

$f(x, y)$ - ограниченная на P -ограниченной, нулю; $\mu(\partial P) = 0$ (т.е. квадр.)

$T = \{P_i\}_{i=1}^r$ - разбиение P хордами площади O на P_i , $\mu(P_i) > 0$

$$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K), \quad m_i = \inf_{K \in P_i} f(K)$$

$S_T(f) \equiv \sum_{i=1}^r M_i \cdot \mu(P_i)$ - верхняя сумма Darby

$s_T(f) \equiv \sum_{i=1}^r m_i \cdot \mu(P_i)$ - нижняя сумма Darby

$$\forall K_i \in P_i \quad m_i \leq f(K_i) \leq M_i \quad \cdot \mu(P_i) + \sum_{i=1}^r$$

$$\Rightarrow S_T(f) \leq \sigma_T(f, \{K_i\}) \leq s_T(f)$$

Оп. $T_2 > T_1$, если ин-ва T_2 получены из ин-в T_1 ,

после проведения дополнительных кристаллизаций.

Оп. $T_2 \succ T_1$, если ин-та T_2 получены из ин-та T_1

последовательным проведением дополнительных кривых

11. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), S_{T_2}(f) \geq S_{T_1}(f)$

Опс. $T_2 \succ T_1$, если мн.-ка T_2 получены из мн.-ки T_1 . Достаточно $P_k \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$, разбить на нулеи проведением дополнительных критических плоскостей. Рассл-ва: $P_k = P_k' \cup P_k''$, $\mu(P_k' \cap P_k'') = 0$.

$$\text{д/з. } T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), S_{T_2}(f) \geq S_{T_1}(f)$$

$$M_k = \sup_{K \in P_k} f(K), M'_k = \sup_{K \in P'_k} f(K) \leq M_k, M''_k = \sup_{K \in P''_k} f(K) \leq M_k$$

$$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_k \mu(P_k) - M'_k \mu(P'_k) - M''_k \mu(P''_k) =$$

$$= (\mu(P_k) = \mu(P'_k) + \mu(P''_k)) = \underbrace{(M_k - M'_k)}_{\geq 0} \mu(P'_k) + \underbrace{(M''_k - M_k)}_{\geq 0} \mu(P''_k) \geq 0.$$

Анал. $S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) \geq 0$. Доказано.

Оп. $T_2 \succ T_1$, если ии-ва T_2 получены из ии-ва T_1 D-во 11. Достаточно $P_k \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$, разделено на пучки прохождения дополнительных кривых множества. И ии-ва: $P_k = P_k' \cup P_k''$, и $(P_k' \cap P_k'') = \emptyset$.

$$\text{11. } T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), S_{T_2}(f) \geq S_{T_1}(f)$$

$$\text{12. } \forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$$

$$M_k = \sup_{K \in P_k} f(K), M'_k = \sup_{K \in P'_k} f(K) \leq M_k, M''_k = \sup_{K \in P''_k} f(K) \leq M_k$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_k \mu(P_k) - M'_k \mu(P'_k) - M''_k \mu(P''_k) \\ & = (\mu(P_k) = \mu(P'_k) + \mu(P''_k)) = (\underbrace{M_k - M'_k}_{\geq 0}) \mu(P'_k) + (\underbrace{M''_k - M_k}_{\geq 0}) \mu(P''_k) \\ & \geq 0. \text{ Анал. } S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) \geq 0. \end{aligned}$$

Л. Доказана.

Оп. $T_2 \succ T_1$, если ил.-ва T_2 получены из ил.-ва T_1 D-ко 11. Достаточно $P_k \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$, разбившо на
путьи проведения дополнительных кривых множеств. Р ил.-ва: $P_k = P_k' \cup P_k''$, $\mu(P_k' \cap P_k'') = 0$.

11. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$, $S_{T_2}(f) \geq S_{T_1}(f)$

12. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

$$\begin{aligned} M_k &= \sup_{K \in P_k} f(K), M'_k = \sup_{K \in P'_k} f(K) \leq M_k, M''_k = \sup_{K \in P''_k} f(K) \leq M_k \\ &\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_k \mu(P_k) - M'_k \mu(P'_k) - M''_k \mu(P''_k) = \\ &= (\mu(P_k) = \mu(P'_k) + \mu(P''_k)) = (\underbrace{M_k - M'_k}_{\geq 0}) \mu(P'_k) + (\underbrace{M_k - M''_k}_{\geq 0}) \mu(P''_k) \geq 0. \end{aligned}$$

Анал. $S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) \geq 0$. П.Доказана.

D-ко 12. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$S_{T_2}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$. П.Д-зана.

Оп. $T_2 \succ T_1$, если ии-ва T_2 получены из ии-ва T_1 . Д-ко 11. Достаточно $P_k \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$, разбить на конечное количество дополнительных критериях множества. И ии-ва: $P_k = P_k' \cup P_k''$, $\mu(P_k' \cap P_k'') = 0$.

11. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$, $S_{T_2}(f) \geq S_{T_1}(f)$

$$M_k = \sup_{K \in P_k} f(K), M'_k = \sup_{K \in P'_k} f(K) \leq M_k, M''_k = \sup_{K \in P''_k} f(K) \leq M_k$$

12. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

$$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_k \mu(P_k) - M'_k \mu(P'_k) - M''_k \mu(P''_k) =$$

13. $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \varepsilon > 0 \exists |K^{(1)}| = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r$,

$$= (\mu(P_k) = \mu(P'_k) + \mu(P''_k)) = \underbrace{(M_k - M'_k)}_{\geq 0} \mu(P'_k) + \underbrace{(M_k - M''_k)}_{\geq 0} \mu(P''_k)$$

$\exists |K^{(2)}| = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2 :$

$$\geq 0. \text{ Анал. } S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) \geq 0. \quad \text{Л. Доказана.}$$

$$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, |K^{(1)}|) < \varepsilon$$

Д-ко 12. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$$0 \leq \sigma_T(f, |K^{(2)}|) - S_T(f) < \varepsilon$$

$$S_{T_2}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f). \quad \text{Л. Д-зана.}$$

Оп. $T_2 \succ T_1$, если ин-ва T_2 получены из ин-в T_1 D-во 11. Достаточно $P_k \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$, разбившего на промежуточные дополнительные кривые площадей. Рассл-ва: $P_k = P_k' \cup P_k''$, и $(P_k' \cap P_k'') = \emptyset$.

11. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$, $S_{T_2}(f) \geq S_{T_1}(f)$

12. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

13. $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \varepsilon > 0 \exists \mathbb{K}^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r$,

$\exists \mathbb{K}^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2$:

$$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(1)}) < \varepsilon$$

$$0 \leq \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(2)}) - S_T(f) < \varepsilon,$$

$$M_k = \sup_{K \in P_k} f(K), M'_k = \sup_{K \in P_k'} f(K) \leq M_k, M''_k = \sup_{K \in P_k''} f(K) \leq M_k$$

$$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_k \mu(P_k) - M'_k \mu(P_k') - M''_k \mu(P_k'') =$$

$$= (\mu(P_k) = \mu(P_k') + \mu(P_k'')) = \underbrace{(M_k - M'_k)}_{\geq 0} \mu(P_k') + \underbrace{(M_k - M''_k)}_{\geq 0} \mu(P_k'') \geq 0$$

≥ 0. Анал. $S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) \geq 0$. П. доказана.

D-во 12. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$$S_{T_2}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f). \quad \text{П. д-зано.}$$

D-во 13. $\forall \varepsilon > 0$ по опред. точных границ $\exists K_i^{(1)} \in P_i$,

$$\exists K_i^{(2)} \in P_i : \quad 0 \leq M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{M(P)}, \quad i=1, 2, \dots, r$$

$$0 \leq f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\varepsilon}{M(P)}$$

• $\mu(P_i) \approx \sum_{i=1}^r$. Лемма доказана.

Оп. $T_2 > T_1$, если ии-ва T_2 получены из ии-ва T_1 D-ко 11. Достаточно $P_k \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$, разбить на
чтобы приведение дополнительных критериях правильны. Рассмотрим $P_k = P_k' \cup P_k''$, $\mu(P_k' \cap P_k'') = 0$.

11. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$, $S_{T_2}(f) \geq S_{T_1}(f)$

12. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

13. $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \varepsilon > 0 \exists |K^{(1)}| = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r$,

$\exists |K^{(2)}| = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2$:

$$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, |K^{(1)}|) < \varepsilon$$

$$0 \leq \sigma_T(f, |K^{(2)}|) - S_T(f) < \varepsilon.$$

$$M_k = \sup_{K \in P_k} f(K), M'_k = \sup_{K \in P_k'} f(K) \leq M_k, M''_k = \sup_{K \in P_k''} f(K) \leq M_k$$

$$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_k \mu(P_k) - M'_k \mu(P_k') - M''_k \mu(P_k'') =$$

$$= (\mu(P_k) = \mu(P_k') + \mu(P_k'')) = (\underbrace{M_k - M'_k}_{\geq 0}) \mu(P_k') + (\underbrace{M_k - M''_k}_{\geq 0}) \mu(P_k'') \geq 0$$

анал. $S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) \geq 0$. Доказана.

D-ко 12. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$$S_{T_2}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f). \quad \text{Л.д.-зана.}$$

Введем $\underline{I} \equiv \inf_T S_T(f)$ — нижний интеграл Darby D-ко 13. $\forall \varepsilon > 0$ по опред. таких групп $\exists K_i^{(1)} \in P_i$,

$$\overline{I} \equiv \sup_T S_T(f) — верхний — , — , — \quad \exists K_i^{(2)} \in P_i : 0 \leq M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{M(P)}, \quad i=1, 2, \dots, r$$

тако, то $S_{T_2}(f) \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S_{T_2}(f) \quad \forall T_1, T_2$

$$0 \leq f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\varepsilon}{M(P)} \quad \cdot \mu(P_i) + \sum_{i=1}^r. \quad \text{Лемма доказана.}$$

Опн. $T_2 \succ T_1$, если ин-ва T_2 получены из ин-в T_1 . Достаточно $P_k \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$, разбив на нуких промежутиков дополнительных кривых получас. Р-ин-ва: $P_k = P_k' \cup P_k''$, $\mu(P_k' \cap P_k'') = 0$.

11. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$, $S_{T_2}(f) \geq S_{T_1}(f)$

12. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

13. $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \varepsilon > 0 \exists K^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r$

$\exists K^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(1)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2 \circ$

$$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \varepsilon$$

$$0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - S_T(f) < \varepsilon.$$

$$M_k = \sup_{K \in P_k} f(K), M'_k = \sup_{K \in P_k'} f(K) \leq M_k, M''_k = \sup_{K \in P_k''} f(K) \leq M_k$$

$$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_k \mu(P_k) - M'_k \mu(P_k') - M''_k \mu(P_k'') = \\ = (\mu(P_k) = \mu(P_k') + \mu(P_k'')) = \underbrace{(M_k - M'_k)}_{\geq 0} \mu(P_k') + \underbrace{(M_k - M''_k)}_{\geq 0} \mu(P_k'') =$$

≥ 0 . Анал. $S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) \geq 0$. Л. доказана.

Д-ко 12. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$$S_{T_1}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_2}(f) \leq S_{T_3}(f), \text{ л.д-зона.}$$

Вв-дем $I \equiv \sup_T S_T(f)$ — нижний интеграл Darby D-ко 13. $\forall \varepsilon > 0$ по опред. точек грани $\exists K_i^{(1)} \in P_i$,

$$\bar{I} \equiv \inf_T S_T(f) — Верхний — , — , — \exists K_i^{(2)} \in P_i : 0 \leq M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}, i=1, 2, \dots, r$$

Асно, то $S_{T_2}(f) \leq I \leq \bar{I} \leq S_{T_2}(f) \forall T_1, T_2$

$$0 \leq f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$$

Т4. (Критерий интегрируемости). $f(x, y)$ — опр. ф-я

$$\cdot \mu(P_i) \cup \sum_{i=1}^r.$$

Лемма доказана.

на опр. зонки. квадр P инт-эр. на $P \Leftrightarrow \lim_{\delta r \rightarrow 0} (S_r(f) - s_r(f)) = 0$

Опн. $T_2 \succ T_1$, если ин-ва T_2 получены из ин-в T_1 . Достаточно $P_k \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$, разделено на пучки неповсеместных дополнительных критериях множеств. Р-ин-ва: $P_k = P_k' \cup P_k''$, т.к. $(P_k' \cap P_k'') = \emptyset$.

11. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$, $S_{T_2}(f) \geq S_{T_1}(f)$ $M_k = \sup_{K \in P_k} f(K)$, $M'_k = \sup_{K \in P_k'} f(K) \leq M_k$, $M''_k = \sup_{K \in P_k''} f(K) \leq M_k$

12. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

13. $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \varepsilon > 0 \exists \mid K^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r,$

$\exists \mid K^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2 : \quad 0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, \mid K^{(1)}) < \varepsilon$

$0 \leq \sigma_T(f, \mid K^{(2)}) - S_T(f) < \varepsilon.$

$$\begin{aligned} M_k &= \sup_{K \in P_k} f(K), M'_k = \sup_{K \in P_k'} f(K) \leq M_k, M''_k = \sup_{K \in P_k''} f(K) \leq M_k \\ \Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) &= M_k \mu(P_k) - M'_k \mu(P_k') - M''_k \mu(P_k'') \\ &= (M_k - M'_k) \mu(P_k) + (M''_k - M_k) \mu(P_k'') \geq 0 \end{aligned}$$

≥ 0 . Анал. $S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) \geq 0$. \square доказана.

Д-во 12. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$S_{T_2}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$. \square д-зана.

Выведем $\underline{I} = \sup_{\overline{T}} S_{\overline{T}}(f)$ — нижний интеграл Радубу Д-во 13. $\forall \varepsilon > 0$ по опред. верхних граний $\exists K_i^{(1)} \in P_i$,

$\bar{I} = \inf_{\overline{T}} S_{\overline{T}}(f)$ — верхний —, —, — $\exists K_i^{(2)} \in P_i : 0 \leq M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{M(P)}$
 $0 \leq f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\varepsilon}{M(P)} \quad i=1, 2, \dots, r$

$\cdot \mu(P_i) + \sum_{i=1}^r$. Лемма доказана.

