

$f(x, y)$  - ограниченная на  $P$ -ограни, замкну. мн-во;  $\mu(\partial P) = 0$  (т.е. квадр.)

$T = \{P_i\}_{i=1}^r$  - разбиение  $P$  криволинейной площадью  $O$  на  $P_i$ ,  $\mu(P_i) > 0$

$$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K), \quad m_i = \inf_{K \in P_i} f(K)$$

$S_T(f) \equiv \sum_{i=1}^r M_i \cdot \mu(P_i)$  - верхняя сумма Дарбу

$s_T(f) \equiv \sum_{i=1}^r m_i \cdot \mu(P_i)$  - нижняя сумма Дарбу

$$\forall K_i \in P_i \quad m_i \leq f(K_i) \leq M_i \quad \cdot \mu(P_i) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^r$$

$$\Rightarrow S_T(f) \leq \sigma_T(f, \{K_i\}) \leq s_T(f)$$

Опр.  $T_2 \succ T_1$ , если мн-ва  $T_2$  получены из мн-в  $T_1$  путём проведения дополнительных кривых плоскости.

Опр.  $T_2 \succ T_1$ , если мн-ва  $T_2$  получены из мн-в  $T_1$

путём проведения дополнительных кривых тандем.

Л1.  $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

Опр.  $T_2 \succ T_1$ , если мн-ва  $T_2$  получены из мн-ва  $T_1$  д-во 11. Достаточно  $P_K \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$  разбить по пути проведения дополнительных кривых на 2 мн-ва:  $P_K = P_K' \cup P_K''$ ,  $\mu(P_K' \cap P_K'') = 0$ .

л1.  $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$ ,  $s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

$$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M_K' = \sup_{K \in P_K'} f(K) \leq M_K, M_K'' = \sup_{K \in P_K''} f(K) \leq M_K$$

$$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_K \mu(P_K) - M_K' \mu(P_K') - M_K'' \mu(P_K'') =$$

$$= (\mu(P_K) = \mu(P_K') + \mu(P_K'')) = \underbrace{(M_K - M_K')}_{\geq 0} \mu(P_K') + \underbrace{(M_K - M_K'')}_{\geq 0} \mu(P_K'')$$

$$\geq 0. \text{ Анал. } s_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \geq 0. \quad \square \text{ Доказано.}$$

Опр.  $T_2 \succ T_1$ , если мн-ва  $T_2$  получены из мн-ва  $T_1$  д-во  $\Lambda 1$ . Достаточно  $P_K \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$  разбить на пути и проведя дополнительные кривые площадь. 2 мн-ва:  $P_K = P_K' \cup P_K''$ ,  $\mu(P_K' \cap P_K'') = 0$ .

л1.  $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

л2.  $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$

$$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M_K' = \sup_{K \in P_K'} f(K) \leq M_K, M_K'' = \sup_{K \in P_K''} f(K) \leq M_K$$

$$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_K \mu(P_K) - M_K' \mu(P_K') - M_K'' \mu(P_K'') =$$

$$= (\mu(P_K) = \mu(P_K') + \mu(P_K'')) = \underbrace{(M_K - M_K')}_{\geq 0} \mu(P_K') + \underbrace{(M_K - M_K'')}_{\geq 0} \mu(P_K'')$$

$$\geq 0. \text{ Анал. } S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) \geq 0. \quad \text{л. доказана.}$$

Опр.  $T_2 \succ T_1$ , если мн-ва  $T_2$  получены из мн-ва  $T_1$  D-во 11. Достаточно  $P_K \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$ , разбивая по пути проведения дополнительных кривых плоскости 2 мн-ва:  $P_K = P'_K \cup P''_K$ ,  $\mu(P'_K \cap P''_K) = 0$ .

л1.  $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

л2.  $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

$$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M'_K = \sup_{K \in P'_K} f(K) \leq M_K, M''_K = \sup_{K \in P''_K} f(K) \leq M_K$$

$$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_K \mu(P_K) - M'_K \mu(P'_K) - M''_K \mu(P''_K) =$$

$$= (\mu(P_K) = \mu(P'_K) + \mu(P''_K)) = \underbrace{(M_K - M'_K)}_{\geq 0} \mu(P'_K) + \underbrace{(M_K - M''_K)}_{\geq 0} \mu(P''_K)$$

$$\geq 0. \text{ Анал. } s_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \geq 0. \quad \text{л. доказана.}$$

D-во 12.  $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$$s_{T_1}(f) \leq s_{T_3}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_2}(f). \quad \text{л. доказана.}$$

Опр.  $T_2 \succ T_1$ , если мн-ва  $T_2$  получены из мн-ва  $T_1$  Д-во  $\Lambda 1$ . Достаточно  $P_K \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$ , разбито на пути и проведенная дополнительная кривая получается 2 мн-ва:  $P_K = P_K' \cup P_K''$ ,  $\mu(P_K' \cap P_K'') = 0$ .

