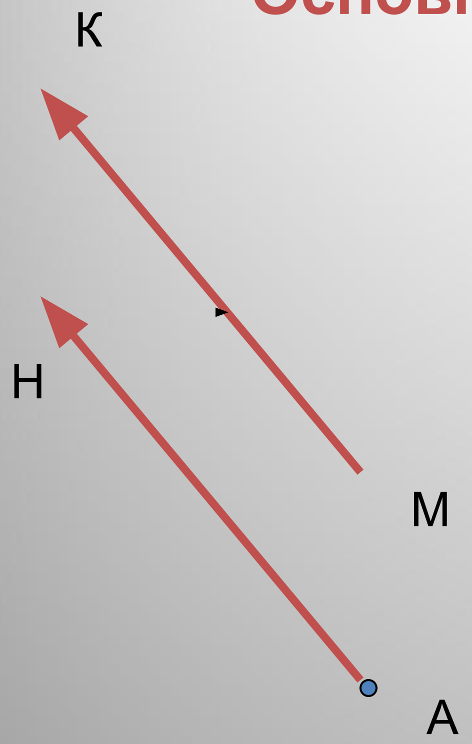
Векторы

в пространстве

Основные определения и понятия



Определение: вектором называется **направленный** отрезок – отрезок, начало и конец которого упорядочены

М – *начало* вектора К – *конец* вектора

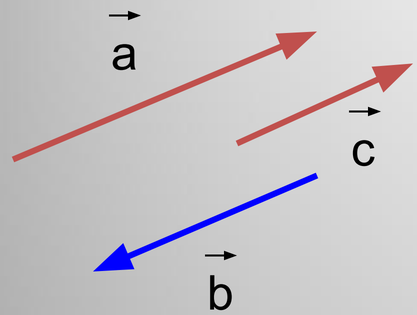
Обозначение вектора: $\overrightarrow{MK}$

Длина (*модуль*) вектора $|\overrightarrow{MK}|$ - длина отрезка МК

Отложить от заданной точки данный *вектор*, значит построить вектор, равный данному с началом в заданной точке.

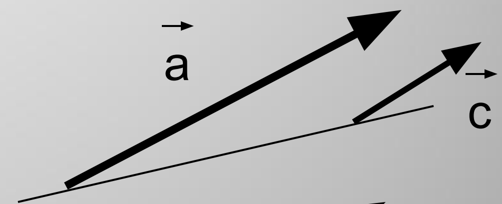
От точки А отложим вектор $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{MK}$

Основные определения и понятия

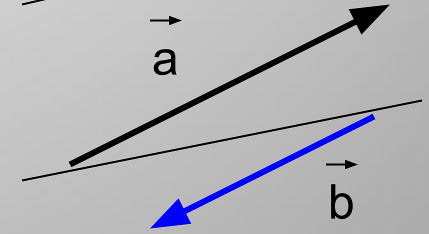


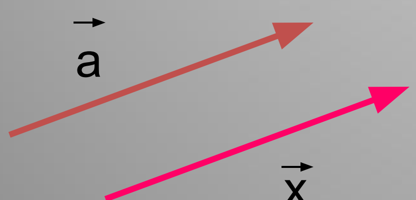
Определение: векторы называют ***коллинеарными***, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых и обозначают $\vec a \,||\, \vec b$

Определение: коллинеарные векторы **сонаправлены** ($\vec a$ $\vec c$), если лежат по одну сторону от прямой, проходящей через их начала



Определение: коллинеарные векторы называют **противонаправленными** ($\vec a \uparrow\downarrow \vec b$), если они лежат по разные стороны от прямой, проходящей через их начала