Ясно, что $S_{T_2}(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_{T_1}(f) \quad \forall T_1, T_2$

Т4. (Критерий интегрируемости). $f(x, y)$ — опр. оп-я на огр. замкн. квадр P интегр. на $P \Leftrightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (\sigma_T(f) - S_T(f)) = 0$

Д-во Т4. \Rightarrow $f(x, y)$ интегр. на P . $I = \iint_P f(x, y) dx dy$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \quad \forall \mid K = \{K_i\}_{i=1}^r$

$$|\sigma_T(f, \mid K) - I| < \frac{\varepsilon}{4}, I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma_T(f, \mid K) < I + \frac{\varepsilon}{4}$$

, то (13) $\forall \varepsilon > 0 \forall T \exists \mid K^{(1)}, \exists \mid K^{(2)} :$

$$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, \mid K^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow$$

$$0 \leq \sigma_T(f, \mid K^{(2)}) - S_T(f) < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma_T(f, \mid K^{(2)}) - \frac{\varepsilon}{4} < S_T(f) \leq S_T(f) < \sigma_T(f, \mid K^{(1)}) + \frac{\varepsilon}{4} < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

т.е. $0 \leq S_T(f) - S_T(f) < \varepsilon$, т.е. $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - S_T(f)) = 0$

Оп. $T_2 \succ T_1$, если ии-ва T_2 получены из ии-ва T_1 . Достаточно $P_k \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$, разбить на нуэи правильных дополнительных кривых плашади. И ии-ва: $P_k = P_k' \cup P_k''$, $\mu(P_k' \cap P_k'') = 0$.

$$\text{II. } T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), S_{T_2}(f) \geq S_{T_1}(f)$$

$$\text{III. } \forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$$

$$\text{IV. } \forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \varepsilon > 0 \exists \text{IK}^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r,$$

$$\exists \text{IK}^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2 : \quad$$

$$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, \text{IK}^{(1)}) < \varepsilon$$

$$0 \leq \sigma_T(f, \text{IK}^{(2)}) - S_T(f) < \varepsilon.$$

$$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M'_K = \sup_{K \in P'_K} f(K) \leq M_K, M''_K = \sup_{K \in P''_K} f(K) \leq M_K$$

$$\Rightarrow S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) = M_K \mu(P_K) - M'_K \mu(P'_K) - M''_K \mu(P''_K) = \\ = (M_K - M'_K) \mu(P'_K) + (M_K - M''_K) \mu(P''_K) \geq 0. \quad \text{Анал. } S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) \geq 0. \quad \text{I. доказана.}$$

$$\text{D-ко 12. } T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$$

$$S_{T_2}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f). \quad \text{I. доказана.}$$

Введем $I = \sup_T S_T(f)$ — нижний интеграл Ради D-ко 13. $\forall \varepsilon > 0$ no опред. верхних грани $\exists K_i^{(1)} \in P_i$,

$$\bar{I} = \inf_T S_T(f) — верхний — , — , — $\exists K_i^{(2)} \in P_i : 0 \leq M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$ $i=1, 2, \dots, r$$$

$$0 \leq f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\varepsilon}{\mu(P)} \quad \text{Лемма доказана.}$$

$$\text{Ясно, } \therefore S_T(f) \leq I \leq \bar{I} \leq S_{T_2}(f) \quad \forall T_1, T_2$$

T4. (Критерий интегрируемости). $f(x, y)$ опр. оп-ра

на опр. зонки. Квадр P инт-р. на $P \Leftrightarrow \lim_{\delta_P \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta \quad 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$$

$$S_T(f) \leq I \leq \bar{I} \leq S_{T_2}(f) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq \bar{I} - I \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon, \quad \text{но (13) } \forall \varepsilon > 0 \quad \forall T \quad \exists \text{IK}^{(1)}, \exists \text{IK}^{(2)} :$$

$$\Rightarrow \bar{I} - I = 0. \quad \text{Одозначим } I = \underline{I} = \bar{I}. \quad S_T(f) \leq I \leq S_{T_2}(f)$$

$$\text{Но } \forall \text{IK} = \{K_i\}_{i=1}^r \Rightarrow S_T(f) \leq \sigma_T(f, \text{IK}) \leq S_{T_2}(f)$$

$$\Rightarrow |\sigma_T(f, \text{IK}) - I| \leq S_T(f) - s_T(f) \leq \varepsilon, \text{ т.е. } f(x, y) \text{-инт-р.}$$

T. доказана.

$$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, \text{IK}^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow$$

$$0 \leq \sigma_T(f, \text{IK}^{(2)}) - s_T(f) < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma_T(f, \text{IK}^{(2)}) - \frac{\varepsilon}{4} < S_T(f) \leq S_{T_2}(f) < \sigma_T(f, \text{IK}^{(1)}) + \frac{\varepsilon}{4} < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\text{т.е. } 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon, \text{ т.е. } \lim_{\delta_P \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$$

Оп. $T_2 \succ T_1$, если ил-ва T_2 получены из ил-ва T_1 , D-Bo 1. Достаточно $P_k \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$, разбить на нулюм промежутии дополнительных кривых получше. Р-ил-ва: $P_k = P_k' \cup P_k''$, $\mu(P_k' \cap P_k'') = 0$.

11. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$, $S_{T_2}(f) \geq S_{T_1}(f)$

12. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

13. $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \varepsilon > 0 \exists |K^{(1)}| = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r$

$\exists |K^{(2)}| = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2 :$

$$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, |K^{(1)}|) < \varepsilon$$

$$0 \leq \sigma_T(f, |K^{(2)}|) - S_T(f) < \varepsilon.$$

Вв-дём $\underline{I} = \sup_T S_T(f)$ — нижн. интеграл Дарбу D-Bo 13.

$\overline{I} = \inf_T S_T(f)$ — верхн. —, —, —

Ясно, что $S_{T_1}(f) \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S_{T_2}(f) \forall T_1, T_2$

Т4. (Критерий интегрируемости). $f(x, y)$ — опр. п-я

на опр. замкн. квадр P инт-р. на $P \Leftrightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta \quad 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$$

$$S_T(f) \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S_P(f) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad 0 < \overline{I} - \underline{I} \leq S_P(f) - s_P(f) < \varepsilon, \text{ Но (13) } \forall \varepsilon > 0 \quad \forall T \quad \exists |K^{(1)}|, \exists |K^{(2)}| :$$

$$\Rightarrow \overline{I} - \underline{I} = 0. \text{ Обозначим } I = \underline{I} = \overline{I}. \quad S_T(f) \leq I \leq S_P(f)$$

$$\text{Но } \forall |K| = \{K_i\}_{i=1}^r \Rightarrow \quad s_T(f) \leq \sigma_T(f, |K|) \leq S_T(f)$$

$$\Rightarrow |\sigma_T(f, |K|) - I| \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon, \text{ т.е. } f(x, y) \text{ — инт-р.} \\ \text{Т. доказана.}$$

Л. $f(x, y)$ опр. п-я на опр. замкн. квадр. P инт-р.

$$\Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(f) = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} s_T(f) = I = \iint_P f(x, y) dx dy.$$

$$\begin{aligned} M_K &= \sup_{K \in P_K} f(K), M'_K = \sup_{K \in P'_K} f(K) \leq M_K, M''_K = \sup_{K \in P''_K} f(K) \leq M_K \\ &\Rightarrow S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) = M_K \mu(P_K) - M'_K \mu(P'_K) - M''_K \mu(P''_K) = \\ &= (M_K - M'_K) \mu(P'_K) + (M_K - M''_K) \mu(P''_K) \geq 0 \\ &\geq 0. \text{ Анал. } S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) \geq 0. \quad \text{Л. доказана.} \end{aligned}$$

D-Bo 12. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$$S_{T_2}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f). \quad \text{Л. д-зана.}$$

$$\begin{aligned} \text{Вв-дём } \underline{I} &= \sup_T S_T(f) - \text{нижн. интеграл Дарбу} \quad \text{D-Bo 13. } \forall \varepsilon > 0 \text{ но опред. } \underline{\text{точек}} \text{ имею } \exists K_i^{(1)} \in P_i, \\ \overline{I} &= \inf_T S_T(f) - \text{верхн. —, —, —} \quad \exists K_i^{(2)} \in P_i : \quad 0 \leq M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{M(P)}, \quad i=1, 2, \dots, r \\ &0 \leq f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\varepsilon}{M(P)} \\ &\cdot \mu(P_i) + \sum_{i=1}^r. \quad \text{Лемма доказана.} \end{aligned}$$

D-Bo 14. $\Rightarrow f(x, y)$ инт-р. на P . $I = \iint_P f(x, y) dx dy$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta \quad \forall |K| = \{K_i\}_{i=1}^r,$$

$$|\sigma_T(f, |K|) - I| < \frac{\varepsilon}{4}, I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma_T(f, |K|) < I + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, |K|) < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow$$

$$0 \leq \sigma_T(f, |K^{(2)}|) - s_T(f) < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma_T(f, |K^{(2)}|) - \frac{\varepsilon}{4} < s_T(f) \leq S_T(f) < \sigma_T(f, |K^{(1)}|) + \frac{\varepsilon}{4} < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\text{т.е. } 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon, \text{ т.е. } \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$$

D-76 симметрическо.

T5 (интегрирующиеся нефункциональные группы).

$f(x,y)$ непр. на отр. замкн. квадр. $P \Rightarrow$

$f(x,y)$ инт-р. на P .

T5 (Интегрируемость непрерывных функций).

$f(x, y)$ непр. на отр. замкн. квадр. $P \Rightarrow$

$f(x, y)$ интегр. на P .

Д-ко. $f(x, y)$ - равноз. непр. на P , т.е. $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0 : \forall K', K'' \in P : g(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

Тогда $\forall T, \delta_T < \delta$ $S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i)$, $s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K'_i)$, $m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K''_i)$; $K'_i, K''_i \in P_i$

$g(K'_i, K''_i) \leq \text{diam } P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K'_i) - f(K''_i) < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

$\cdot \mu(P_i)$, $\sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{N(P)} \mu(P_i) = \underline{\varepsilon}$,

т.е. $f(x, y)$ интегр. на P . T. Дорогова.