л1.  $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), \sigma_{T_2}(f) \geq \sigma_{T_1}(f)$

л2.  $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$

л3.  $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \varepsilon > 0 \exists K^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r,$

$\exists K^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2:$

$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \varepsilon$

$0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - S_T(f) < \varepsilon$

$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M_K' = \sup_{K \in P_K'} f(K) \leq M_K, M_K'' = \sup_{K \in P_K''} f(K) \leq M_K$

$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_K \mu(P_K) - M_K' \mu(P_K') - M_K'' \mu(P_K'') =$

$= (\mu(P_K) = \mu(P_K') + \mu(P_K'')) = \underbrace{(M_K - M_K')}_{\geq 0} \mu(P_K') + \underbrace{(M_K - M_K'')}_{\geq 0} \mu(P_K'')$

$\geq 0$ . Анал.  $S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) \geq 0$ . л. доказана.

Д-во  $\Lambda 2$ .  $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$S_{T_1}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$ . л. Д-во.

Опр.  $T_2 \succ T_1$ , если мн-ва  $T_2$  получены из мн-ва  $T_1$  д-во  $\Lambda 1$ . Достаточно  $P_k \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$ , разбитого на путь проведения дополнительных кривых тласов. 2 мн-ва:  $P_k = P_k' \cup P_k''$ ,  $\mu(P_k' \cap P_k'') = 0$ .

л1.  $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

л2.  $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$

л3.  $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \varepsilon > 0 \exists K^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r,$

$\exists K^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2:$

$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \varepsilon$

$0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - S_T(f) < \varepsilon,$

$M_k = \sup_{K \in P_k} f(K), M_k' = \sup_{K \in P_k'} f(K) \leq M_k, M_k'' = \sup_{K \in P_k''} f(K) \leq M_k$   
 $\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_k \mu(P_k) - M_k' \mu(P_k') - M_k'' \mu(P_k'') =$   
 $= (\mu(P_k) = \mu(P_k') + \mu(P_k'')) = \underbrace{(M_k - M_k')}_{\geq 0} \mu(P_k') + \underbrace{(M_k - M_k'')}_{\geq 0} \mu(P_k'')$   
 $\geq 0.$  Анал.  $S_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \geq 0.$  л. доказана.

Д-во л2.  $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$S_{T_2}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f).$  л. д-во.

Д-во л3.  $\forall \varepsilon > 0$  по опред. точных граней  $\exists K_i^{(1)} \in P_i,$

$\exists K_i^{(2)} \in P_i: 0 \leq M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$   
 $0 \leq f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\varepsilon}{\mu(P)} \quad i=1, 2, \dots, r$

•  $\mu(P_i)$  и  $\sum_{i=1}^r$ . Лемма доказана.



Опр.  $T_2 \succ T_1$ , если мн-ва  $T_2$  получены из мн-ва  $T_1$  Д-во 11. Достаточное  $P_K \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$ , разбито на чётим проведением дополнительных кривых на мн-ва:  $P_K = P_K' \cup P_K''$ ,  $\mu(P_K' \cap P_K'') = 0$ .

Л1.  $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

Л2.  $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

Л3.  $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \varepsilon > 0 \exists K^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r,$

$\exists K^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2:$

$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \varepsilon$

$0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - S_T(f) < \varepsilon.$

$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M_K' = \sup_{K \in P_K'} f(K) \leq M_K, M_K'' = \sup_{K \in P_K''} f(K) \leq M_K$

$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_K \mu(P_K) - M_K' \mu(P_K') - M_K'' \mu(P_K'') =$

$= (\mu(P_K) = \mu(P_K') + \mu(P_K'')) = \underbrace{(M_K - M_K')}_{\geq 0} \mu(P_K') + \underbrace{(M_K - M_K'')}_{\geq 0} \mu(P_K'')$

$\geq 0.$  Анал.  $S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) \geq 0.$  Л. Доказано.

Д-во 12.  $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$S_{T_1}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f).$  Л. Доказано.

Введём  $\underline{I} \equiv \sup_T S_T(f)$  - нижний интеграл Дарбу Д-во 13.  $\forall \varepsilon > 0$  по опред. таких точек  $\exists K_i^{(1)} \in P_i,$

$\bar{I} \equiv \inf_T S_T(f)$  - верхний —, —, —  $\exists K_i^{(2)} \in P_i:$

$0 \leq M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{\mu(P_i)} \quad i=1, 2, \dots, r$

$0 \leq f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\varepsilon}{\mu(P_i)}$

Асно, во  $S_{T_2}(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_{T_1}(f) \quad \forall T_1, T_2$

$\bullet \mu(P_i)$  и  $\sum_{i=1}^r$ . Лемма доказана.

Опр.  $T_2 \succ T_1$ , если мн-ва  $T_2$  получены из мн-ва  $T_1$  д-во  $\Lambda 1$ . Достаточное  $P_K \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$  разбито на пути проведения дополнительных кривых тисселей. 2 мн-ва:  $P_K = P_K' \cup P_K''$ ,  $\mu(P_K' \cap P_K'') = 0$ .