$\vec a = \vec x$

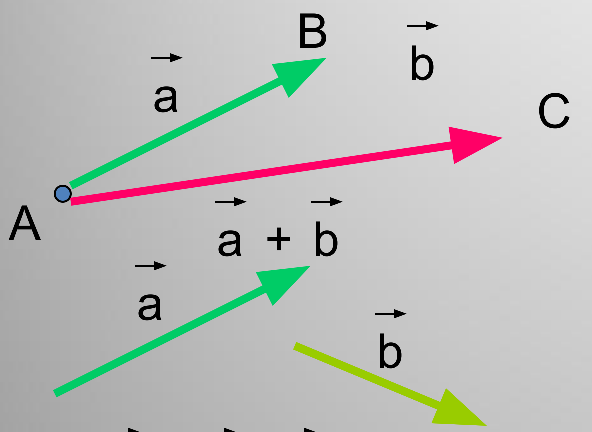
Определение: векторы называют **равными**, если они сонаправлены и равны по длине (по модулю)

Определение: вектор, модуль которого равен нулю, называют **нулевым** вектором.

Действия над векторами

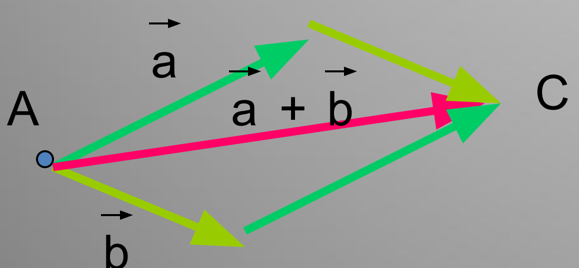
Сложение векторов

Правило треугольника



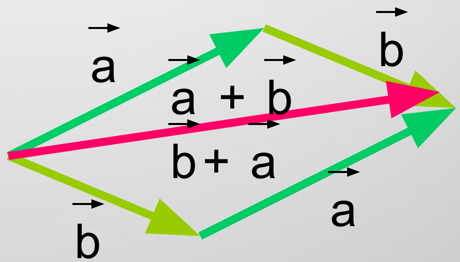
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Правило параллелограмма



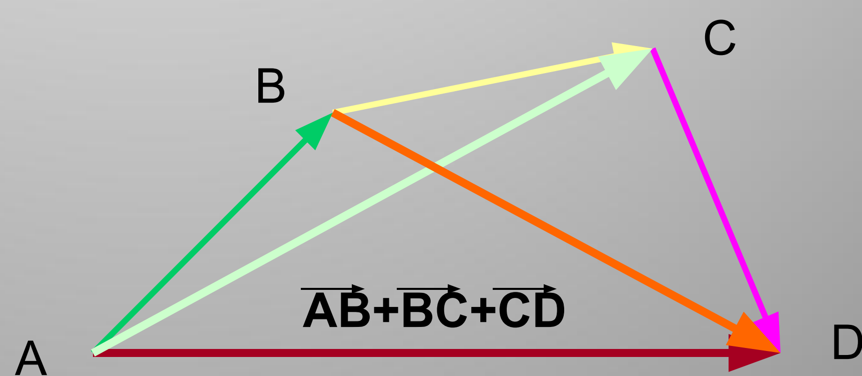
Свойства сложения:

коммутативность (переместительность)



$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

ассоциативность (сочетательность)



$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$

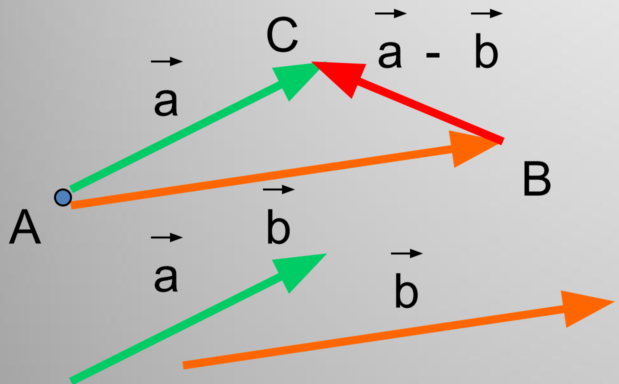
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$