T5 (Интегрируемые непрерывные функции).

$f(x, y)$ непр. на отр. замкн. квадр. $P \Rightarrow$

$f(x, y)$ універс. на P .

Д-бо. $f(x, y)$ - равномер. непр. на P , т.е. $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0 : \forall K', K'' \in P : \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

Тогда $\forall T, \delta_T < \delta$ $S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i), s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K'_i), m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K''_i), K'_i, K''_i \in P_i$

$\rho(K'_i, K''_i) \leq \text{diam } P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K'_i) - f(K''_i) < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

$\cdot \mu(P_i), \sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{N(P)} \mu(P_i) = \varepsilon$,

т.е. $f(x, y)$ універс. на P . Т. доказана.

Можна д-бо, що існує узагальнене універс. ф-ю на конічних лін-б-х торах зовні кривих нулях 0, які позначають уні-непр. ф-ю φ с тим що це уні-функції.

T5 (интегрируемость непрерывных функций).

$f(x,y)$ непр. на орг. замкн. квадр. $P \Rightarrow$

$f(x,y)$ интегр. на P .

D-во. $f(x,y)$ -функция непр. на P , т.е. $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0 : \forall K', K'' \in P : g(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

Тогда $\forall T, \delta_T < \delta \quad S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i), s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K'_i), m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K''_i); K'_i, K''_i \in P_i$

$g(K'_i, K''_i) \leq \text{diam } P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K'_i) - f(K''_i) < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

$\cdot \mu(P_i), \sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{N(P)} \mu(P_i) = \underline{\varepsilon},$

т.е. $f(x,y)$ интегр. на P . Т. доказано.

Можно д-во, что если существует интегр. по-10

на конечном фин. ве торах или кривых ино-

мально 0, то получается интегр. по-8 с тем

же интегрантом.

Свойства двойного интеграла

(P -орган. замкн. квадр. инт. во.)

1. $f(x,y)$ интегр. на $P \Rightarrow \forall c \in (-\infty, +\infty)$ с. $f(x,y)$

интегр. на P , причем

$$\iint_P c \cdot f(x,y) dx dy = c \iint_P f(x,y) dx dy.$$

T5 (Интегрируемость непрерывных функций).
 $f(x,y)$ непр. на орт. замкн. хлдр. $P \Rightarrow$
 $f(x,y)$ интгр. на P .

$$\text{D.-bo. } \Omega_P(cf, IK) = \sum_{i=1}^r cf(K_i) \mu(P_i) = \\ = c \sum_{i=1}^r f(K_i) \mu(P_i) = c \cdot \Omega_P(f, IK) \xrightarrow{\delta_i \rightarrow 0} \underset{P}{\iint} c \cdot f(x,y) dx dy$$

D.-bo. $f(x,y)$ - паднаа. непр. на P , т.е. $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists \delta > 0 : \forall K', K'' \in P : \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

Тогда $\forall T, \delta_T < \delta$ $S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i), s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K'_i), m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K''_i); K'_i, K''_i \in P_i$

$\rho(K'_i, K''_i) \leq \text{diam } P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K'_i) - f(K''_i) < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

$\cdot \mu(P_i), \sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{N(P)} \mu(P_i) = \underline{\varepsilon},$
 т.е. $f(x,y)$ интгр. на P . Т. доказана.

Можно д-ть, что если существует интгр. ф-я на конечном мер. вл. торе и если кривые проходят 0, то получается инт-р ф-я с тем же инт-ром.

Свойства двойного интегрирования

(P - орт. замкн. хлдр. мер. вл.)

1. $f(x,y)$ интгр. на $P \Rightarrow \forall c \in (-\infty, +\infty) c \cdot f(x,y)$

интгр. на P , причем

$$\underset{P}{\iint} c \cdot f(x,y) dx dy = c \underset{P}{\iint} f(x,y) dx dy.$$

Т5 (Интегрируемость непрерывных функций).

$f(x,y)$ непр. на отр. замкн. квадр. $P \Rightarrow$

$f(x,y)$ непр. на P .

Д-Бо. $f(x,y)$ - равномерн. непр. на P , т.е. $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists \delta > 0 : \forall K', K'' \in P : p(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

Тогда $\forall T, S_T < \delta$ $S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i), s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K'_i), m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K''_i); K'_i, K''_i \in P_i$

$p(K'_i, K''_i) \leq \text{diam } P_i \leq S_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K'_i) - f(K''_i) < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

$\cdot \mu(P_i), \sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{N(P)} \mu(P_i) = \underline{\varepsilon},$

т.е. $f(x,y)$ интегр. на P . Т. доказана.

Можно д-ть, что если изменим инт-р. f -ю
на конечное фин. № точек или кривые ино-
узды O , то получится инт-р. f -ю с тем
же инт-рганом.