л1.  $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

л2.  $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

л3.  $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \varepsilon > 0 \exists K^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r,$

$\exists K^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2:$

$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \varepsilon$

$0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - s_T(f) < \varepsilon.$

$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M_K' = \sup_{K \in P_K'} f(K) \leq M_K, M_K'' = \sup_{K \in P_K''} f(K) \leq M_K$

$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_K \mu(P_K) - M_K' \mu(P_K') - M_K'' \mu(P_K'') =$   
 $= (\mu(P_K) = \mu(P_K') + \mu(P_K'')) = \underbrace{(M_K - M_K')}_{\geq 0} \mu(P_K') + \underbrace{(M_K - M_K'')}_{\geq 0} \mu(P_K'')$

$\geq 0$ . Анал.  $S_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \geq 0$ . л доказана.

д-во  $\Lambda 2$ .  $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$S_{T_1}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_2}(f)$  л. д-во.

Введем  $\underline{I} \equiv \sup_T S_T(f)$  - нижний интеграл Дарбу д-во  $\Lambda 3$ .  $\forall \varepsilon > 0$  по опред. точных граней  $\exists K_i^{(1)} \in P_i,$

$\bar{I} \equiv \inf_T S_T(f)$  - верхний —, —, —  $\exists K_i^{(2)} \in P_i: 0 \leq M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$   
 $0 \leq f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\varepsilon}{\mu(P)} \quad i=1, 2, \dots, r$

Ясно, что  $S_{T_2}(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_{T_1}(f) \forall T_1, T_2$

$\bullet \mu(P_i) \text{ и } \sum_{i=1}^r$  лемма доказана.

Т4. (Критерий интегрируемости).  $f(x, y)$  - орг. ф-я

на орг. замкнутом квадрате  $P$  интегр. на  $P \Leftrightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

Опр.  $T_2 \succ T_1$ , если мн-ва  $T_2$  получены из мн-ва  $T_1$  Д-во 11. Достаточно  $P_K \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$ , разбитое на пути и проведенная дополнительные кривые т.е. мн-ва:  $P_K = P_K' \cup P_K''$ ,  $\mu(P_K' \cap P_K'') = 0$ .

л1.  $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

л2.  $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

л3.  $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \varepsilon > 0 \exists K^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r,$

$\exists K^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2:$

$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \varepsilon$

$0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - s_T(f) < \varepsilon,$

$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M_K' = \sup_{K \in P_K'} f(K) \leq M_K, M_K'' = \sup_{K \in P_K''} f(K) \leq M_K$

$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_K \mu(P_K) - M_K' \mu(P_K') - M_K'' \mu(P_K'') =$

$= (\mu(P_K) = \mu(P_K') + \mu(P_K'')) = \underbrace{(M_K - M_K')}_{\geq 0} \mu(P_K') + \underbrace{(M_K - M_K'')}_{\geq 0} \mu(P_K'')$

$\geq 0$ . Анал.  $S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) \geq 0$ . л доказана.

Д-во 12.  $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$s_{T_1}(f) \leq s_{T_3}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_2}(f)$ . л. Д-во.

Введем  $\underline{I} \equiv \sup_T s_T(f)$  - нижний интеграл Дарбу Д-во 13.  $\forall \varepsilon > 0$  по опред. точных граней  $\exists K_i^{(1)} \in P_i,$

$\bar{I} \equiv \inf_T S_T(f)$  - верхний —, —, —

$\exists K_i^{(2)} \in P_i: 0 \leq M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{\mu(P_i)}$

$0 \leq f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\varepsilon}{\mu(P_i)} \quad i=1, 2, \dots, r$

Асно, что  $s_{T_2}(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_{T_2}(f) \quad \forall T_1, T_2$

•  $\mu(P_i)$  и  $\sum_{i=1}^r$ , лемма доказана.

Т4. (Критерий интегрируемости).  $f(x, y)$  - орг. ф-я

Д-во Т4.  $\Rightarrow f(x, y)$  интер. на  $P. I = \iint_P f(x, y) dx dy$

на орг. замкну. квадр  $P$  интер. на  $P \Leftrightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta \quad \forall K = \{K_i\}_{i=1}^r,$

$|S_T(f, K) - I| < \frac{\varepsilon}{4}, I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma_T(f, K) < I + \frac{\varepsilon}{4}$

Но (л3)  $\forall \varepsilon > 0 \forall T \exists K^{(1)}, \exists K^{(2)}:$

$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow$

$0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - s_T(f) < \frac{\varepsilon}{4}$

$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma_T(f, K^{(2)}) - \frac{\varepsilon}{4} < s_T(f) \leq S_T(f) < \sigma_T(f, K^{(1)}) + \frac{\varepsilon}{4} < I + \frac{\varepsilon}{2},$

т.е.  $0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$ , т.е.  $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

Опр.  $T_2 \succ T_1$ , если мн-ва  $T_2$  получены из мн-ва  $T_1$  д-во  $\Lambda 1$ . Достаточное  $P_K \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$ , разбито на нулем проводимых дополнительных кривых тласовид, 2 мн-ва:  $P_K = P_K' \cup P_K''$ ,  $\mu(P_K' \cap P_K'') = 0$ .