Действия над векторами

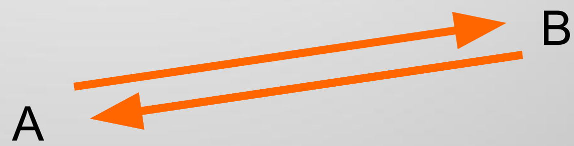
Вычитание векторов

Правило треугольника



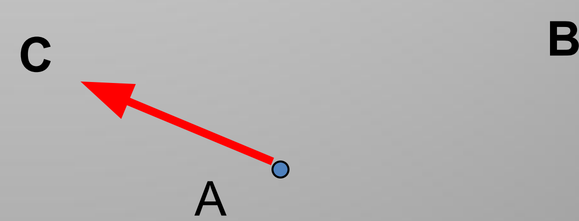
$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

Определение: два вектора называются ***противоположными*** если их сумма равна нуль-вектору и обозначаются $\vec{a}$ и $-\vec{a}$



$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Вычитание вектора с помощью противоположного



$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

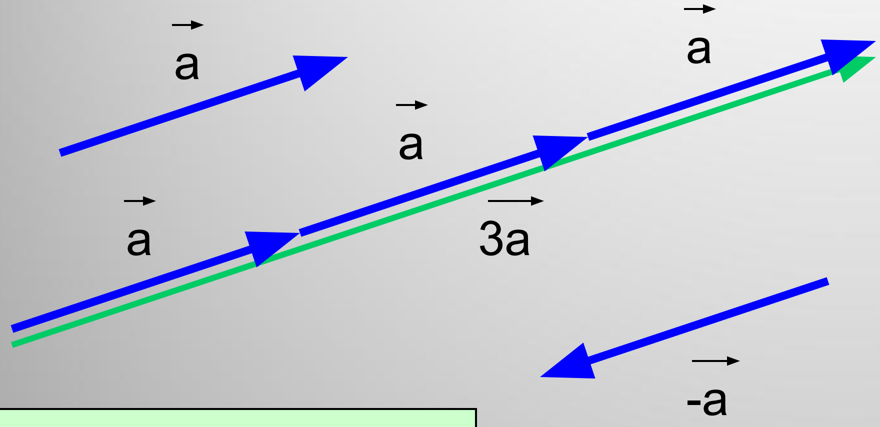
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Действия над векторами

Умножение вектора на число



Определение:

$$|k\vec{a}| = |k|\,|\vec{a}|$$

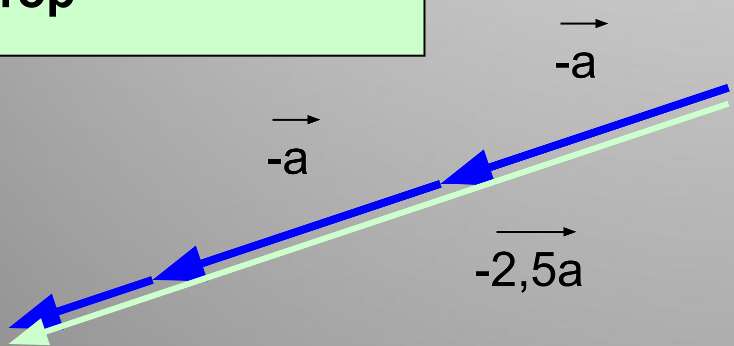
$k\vec{a}\ \ \vec{a}$, если $k>0$

$k\vec{a} \downarrow \vec{a}$, если $k<0$

$$0\vec{a} = \vec{0}$$

$-1\vec{a} = -\vec{a}$

противоположный вектор



Свойства:

$(km)\vec{a}=k(m\vec{a})$ сочетательность

$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ распределительность

$(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$ распределительность

Теорема (*необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов*): $\vec{a} \parallel \vec{b}$, если существует число k, такое что $\vec{b} = k\vec{a}$