Свойства двойного интеграла

(P -отр. замкн. квадр. инт-ро)

1. $f(x,y)$ инт-р. на $P \Rightarrow \forall c \in (-\infty, +\infty)$ $c \cdot f(x,y)$

инт-р. на P , прим.

$$\iint_P c \cdot f(x,y) dx dy = c \iint_P f(x,y) dx dy.$$

$$\text{Д-Бо. } \Omega_\pi(c \cdot f, IK) = \sum_{i=1}^r c f(K_i) \mu(P_i) = \\ = c \sum_{i=1}^r f(K_i) \mu(P_i) = c \cdot \Omega_\pi(f, IK) \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} c \iint_P f(x,y) dx dy$$

т.о. $f(x,y), g(x,y)$ инт-р. на $P \Rightarrow f(x,y) \pm g(x,y)$

- инт-р. на P , прим.

$$\iint_P (f(x,y) \pm g(x,y)) dx dy = \iint_P f(x,y) dx dy \pm \iint_P g(x,y) dx dy$$

Д-ть какое.

CB-Bol, 2 - нелинейн. ф-и, инт-р.

Т5 (Интегрируемость непрерывных функций).

$f(x,y)$ непр. на огр. замкн. квадр. P \Rightarrow

$f(x,y)$ интегр. на P .

Д-бо. $f(x,y)$ - предел. непр. на P , т.е. $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0 : \forall K', K'' \in P : \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

Тогда $\forall T, \delta_T < \delta$ $S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i), s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K'_i), m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K''_i), K'_i, K''_i \in P_i$

$\rho(K'_i, K''_i) \leq \text{diam } P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K'_i) - f(K''_i) < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

$\cdot \mu(P_i), \sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{N(P)} \mu(P_i) = \underline{\varepsilon}$,

т.е. $f(x,y)$ интегр. на P . \square Т. доказана.

Можно д-ро, что если измениется интегр. по-другому

на конечном количестве точек или кривых с площадью 0, то получится интеграл по-другому

Свойства двойного интеграла

(P -огранич. замкн. квадр. инт. бо.)

1. $f(x,y)$ интегр. на $P \Rightarrow \forall c \in (-\infty, +\infty) c \cdot f(x,y)$

интегр. на P , прим.

$$\iint_P c \cdot f(x,y) dx dy = c \iint_P f(x,y) dx dy.$$

$$\text{Д-ро. } \sigma_T(c \cdot f, IK) = \sum_{i=1}^r c f(K_i) \mu(P_i) = \\ = c \sum_{i=1}^r f(K_i) \mu(P_i) = c \cdot \sigma_T(f, IK) \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} c \iint_P f(x,y) dx dy$$

т.е. $f(x,y), g(x,y)$ интегр. на $P \Rightarrow f(x,y) \pm g(x,y)$
- интегр. на P , прим.

$$\iint_P (f(x,y) \pm g(x,y)) dx dy = \iint_P f(x,y) dx dy \pm \iint_P g(x,y) dx dy$$

Д-ро \square

Сб. № 1, 2 - нелинейные об. инт-ра.

3. $f(x,y), g(x,y)$ интегр. на $P \Rightarrow f(x,y) \cdot g(x,y)$ интегр. на P .

T5 (Интегрируемость непрерывных функций).

$f(x,y)$ непр. на отр. замкн. квадр. $P \Rightarrow f(x,y)$ интегр. на P .

D-бд. $f(x,y)$ - равномерн. непр. на P , т.е. $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \delta > 0 : \forall K', K'' \in P : \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{N(P)}$$

$$\text{Тогда } \forall T, \delta_T < \delta \quad S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i), \quad s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$$

$$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K'_i), \quad m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K''_i); \quad K'_i, K''_i \in P_i$$

$$\rho(K'_i, K''_i) \leq \text{diam } P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K'_i) - f(K''_i) < \frac{\varepsilon}{N(P)}$$

$$\cdot \mu(P_i), \sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{N(P)} \mu(P_i) = \underline{\varepsilon},$$

т.е. $f(x,y)$ интегр. на P . \square Т. доказана.

Можно д-ть, что если изучаемые интегр. fg -то

на конечном фин. ве. торах или кривых не-
издад 0, то получается интегр. fg -то с тем

Свойства двойного интеграла

(P - отр. замкн. квадр. инт. бд.)

1. $f(x,y)$ интегр. на $P \Rightarrow \forall c \in (-\infty, +\infty)$ $c \cdot f(x,y)$

интегр. на P , прим.

$$\iint_P c \cdot f(x,y) dx dy = c \iint_P f(x,y) dx dy.$$

$$\text{D-бд. } \Omega_P(c \cdot f, IK) = \sum_{i=1}^r c f(K_i) \mu(P_i) = \\ = c \sum_{i=1}^r f(K_i) \mu(P_i) = c \cdot \Omega_P(f, IK) \xrightarrow[\delta_T \rightarrow 0]{} c \iint_P f(x,y) dx dy$$

2. $f(x,y), g(x,y)$ интегр. на $P \Rightarrow f(x,y) \pm g(x,y)$
- интегр. на P , прим.

$$\iint_P (f(x,y) \pm g(x,y)) dx dy = \iint_P f(x,y) dx dy \pm \iint_P g(x,y) dx dy$$

D-ть доказ.

