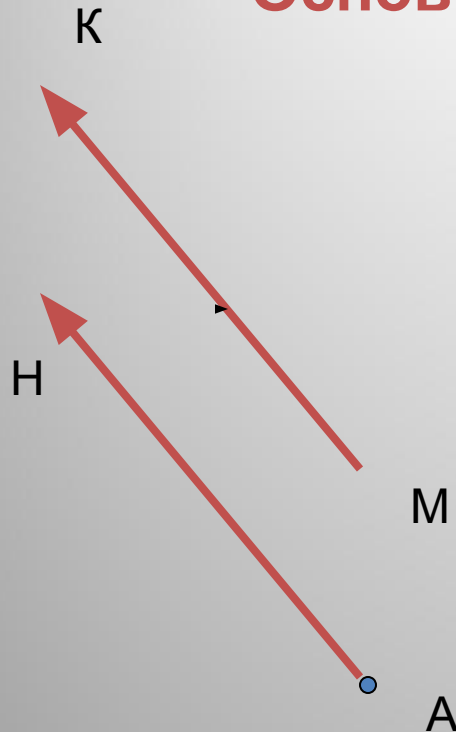


Векторы в пространстве

Основные определения и понятия



Определение: вектором называется **направленный** отрезок – отрезок, начало и конец которого упорядочены

М – *начало* вектора К – *конец* вектора

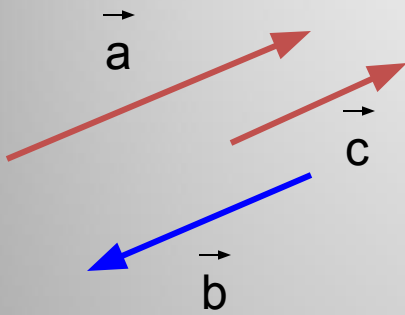
Обозначение вектора: \overrightarrow{MK}

Длина (*модуль*) вектора $|\overrightarrow{MK}|$ – длина отрезка МК

Отложить от заданной точки данный *вектор*, значит построить вектор, равный данному с началом в заданной точке.

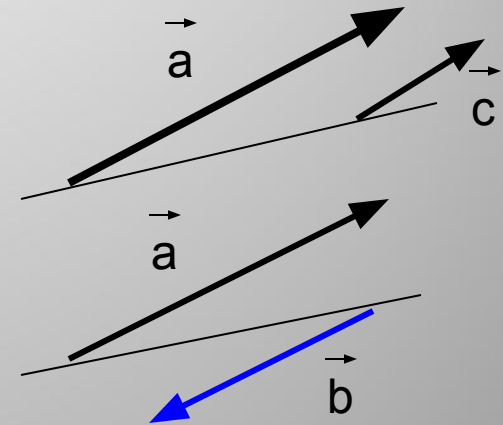
От точки А отложим вектор $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{MK}$

Основные определения и понятия

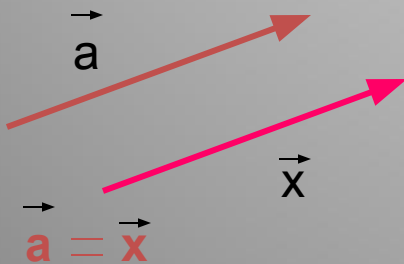


Определение: векторы называют **коллинеарными**, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых и обозначают $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Определение: коллинеарные векторы **сонаправлены** ($\vec{a} \parallel \vec{c}$), если лежат по одну сторону от прямой, проходящей через их начала



Определение: коллинеарные векторы называют **противонаправленными** ($\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$), если они лежат по разные стороны от прямой, проходящей через их начала



Определение: векторы называют **равными**, если они сонаправлены и равны по длине (по модулю)

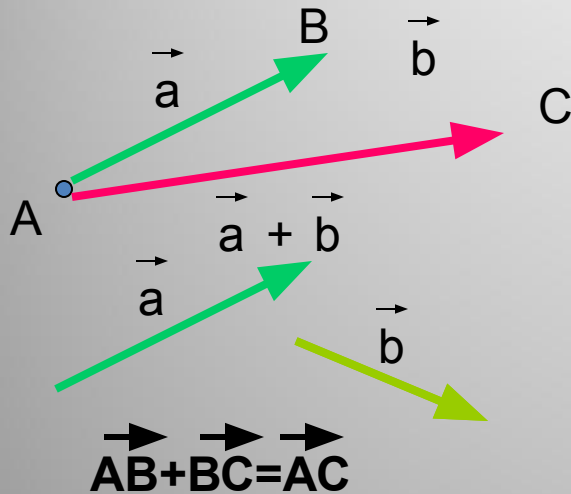
Определение: вектор, модуль которого равен нулю, называют **нулевым** вектором.