Л1.  $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

Л2.  $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

Л3.  $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \epsilon > 0 \exists K^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r, \exists K^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2:$

$$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \epsilon$$

$$0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - s_T(f) < \epsilon.$$

Введем  $\underline{I} \equiv \sup_T S_T(f)$  - нижний интеграл Дарбу  
 $\bar{I} \equiv \inf_T S_T(f)$  - верхний —, —, —

Ясно, что  $S_{T_2}(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_{T_1}(f) \forall T_1, T_2$

Т4. (Критерий интегрируемости).  $f(x, y)$  - орг. ф-я

на орг. замкну. квадр  $P$  интегр. на  $P \Leftrightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

$\Leftarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \epsilon$

$S_T(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_T(f) \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \ 0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq S_T(f) - s_T(f) < \epsilon$

$\Rightarrow \bar{I} - \underline{I} = 0$ . Обозначим  $I = \underline{I} = \bar{I}$ .  $S_T(f) \leq I \leq S_T(f)$

Но  $\forall K = \{K_i\}_{i=1}^r \Rightarrow S_T(f) \leq \sigma_T(f, K) \leq S_T(f)$

$\Rightarrow |\sigma_T(f, K) - I| \leq S_T(f) - s_T(f) < \epsilon$ , т.е.  $f(x, y)$  - интегр. Т. Доказана.

$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M'_K = \sup_{K \in P'_K} f(K) \leq M_K, M''_K = \sup_{K \in P''_K} f(K) \leq M_K$   
 $\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_K \mu(P_K) - M'_K \mu(P'_K) - M''_K \mu(P''_K) =$

$= (\mu(P_K) = \mu(P'_K) + \mu(P''_K)) = \underbrace{(M_K - M'_K)}_{\geq 0} \mu(P'_K) + \underbrace{(M_K - M''_K)}_{\geq 0} \mu(P''_K) \geq 0$ . Анал.  $S_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \geq 0$ . Л. Доказана.

Д-во Л2.  $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$ . Л. Доказана.

Д-во Л3.  $\forall \epsilon > 0$  по опред. таких граний  $\exists K_i^{(1)} \in P_i, \exists K_i^{(2)} \in P_i: 0 \leq M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\epsilon}{\mu(P_i)}$   
 $0 \leq f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\epsilon}{\mu(P_i)} \quad i=1, 2, \dots, r$   
 •  $\mu(P_i)$  и  $\sum_{i=1}^r$ . Лемма доказана.

Д-во Т4.  $\Rightarrow f(x, y)$  интегр. на  $P$ .  $I = \iint_P f(x, y) dx dy$

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow \forall K = \{K_i\}_{i=1}^r, |\sigma_T(f, K) - I| < \frac{\epsilon}{4}, I - \frac{\epsilon}{4} < \sigma_T(f, K) < I + \frac{\epsilon}{4}$

Но (Л3)  $\forall \epsilon > 0 \forall T \exists K^{(1)}, \exists K^{(2)}: 0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \frac{\epsilon}{4} \Rightarrow 0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - s_T(f) < \frac{\epsilon}{4}$

$I - \frac{\epsilon}{2} < \sigma_T(f, K^{(2)}) - \frac{\epsilon}{4} < s_T(f) \leq S_T(f) < \sigma_T(f, K^{(1)}) + \frac{\epsilon}{4} < I + \frac{\epsilon}{2}$   
 т.е.  $0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \epsilon$ , т.е.  $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

Опр.  $T_2 \succ T_1$ , если мн-ва  $T_2$  получены из мн-ва  $T_1$  D-во  $\Lambda 1$ . Достаточное  $P_K \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$ , разбито на путьм проведения дополнительных кривых произвольн. 2 мн-ва:  $P_K = P_K' \cup P_K''$ ,  $\mu(P_K' \cap P_K'') = 0$ .

л1.  $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

л2.  $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$

л3.  $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \varepsilon > 0 \exists K^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r,$

$\exists K^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2:$

$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \varepsilon$

$0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - s_T(f) < \varepsilon.$

$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M_K' = \sup_{K \in P_K'} f(K) \leq M_K, M_K'' = \sup_{K \in P_K''} f(K) \leq M_K$

$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_K \mu(P_K) - M_K' \mu(P_K') - M_K'' \mu(P_K'')$   
 $= (\mu(P_K) - \mu(P_K') + \mu(P_K'')) = \underbrace{(M_K - M_K')}_{\geq 0} \mu(P_K') + \underbrace{(M_K - M_K'')}_{\geq 0} \mu(P_K'')$

$\geq 0$ . Анал.  $S_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \geq 0$ . л. доказана.