Разложение вектора

по двум неколлинеарным векторам

Рассмотрим вектор $\vec{p}=\vec{OP}$

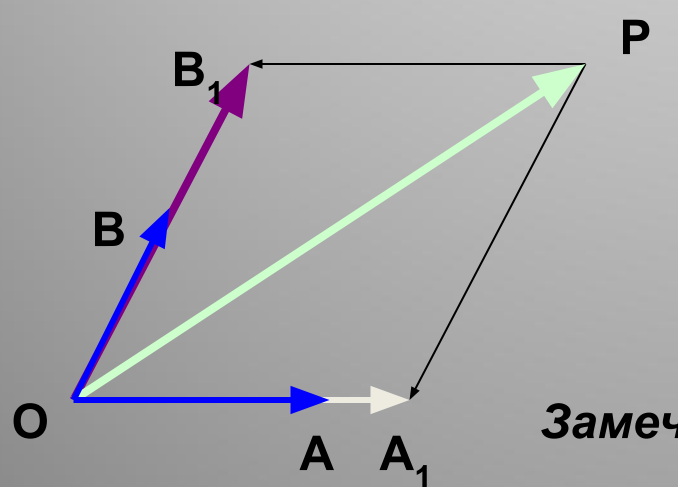
и базисные векторы
$\vec{a}=\vec{OA}$ и $\vec{b}=\vec{OB}$

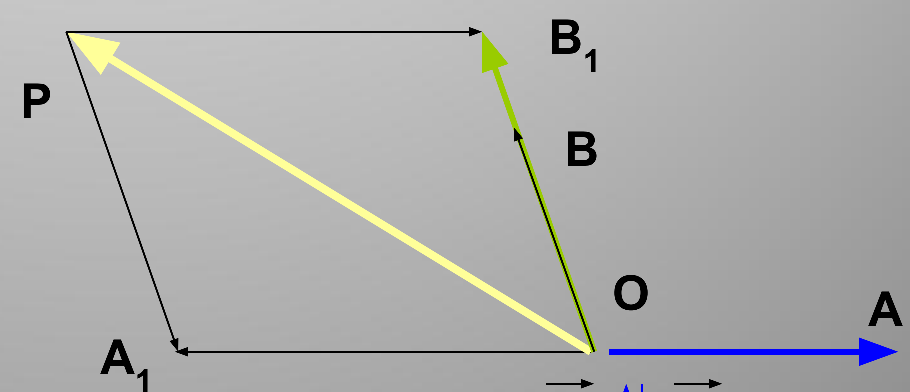
Разложить** вектор* $\vec{p}$ *по векторам* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, значит ***найти такие *числа* x *и* y, чтобы выполнялось равенство $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$

1)Через конец вектора P проведем прямые, параллельные базисным векторам $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$
Получили точки A_1 и B_1
2) Имеем $\vec{OA_1} \parallel \vec{OA}$ и $\vec{OB_1} \parallel \vec{OB}$

значит найдутся числа x и y:

$\vec{OA_1} = x\,\vec{OA}$, $\vec{OB_1} = y\,\vec{OB}$





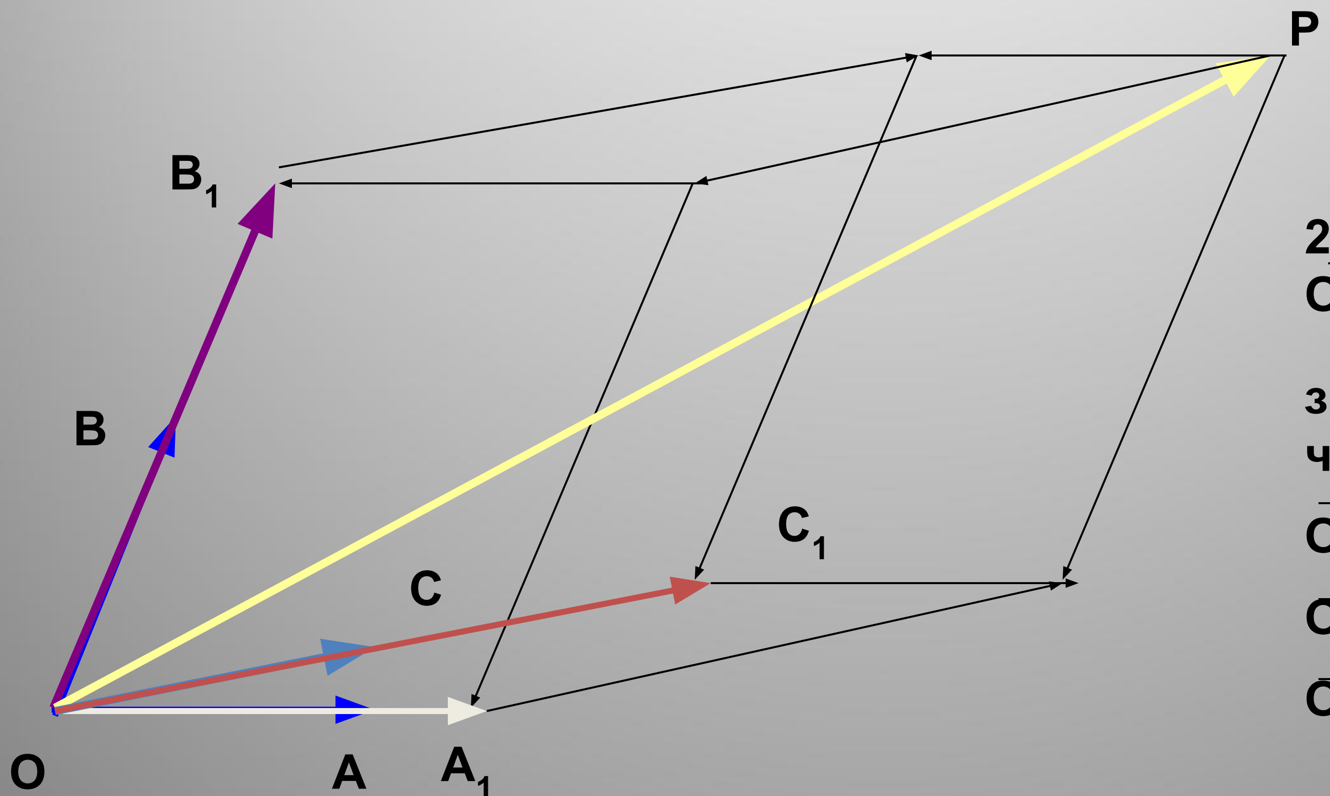
Замечание: если, например, $\vec{OA_1} \uparrow\downarrow \vec{OA}$, то $x<0$

Разложение вектора

по трем некомпланарным векторам

Рассмотрим вектор $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$
и базисные векторы
$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$

1)Через конец вектора $\vec{p}$ проведем прямые, параллельные базисным векторам $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$



Получили параллелепипед

2) Имеем $\overrightarrow{OA_1} \parallel \overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{OB_1} \parallel \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC_1} \parallel \overrightarrow{OC}$

значит найдутся числа x, y, z:

$\overrightarrow{OA_1} = x\,\overrightarrow{OA}$,

$\overrightarrow{OB_1} = y\,\overrightarrow{OB}$,

$\overrightarrow{OC_1} = z\,\overrightarrow{OC}$

Действия над векторами

Скалярное умножение векторов

Определение: **скалярным произведением векторов** a и b называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Скалярное произведение векторов это **число.**

Свойства скалярного произведения:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

переместительность

$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$

сочетательность

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

распределительность

$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$

скалярный квадрат

Необходимое и достаточное условие равенства скалярного произведения нулю

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \vec{a} \neq 0 \\ \vec{b} \neq 0 \\ \vec{a} \perp \vec{b} \end{array}\right.$$

взаимная перпендикулярность ненулевых векторов