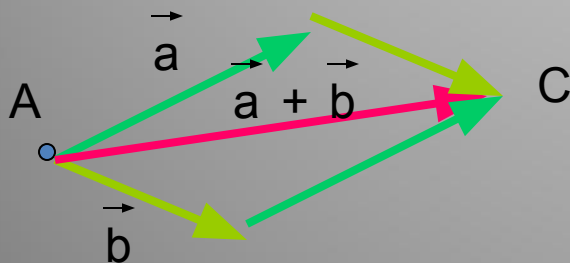
Действия над векторами

Сложение векторов

Правило треугольника

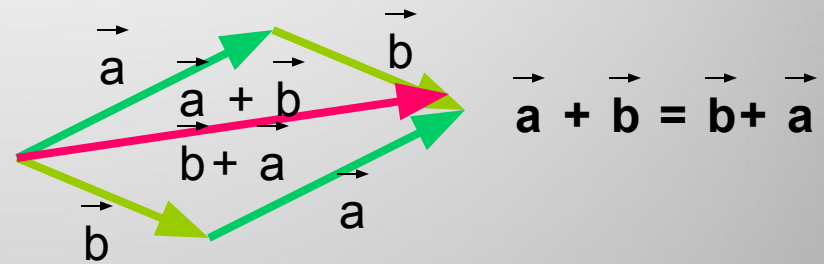


Правило параллелограмма

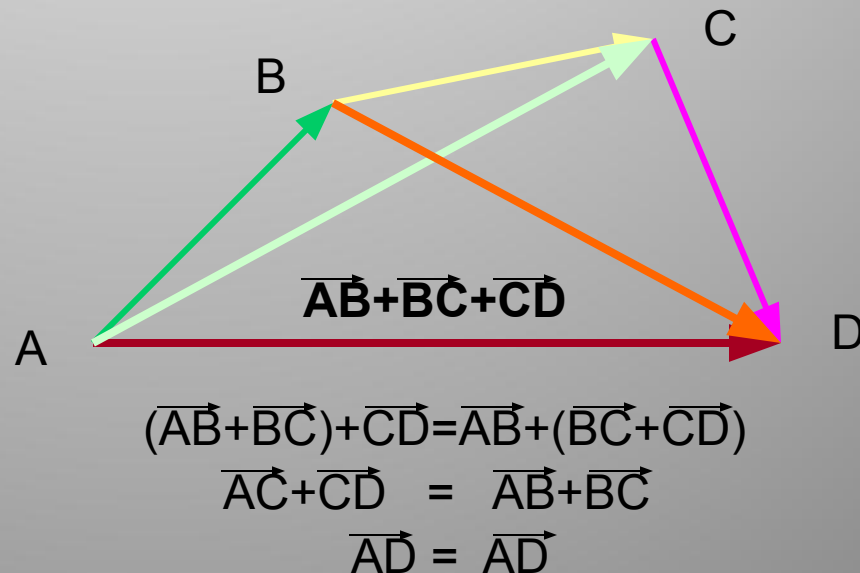


Свойства сложения:

коммутативность (переместительность)



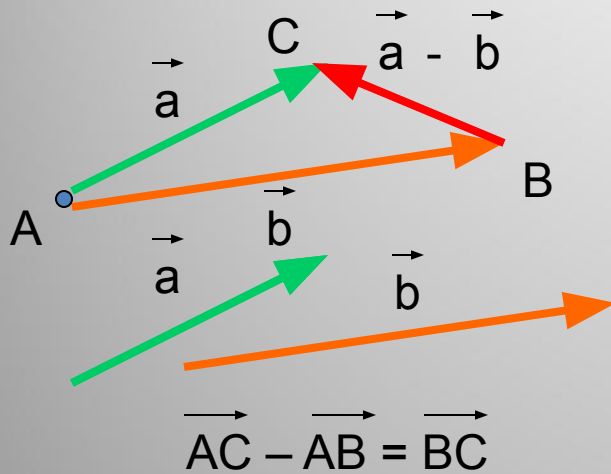
ассоциативность (сочетательность)