D-во  $\Lambda 2$ .  $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$s_{T_2}(f) \leq s_{T_3}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_2}(f)$ . л. доказана.

Введем  $\underline{I} \equiv \sup_T s_T(f)$  - нижний интеграл Дарбу D-во  $\Lambda 3$ .  $\forall \varepsilon > 0$  по опред. точек граней  $\exists K_i^{(1)} \in P_i,$

$\bar{I} \equiv \inf_T S_T(f)$  - верхний —, —, —  $\exists K_i^{(2)} \in P_i: 0 \leq M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$

$0 \leq f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\varepsilon}{\mu(P)} \quad i=1, 2, \dots, r$

•  $\mu(P_i)$  и  $\sum_{i=1}^r$ . Лемма доказана.

D-во  $\tau 4$ .  $\Rightarrow f(x, y)$  интегр. на P.  $I = \iint_P f(x, y) dx dy$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta \quad \forall K = \{K_i\}_{i=1}^r,$

$|\sigma_T(f, K) - I| < \frac{\varepsilon}{4}, I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma_T(f, K) < I + \frac{\varepsilon}{4}$

Но ( $\Lambda 3$ )  $\forall \varepsilon > 0 \forall T \exists K^{(1)}, \exists K^{(2)}:$

$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow$

$0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - s_T(f) < \frac{\varepsilon}{4}$

$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma_T(f, K^{(2)}) - \frac{\varepsilon}{4} < s_T(f) \leq S_T(f) < \sigma_T(f, K^{(1)}) + \frac{\varepsilon}{4} < I + \frac{\varepsilon}{2}$

т.е.  $0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$ , т.е.  $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

Асно, что  $s_{T_2}(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_{T_2}(f) \quad \forall T_1, T_2$

T4. (Критерий интегрируемости).  $f(x, y)$  - орг. ф-я

на орг. замкну. квадр. P интегр. на P  $\Leftrightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

$\Leftarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta \quad 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

$s_T(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_T(f) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

$\Rightarrow \bar{I} - \underline{I} = 0$ . Обозначим  $I = \underline{I} = \bar{I}$ .  $s_T(f) \leq I \leq S_T(f)$

Но  $\forall K = \{K_i\}_{i=1}^r \Rightarrow s_T(f) \leq \sigma_T(f, K) \leq S_T(f)$

$\Rightarrow |\sigma_T(f, K) - I| \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$ , т.е.  $f(x, y)$  - интегр. T. доказана.

Сл.  $f(x, y)$  орг. ф-я на орг. замкну. квадр. P интегр.

$\Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(f) = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} s_T(f) = I = \iint_P f(x, y) dx dy.$

D-то самосостоятельно.

Т5 (Интерпретируемость непрерывных функций),

$f(x,y)$  непр. на отр. замкну. квадр.  $P \Rightarrow$

$f(x,y)$  интер. на  $P$ .

Т5 (Интерпретируемость непрерывных функций),

$f(x, y)$  непр. на огр. замкну. квадр.  $P \Rightarrow$

$f(x, y)$  интер. на  $P$ .

Д-во.  $f(x, y)$  - равн. непр. на  $P$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0$ ,  $\forall K', K'' \in P: \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

Тогда  $\forall T, \delta_T < \delta$   $S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i)$ ,  $s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K_i')$ ,  $m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K_i'')$ ,  $K_i', K_i'' \in P_i$

$\rho(K_i', K_i'') \leq \text{diam } P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K_i') - f(K_i'') < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

$\cdot \mu(P_i)$ ,  $\sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{N(P)} \mu(P_i) = \varepsilon$ ,

т.е.  $f(x, y)$  интер. на  $P$ .  $\square$  Т. доказана.

Т5 (Интегрируемость непрерывных функций).

$f(x, y)$  непр. на отр. замкну. квадр.  $P \Rightarrow$

$f(x, y)$  интегр. на  $P$ .

$\mathcal{D}$ -во.  $f(x, y)$  - равномер. непр. на  $P$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0$ :  $\forall K', K'' \in P: \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

Тогда  $\forall T, \delta_T < \delta$   $S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i)$ ,  $s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K_i')$ ,  $m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K_i'')$ ;  $K_i', K_i'' \in P_i$

$\rho(K_i', K_i'') \leq \text{diam } P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K_i') - f(K_i'') < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

$\mu(P_i)$ ,  $\sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{N(P)} \mu(P_i) = \varepsilon$ ,

т.е.  $f(x, y)$  интегр. на  $P$ . Т. доказана.

Можно заметить, что если существует интегр.  $f$ -ю на конечном лев. ве. отрезке или кривых площади  $0$ , то получится интегр.  $f$ -я с тем же интегралом.



Т5 (Интерпретируемость непрерывных функций).

$f(x,y)$  непр. на огр. замкну. квадр.  $P \Rightarrow$

$f(x,y)$  интер. на  $P$ .

