$ .

Доказательство:

а)

$AM = BM$ ,  $MD \perp AB$ ,  $D \in BC$  по условию, значит,  $BD = AD$   
 $AK = KC$ ,  $DK \perp AC$ ,  $D \in BC$  по условию, значит,  $AD = DC$  }  $BD = DC$ ,  
следовательно,  $D$  - середина  $BC$ .

б) По доказанному  $BD = AD$  и  $AD = DC$ , значит, треугольники  $ABD$

и  $ACD$  - равнобедренные, поэтому  $\angle 1 = \angle B$ ,  $\angle 2 = \angle C$ .

$\angle BAC = \angle 1 + \angle 2 = \angle B + \angle C$ , что и т. д.