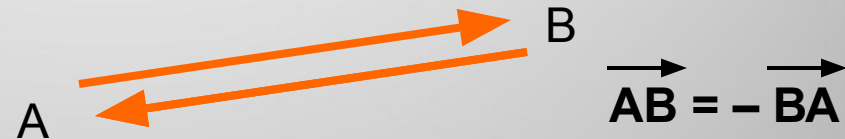
Действия над векторами

Вычитание векторов

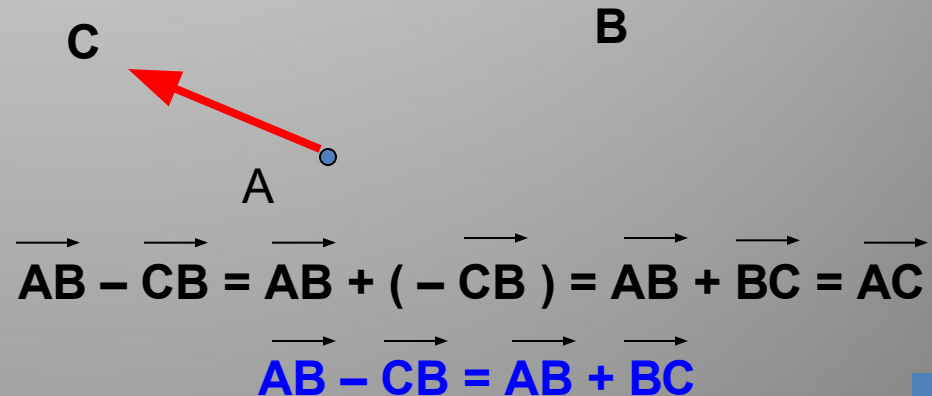
Правило треугольника



Определение: два вектора называются **противоположными** если их сумма равна нуль-вектору и обозначаются \vec{a} и $-\vec{a}$



Вычитание вектора с помощью противоположного

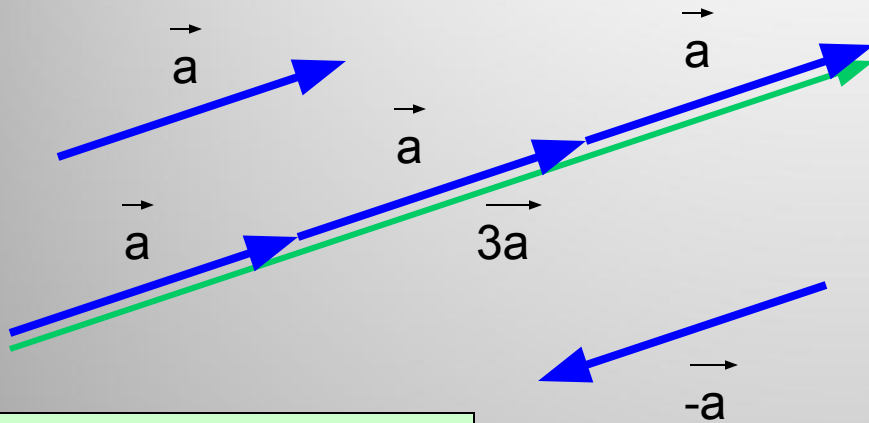


$$\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$$
$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$
$$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$$
$$\vec{AB} = -\vec{BA}$$
$$\vec{AB} - \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{BC}$$



Действия над векторами

Умножение вектора на число



Определение:

$$|k \vec{a}| = |k| |\vec{a}|$$

$$k \vec{a} = \vec{a}, \text{ если } k > 0$$

$$k \vec{a} = -|\vec{a}|, \text{ если } k < 0$$

$$0 \vec{a} = \vec{0}$$

$$-1 \vec{a} = -\vec{a}$$

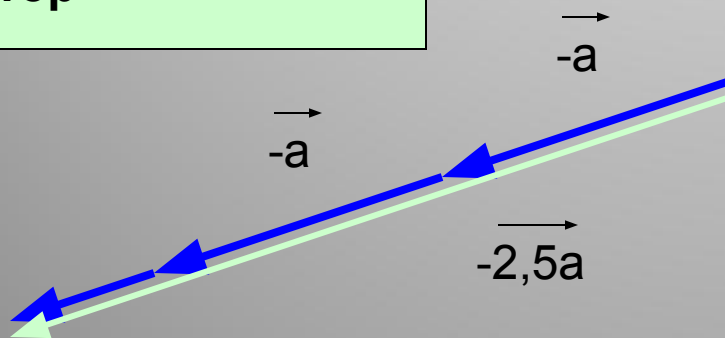
противоположный
вектор

Свойства:

$$(km)\vec{a} = k(m\vec{a}) \text{ сочетательность}$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \text{ распределительность}$$

$$(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a} \text{ распределительность}$$



Теорема (необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов): $\vec{a} \parallel \vec{b}$, если существует число k , такое что $\vec{b} = k\vec{a}$

Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Рассмотрим вектор $\vec{p} = \vec{OP}$

и базисные векторы
 $\vec{a} = \vec{OA}$ и $\vec{b} = \vec{OB}$

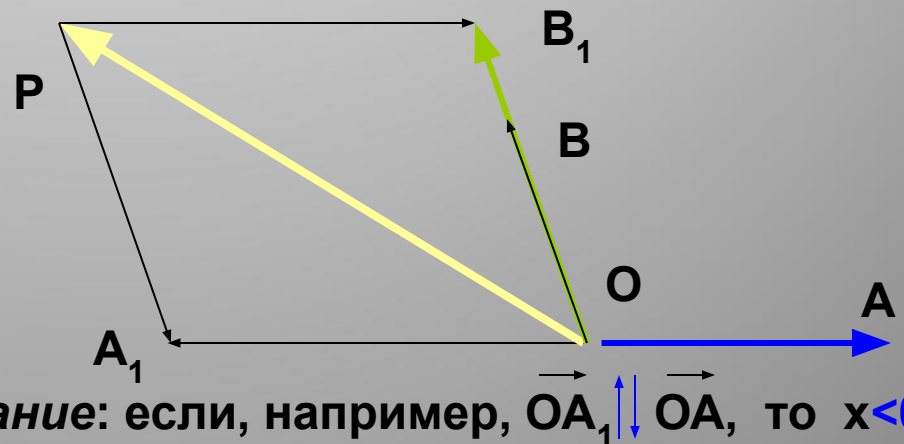
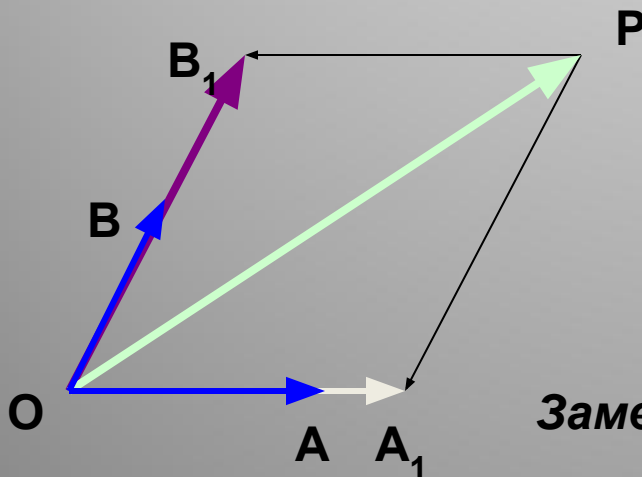
Разложить вектор \vec{p} по векторам \vec{a} и \vec{b} , значит **найти** такие числа x и y , чтобы выполнялось равенство $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$

1) Через конец вектора P проведем прямые, параллельные базисным векторам \vec{OA} и \vec{OB}

Получили точки A_1 и B_1
2) Имеем $\vec{OA}_1 \parallel \vec{OA}$ и $\vec{OB}_1 \parallel \vec{OB}$

значит найдутся числа x и y :