Д-во.  $f(x,y)$  - равномерно непр. на  $P$ , т.е.  $\forall \epsilon > 0$

$\exists \delta > 0: \forall K', K'' \in P: \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\epsilon}{N(P)}$

Тогда  $\forall \tau, \delta_\tau < \delta \quad S_\tau(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i), s_\tau(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K_i'), m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K_i''), K_i', K_i'' \in P_i$

$\rho(K_i', K_i'') \leq \text{diam } P_i \leq \delta_\tau < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K_i') - f(K_i'') < \frac{\epsilon}{N(P)}$

$\cdot \mu(P_i), \sum_{i=1}^r \Rightarrow \underline{0 \leq S_\tau(f) - s_\tau(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\epsilon}{N(P)} \mu(P_i) = \epsilon}$ ,

т.е.  $f(x,y)$  интер. на  $P$ . Т. доказано.

Можно д-ть, что если изменить интер. ф-ю на конечном мен-ве точек или кривой площади  $O$ , то получится интерпр. ф-я с тем же интегралом.

Свойства двойного интеграла

( $P$  - оград. замкну. квадрат. мен-во)

1.  $f(x,y)$  интер. на  $P \Rightarrow \forall c \in (-\infty, +\infty) c f(x,y)$

интер. на  $P$ , причем

$$\iint_P c \cdot f(x,y) dx dy = c \iint_P f(x,y) dx dy.$$

Т5 (Интерпретируемость непрерывных функций),

$f(x, y)$  непр. на огр. замкну. квадр.  $P \Rightarrow$

$f(x, y)$  интер. на  $P$ .

Д-во.  $f(x, y)$  - равном. непр. на  $P$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0, \forall K', K'' \in P: \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

Тогда  $\forall T, \delta_T < \delta$   $S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i), s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K_i'), m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K_i''); K_i', K_i'' \in P_i$

$\rho(K_i', K_i'') \leq \text{diam } P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K_i') - f(K_i'') < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

$\cdot \mu(P_i), \sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{N(P)} \mu(P_i) = \varepsilon$ ,

т.е.  $f(x, y)$  интер. на  $P$ .  $\square$  Т. доказана.

Можно д-ть, что если увеличить интер. ф-ю на конечной замк. кривой или кривых площади  $O$ , то получится интерпр. ф-я с тем же интервалом.

### Свойства двойного интеграла

( $P$  - оград. замкну. квадр. зам. во)

1.  $f(x, y)$  интер. на  $P \Rightarrow \forall c \in (-\infty, +\infty)$  с.ф.о.у)

интер. на  $P$ , причем

$$\iint_P c \cdot f(x, y) dx dy = c \iint_P f(x, y) dx dy.$$

Д-во.  $\sigma_\pi(c \cdot f, K) = \sum_{i=1}^r c \cdot f(K_i) \mu(P_i) =$

$$= c \sum_{i=1}^r f(K_i) \mu(P_i) = c \cdot \sigma_\pi(f, K) \xrightarrow{(\delta_T \rightarrow 0)} c \cdot \iint_P f(x, y) dx dy$$

Т5 (Интерпретируемость непрерывных функций).

$f(x,y)$  непр. на опр. замкн. квадр.  $P \Rightarrow$

$f(x,y)$  интер. на  $P$ .

$D$ -во.  $f(x,y)$  - равном. непр. на  $P$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \delta > 0: \forall K', K'' \in P: \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{M(P)}$$

Тогда  $\forall T, \delta_T < \delta$   $S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i)$ ,  $s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K_i'), m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K_i''); K_i', K_i'' \in P_i$$

$$\rho(K_i', K_i'') \leq \text{diam } P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K_i') - f(K_i'') < \frac{\varepsilon}{M(P)}$$

$$\cdot \mu(P_i), \sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{M(P)} \mu(P_i) = \varepsilon$$

т.е.  $f(x,y)$  интер. на  $P$ . Т. доказана.

Можно заметить, что если существуют интер. ф-я на конечном лн. ве тогах или кривых площади 0, то получится интерпр. ф-я с тем же интервалом.

### Свойства двойного интеграла

( $P$  - оград. замкн. квадр. лн. во)

1.  $f(x,y)$  интер. на  $P \Rightarrow \forall c \in (-\infty, +\infty)$   $c \cdot f(x,y)$

интер. на  $P$ , причем

$$\iint_P c \cdot f(x,y) dx dy = c \iint_P f(x,y) dx dy$$

$$D\text{-во. } \sigma_T(c \cdot f, K) = \sum_{i=1}^r c \cdot f(K_i) \mu(P_i) =$$

$$= c \sum_{i=1}^r f(K_i) \mu(P_i) = c \cdot \sigma_T(f, K) \xrightarrow{(\delta_T \rightarrow 0)} c \cdot \iint_P f(x,y) dx dy$$

2.  $f(x,y), g(x,y)$  интер. на  $P \Rightarrow f(x,y) \pm g(x,y)$

- интер. на  $P$ , причем

$$\iint_P (f(x,y) \pm g(x,y)) dx dy = \iint_P f(x,y) dx dy \pm \iint_P g(x,y) dx dy$$

$D$ -то сумма.