CB-Бд 1,2 - нелинейные об. иск-ва.

3. $f(x,y), g(x,y)$ интегр. на $P \Rightarrow f(x,y) \cdot g(x,y)$ интегр. на P .

D-бд. $|f(x,y)| \leq M^f, |g(x,y)| \leq M^g \quad \forall (x,y) \in P; \quad M^f > 0, M^g > 0$

$$T = \{P_i\}_{i=1}^r, \quad M_i^h = \sup_{K \in P_i} h(K), \quad m_i^h = \inf_{K \in P_i} h(K) \quad h = f, g, f \cdot g$$

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists K'_i, K''_i \in P_i : f(K'_i)g(K'_i) > M_i^f - \frac{\alpha}{2}, \quad f(K''_i)g(K''_i) < m_i^g + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$0 < M_i^f - m_i^g < (f(K'_i)g(K'_i) + \frac{\alpha}{2}) - (f(K''_i)g(K''_i) - \frac{\alpha}{2}) = f(K'_i)g(K'_i) -$$

$$- f(K''_i)g(K''_i) + f(K'_i)g(K''_i) - f(K''_i)g(K'_i) + \alpha = f(K'_i)(g(K'_i) - g(K''_i)) + \\ + g(K''_i)(f(K'_i) - f(K''_i)) + \alpha \leq M^f(M_i^g - m_i^g) + M^g(M_i^f - m_i^f) + \alpha \quad \forall \alpha > 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq M_i^f - m_i^g \leq M^f(M_i^g - m_i^g) + M^g(M_i^f - m_i^f)$$

$$\cdot \mu(P_i) \cup \sum_{i=1}^r \Rightarrow$$

$$0 \leq S_T(fg) - s_T(fg) \leq M^f \underbrace{(S_T(g) - s_T(g))}_{\rightarrow 0 \quad (\delta_T \rightarrow 0)} + M^g \underbrace{(S_T(f) - s_T(f))}_{\rightarrow 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(fg) - s_T(fg)) = 0, \quad \text{т.е.}$$

$f(x,y) \cdot g(x,y)$ интегр. на P

4. $f(x,y)$ універс. на P . \Rightarrow Ворп. замкн. клас. $P_1 \subset P$ $f(x,y)$ універс. на P_1 .

4. $f(x, y)$ интегр. на $P \Rightarrow$ Аорд. замкн. квадр. $P_1 \subset P$ $f(x, y)$ интегр. на P_1 .

Д-бо. T -разбиение P , τ -разбиение P_1 . $f(x, y)$ интегр. на $P \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \quad 0 \leq S_T(f, P) - s_T(f, P) < \varepsilon$. Берём $\forall \tau : \delta_\tau < \delta$

Возьмём $T : \delta_T < \delta$ и $T|_{P_1} = \tau$. $\Rightarrow 0 \leq \underbrace{S_\tau(f, P_1) - s_\tau(f, P_1)}_{\sum_{i=1}^{r_1} (M_i - m_i) \mu(P_i)}, r_1 \leq r$

$$\leq \underbrace{S_T(f, P) - s_T(f, P)}_{\sum_{i=1}^r (M_i - m_i) \mu(P_i)} < \varepsilon$$

$\Rightarrow f(x, y)$ интегр. на P_1

4. $f(x, y)$ интегр. на $P \Rightarrow$ Абс. замкн. квадр. $P_1 \subset P$ $f(x, y)$ интегр. на P_1 .

Д-во. T -разбиение P , τ -разбиение P_1 . $f(x, y)$ интегр. на $P \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \quad 0 \leq S_T(f, P) - s_T(f, P) < \varepsilon$. Берём $\forall \tau : \delta_\tau < \delta$

Возьмём $T : \delta_T < \delta$ и $T|_{P_1} = \tau$. $\Rightarrow 0 \leq \underbrace{S_\tau(f, P_1) - s_\tau(f, P_1)}_{\sum_{i=1}^{r_1} (M_i - m_i) \mu(P_i)}, r_1 \leq r} \leq$

$\leq \underbrace{S_T(f, P) - s_T(f, P)}_{\sum_{i=1}^r (M_i - m_i) \mu(P_i)} < \varepsilon$

$\Rightarrow f(x, y)$ интегр. на P_1

5. (Ch-во аддитивности двойного интеграла, $S/2$). $f(x, y)$ интегр.

на $P_1, P_2 : \mu(P_1 \cap P_2) = 0 \Rightarrow f(x, y)$ интегр. на $P = P_1 \cup P_2$, т.к.

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \iint_{P_1} f(x, y) dx dy + \iint_{P_2} f(x, y) dx dy.$$