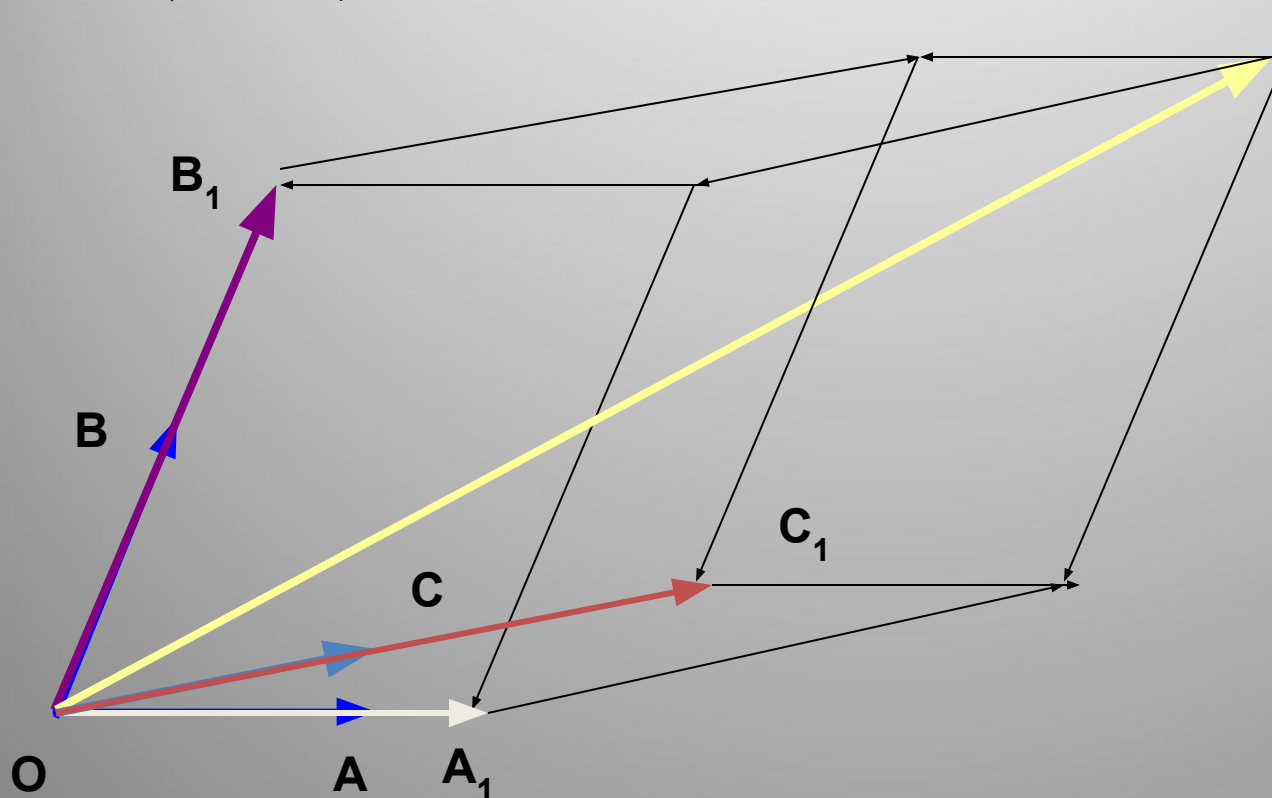
$$\vec{OA}_1 = x \vec{OA}, \quad \vec{OB}_1 = y \vec{OB}$$



Разложение вектора по трем некопланарным векторам

Рассмотрим вектор $\vec{r} = \vec{OP}$
и базисные векторы
 $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$

1) Через конец вектора \vec{r} проведем
прямые, параллельные базисным
векторам \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC}



Получили
параллелепипед

2) Имеем $\vec{OA}_1 \parallel \vec{OA}$
 $\vec{OB}_1 \parallel \vec{OB}$, $\vec{OC}_1 \parallel \vec{OC}$

значит найдутся
числа x , y , z :

$$\vec{OA}_1 = x \vec{OA},$$

$$\vec{OB}_1 = y \vec{OB},$$

$$\vec{OC}_1 = z \vec{OC}$$



Действия над векторами

Скалярное умножение векторов

Определение: **скалярным произведением векторов** \vec{a} и \vec{b} называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$$

Скалярное произведение векторов это число.

Необходимое и достаточное условие равенства скалярного произведения нулю

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{b} \neq \vec{0} \\ \vec{a} \perp \vec{b} \end{cases}$$

взаимная перпендикулярность ненулевых векторов

Свойства скалярного произведения:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

переместительность

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

сочетательность

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

распределительность

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

скалярный квадрат