Св-во 1, 2 - линейность дв. инт-ла.

Т5 (Интерпретируемость непрерывных функций).

$f(x, y)$  непр. на огр. замкн. квадр.  $P \Rightarrow$

$f(x, y)$  интер. на  $P$ .

$\mathcal{D}$ -во.  $f(x, y)$  - равном. непр. на  $P$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0$ :  $\forall K', K'' \in P: \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

Тогда  $\forall T, \delta_T < \delta$   $S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i)$ ,  $s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K_i')$ ,  $m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K_i'')$ ;  $K_i', K_i'' \in P_i$

$\rho(K_i', K_i'') \leq \text{diam } P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K_i') - f(K_i'') < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

$\cdot \mu(P_i)$ ,  $\sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{N(P)} \mu(P_i) = \varepsilon$ ,

т.е.  $f(x, y)$  интер. на  $P$ .  $\square$  Т. доказана.

Можно д-ть, что если существует интер. ф-ю на конечном мн-ве точек или кривых площади 0, то получится интерпрет. ф-я с тем же интервалом.

### Свойства двойного интеграла

( $P$  - оград. замкн. квадр. мн-во)

1.  $f(x, y)$  интер. на  $P \Rightarrow \forall c \in (-\infty, +\infty)$   $c \cdot f(x, y)$

интер. на  $P$ , причем

$$\iint_P c \cdot f(x, y) dx dy = c \iint_P f(x, y) dx dy.$$

$$\mathcal{D}\text{-во. } \sigma_T(cf, K) = \sum_{i=1}^r cf(K_i) \mu(P_i) =$$

$$= c \sum_{i=1}^r f(K_i) \mu(P_i) = c \cdot \sigma_T(f, K) \xrightarrow{\delta_T \rightarrow 0} c \cdot \iint_P f(x, y) dx dy$$

2.  $f(x, y), g(x, y)$  интер. на  $P \Rightarrow f(x, y) \pm g(x, y)$

- интер. на  $P$ , причем

$$\iint_P (f(x, y) \pm g(x, y)) dx dy = \iint_P f(x, y) dx dy \pm \iint_P g(x, y) dx dy$$

$\mathcal{D}$ -то сумма.

$c \in \mathbb{R}$  во 1, 2 - множитель дв. ин-ла.

3.  $f(x, y), g(x, y)$  интер. на  $P \Rightarrow f(x, y) \cdot g(x, y)$  интер. на  $P$ .

Т5 (Интерпретируемость непрерывных функций).

$f(x,y)$  непр. на огр. замкн. квадр.  $P \Rightarrow$

$f(x,y)$  интер. на  $P$ .

Д-во.  $f(x,y)$  - равном. непр. на  $P$ , т.е.  $\forall \epsilon > 0$

$\exists \delta > 0, \forall K', K'' \in P: \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\epsilon}{\mu(P)}$

Тогда  $\forall T, \delta_T < \delta$   $S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i), s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K_i'), m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K_i''); K_i', K_i'' \in P_i$

$\rho(K_i', K_i'') \leq \text{diam } P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K_i') - f(K_i'') < \frac{\epsilon}{\mu(P)}$

$\cdot \mu(P_i), \sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\epsilon}{\mu(P)} \mu(P_i) = \epsilon$ ,

т.е.  $f(x,y)$  интер. на  $P$ . Т. доказано.

Можно д-ть, что если изменить интер. ф-ю

на конечном лин. ве точек или кривых пло-

щади 0, то получится интерпрет. ф-я с тем

же интервалом.

Свойства двойного интеграла

( $P$ -огр. замкн. квадр. лин. во)

1.  $f(x,y)$  интер. на  $P \Rightarrow \forall c \in (-\infty, +\infty) c \cdot f(x,y)$

интер. на  $P$ , причем

$$\iint_P c \cdot f(x,y) dx dy = c \iint_P f(x,y) dx dy.$$

$$\text{Д-во. } \sigma_T(c f, K) = \sum_{i=1}^r c f(K_i) \mu(P_i) = c \sum_{i=1}^r f(K_i) \mu(P_i) = c \cdot \sigma_T(f, K) \xrightarrow{(\delta_T \rightarrow 0)} c \cdot \iint_P f(x,y) dx dy$$

2.  $f(x,y), g(x,y)$  интер. на  $P \Rightarrow f(x,y) \pm g(x,y)$

- интер. на  $P$ , причем

$$\iint_P (f(x,y) \pm g(x,y)) dx dy = \iint_P f(x,y) dx dy \pm \iint_P g(x,y) dx dy$$

Д-ть само.

Св. во 1, 2 - линейность дв. инт-ла.

3.  $f(x,y), g(x,y)$  интер. на  $P \Rightarrow f(x,y) \cdot g(x,y)$  интер. на  $P$ .

Д-во.  $|f(x,y)| \leq M^f, |g(x,y)| \leq M^g \forall (x,y) \in P, M^f > 0, M^g > 0$

$T = \{P_i\}_{i=1}^r, M_i^h = \sup_{K \in P_i} h(K), m_i^h = \inf_{K \in P_i} h(K) \quad h = f, g, f \cdot g$

$\forall \alpha > 0 \exists K_i', K_i'' \in P_i: f(K_i') \cdot g(K_i') > M_i^{fg} - \frac{\alpha}{2}, f(K_i'') \cdot g(K_i'') < m_i^{fg} + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$$0 \leq M_i^{fg} - m_i^{fg} < (f(K_i') \cdot g(K_i') + \frac{\alpha}{2}) - (f(K_i'') \cdot g(K_i'') - \frac{\alpha}{2}) = f(K_i') \cdot g(K_i') -$$

$$- f(K_i'') \cdot g(K_i'') + f(K_i') \cdot g(K_i'') - f(K_i'') \cdot g(K_i'') + \alpha = f(K_i') (g(K_i') - g(K_i'')) +$$

$$+ g(K_i'') (f(K_i') - f(K_i'')) + \alpha \leq M^f (M^g - m^g) + M^g (M^f - m^f) + \alpha \quad \forall \alpha > 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq M_i^{fg} - m_i^{fg} \leq M^f (M^g - m^g) + M^g (M^f - m^f)$$

$$\cdot \mu(P_i) \quad \vee \sum_{i=1}^r \Rightarrow$$

$$0 \leq S_T(fg) - s_T(fg) \leq M^f (S_T(g) - s_T(g)) + M^g (S_T(f) - s_T(f))$$

$$\xrightarrow{(\delta_T \rightarrow 0)} \rightarrow 0 \quad \xrightarrow{(\delta_T \rightarrow 0)} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(fg) - s_T(fg)) = 0, \text{ т.е.}$$

$f(x,y) \cdot g(x,y)$  интер. на  $P$

4.  $f(x, y)$  интегр. на  $D$ .  $\Rightarrow \forall$  отр. замкн. квадр.  $P_1 \subset D$   $f(x, y)$  интегр. на  $P_1$ .

4.  $f(x, y)$  непрерывна на  $D$ .  $\Rightarrow$   $\forall$  открытой области  $P_1 \subset D$   $f(x, y)$  непрерывна на  $P_1$ .

До-во.  $T$ -разбиение  $P$ ,  $\tau$ -разбиение  $P_1$ .  $f(x, y)$  непрерывна на  $D \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \quad 0 \leq S_T(f, P) - s_T(f, P) < \varepsilon$ . Берём  $\forall \tau : \delta_\tau < \delta$

$$\text{Возьмём } T : \delta_T < \delta \text{ и } T|_{P_1} = \tau. \Rightarrow 0 \leq \underbrace{S_\tau(f, P_1) - s_\tau(f, P_1)}_{\sum_{i=1}^{n_1} (M_i - m_i) \mu(P_i), n_1 \leq n} \leq$$
$$\leq \underbrace{S_T(f, P) - s_T(f, P)}_{\sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \mu(P_i)} < \varepsilon$$

$\Rightarrow f(x, y)$  непрерывна на  $P_1$

4.  $f(x, y)$  непрерывна на  $P$ .  $\Rightarrow$   $\forall$  открытой замкнутой квадр.  $P_1 \subset P$   $f(x, y)$  непрерывна на  $P_1$ .

До-во.  $T$ -разбиение  $P$ ,  $\tau$ -разбиение  $P_1$ .  $f(x, y)$  непрерывна на  $P \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \quad 0 \leq S_T(f, P) - s_T(f, P) < \varepsilon$ . Берём  $\forall \tau : \delta_\tau < \delta$

Возьмём  $T : \delta_T < \delta$  и  $T|_{P_1} = \tau$ .  $\Rightarrow 0 \leq \underbrace{S_\tau(f, P_1) - s_\tau(f, P_1)}_{\sum_{i=1}^{r_1} (M_i - m_i) \mu(P_i), r_1 \leq r} \leq$

$$\leq \underbrace{S_T(f, P) - s_T(f, P)}_{\sum_{i=1}^r (M_i - m_i) \mu(P_i)} < \varepsilon$$

$\Rightarrow f(x, y)$  непрерывна на  $P_1$

5. (Сл-во аддитивности двойного интеграла,  $\delta/\partial$ ).  $f(x, y)$  непрерывна

на  $P_1, P_2 : \mu(P_1 \cap P_2) = 0$ .  $\Rightarrow f(x, y)$  непрерывна на  $P = P_1 \cup P_2$ , поэтому

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \iint_{P_1} f(x, y) dx dy + \iint_{P_2} f(x, y) dx dy.$$