

$f(x, y)$ - ограниченная на P -ограни, замкну. мн-во; $\mu(\partial P) = 0$ (т.е. квадр.)

$T = \{P_i\}_{i=1}^r$ - разбиение P криволинейной площадью O на P_i , $\mu(P_i) > 0$

$$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K), \quad m_i = \inf_{K \in P_i} f(K)$$

$S_T(f) \equiv \sum_{i=1}^r M_i \cdot \mu(P_i)$ - верхняя сумма Дарбу

$s_T(f) \equiv \sum_{i=1}^r m_i \cdot \mu(P_i)$ - нижняя сумма Дарбу

$$\forall K_i \in P_i \quad m_i \leq f(K_i) \leq M_i \quad \cdot \mu(P_i) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^r$$

$$\Rightarrow S_T(f) \leq \sigma_T(f, \{K_i\}) \leq s_T(f)$$

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-в T_1 путём проведения дополнительных кривых плоскости.

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-в T_1 путём проведения дополнительных кривых тисада.

Л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-ва T_1 д-во 11. Достаточно $P_K \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$ разбить по пути проведения дополнительных кривых на 2 мн-ва: $P_K = P_K' \cup P_K''$, $\mu(P_K' \cap P_K'') = 0$.

л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$, $s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

$$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M_K' = \sup_{K \in P_K'} f(K) \leq M_K, M_K'' = \sup_{K \in P_K''} f(K) \leq M_K$$

$$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_K \mu(P_K) - M_K' \mu(P_K') - M_K'' \mu(P_K'') =$$

$$= (\mu(P_K) = \mu(P_K') + \mu(P_K'')) = \underbrace{(M_K - M_K')}_{\geq 0} \mu(P_K') + \underbrace{(M_K - M_K'')}_{\geq 0} \mu(P_K'')$$

$$\geq 0. \text{ Анал. } s_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \geq 0. \quad \square \text{ Доказано.}$$

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-ва T_1 д-во $\Lambda 1$. Достаточно $P_K \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$ разбить на пути и проведя дополнительные кривые площадь. 2 мн-ва: $P_K = P_K' \cup P_K''$, $\mu(P_K' \cap P_K'') = 0$.

л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$, $s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

л2. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$

$$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M_K' = \sup_{K \in P_K'} f(K) \leq M_K, M_K'' = \sup_{K \in P_K''} f(K) \leq M_K$$

$$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_K \mu(P_K) - M_K' \mu(P_K') - M_K'' \mu(P_K'') =$$

$$= (\mu(P_K) = \mu(P_K') + \mu(P_K'')) = \underbrace{(M_K - M_K')}_{\geq 0} \mu(P_K') + \underbrace{(M_K - M_K'')}_{\geq 0} \mu(P_K'')$$

$$\geq 0. \text{ Анал. } S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) \geq 0. \quad \text{л. доказана.}$$

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-ва T_1 D-во $\Lambda 1$. Достаточное $P_K \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$, разбитого на пути проведения дополнительных кривых плоскости 2 мн-ва: $P_K = P_K' \cup P_K''$, $\mu(P_K' \cap P_K'') = 0$.

л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

л2. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

$$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M_K' = \sup_{K \in P_K'} f(K) \leq M_K, M_K'' = \sup_{K \in P_K''} f(K) \leq M_K$$

$$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_K \mu(P_K) - M_K' \mu(P_K') - M_K'' \mu(P_K'') =$$

$$= (\mu(P_K) = \mu(P_K') + \mu(P_K'')) = \underbrace{(M_K - M_K')}_{\geq 0} \mu(P_K') + \underbrace{(M_K - M_K'')}_{\geq 0} \mu(P_K'')$$

$$\geq 0. \text{ Анал. } S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) \geq 0. \quad \text{л. доказана.}$$

D-во $\Lambda 2$. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$$S_{T_1}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_2}(f) \leq S_{T_2}(f). \quad \text{л. D-зана.}$$

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-ва T_1 Д-во $\Lambda 1$. Достаточно $P_K \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$, разбито на пути и проведенная дополнительная кривая площадь 2 мн-ва: $P_K = P_K' \cup P_K''$, $\mu(P_K' \cap P_K'') = 0$.

л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

л2. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$

л3. $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \varepsilon > 0 \exists K^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r,$

$\exists K^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2:$

$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \varepsilon$

$0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - s_T(f) < \varepsilon$

$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M_K' = \sup_{K \in P_K'} f(K) \leq M_K, M_K'' = \sup_{K \in P_K''} f(K) \leq M_K$

$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_K \mu(P_K) - M_K' \mu(P_K') - M_K'' \mu(P_K'') =$

$= (\mu(P_K) = \mu(P_K') + \mu(P_K'')) = \underbrace{(M_K - M_K')}_{\geq 0} \mu(P_K') + \underbrace{(M_K - M_K'')}_{\geq 0} \mu(P_K'')$

≥ 0 . Анал. $S_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \geq 0$. л. доказана.

Д-во $\Lambda 2$. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$s_{T_1}(f) \leq s_{T_3}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_2}(f)$. л. доказана.

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-ва T_1 д-во $\Lambda 1$. Достаточно $P_K \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$, разбито на
 путем проведения дополнительных кривых тмисов. 2 мн-ва: $P_K = P_K' \cup P_K''$, $\mu(P_K' \cap P_K'') = 0$.

л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

л2. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$

л3. $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \varepsilon > 0 \exists K^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r,$

$\exists K^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2:$

$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \varepsilon$

$0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - S_T(f) < \varepsilon,$

$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M_K' = \sup_{K \in P_K'} f(K) \leq M_K, M_K'' = \sup_{K \in P_K''} f(K) \leq M_K$

$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_K \mu(P_K) - M_K' \mu(P_K') - M_K'' \mu(P_K'') =$

$= (\mu(P_K) = \mu(P_K') + \mu(P_K'')) = \underbrace{(M_K - M_K')}_{\geq 0} \mu(P_K') + \underbrace{(M_K - M_K'')}_{\geq 0} \mu(P_K'')$

≥ 0 . Анал. $S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) \geq 0$. л. доказана.

Д-во л2. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$S_{T_2}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$. л. доказана.

Д-во л3. $\forall \varepsilon > 0$ по опред. точных граней $\exists K_i^{(1)} \in P_i,$

$\exists K_i^{(2)} \in P_i: 0 \leq M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$

$0 \leq f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\varepsilon}{\mu(P)} \quad i=1, 2, \dots, r$

• $\mu(P_i)$ и $\sum_{i=1}^r$. лемма доказана.

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-ва T_1 Д-во 11. Достаточное $P_K \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$, разбито на чётим проведением дополнительных кривых на мн-ва: $P_K = P_K' \cup P_K''$, $\mu(P_K' \cap P_K'') = 0$.

Л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

Л2. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

Л3. $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \varepsilon > 0 \exists K^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r,$

$\exists K^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2:$

$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \varepsilon$

$0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - S_T(f) < \varepsilon.$

$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M_K' = \sup_{K \in P_K'} f(K) \leq M_K, M_K'' = \sup_{K \in P_K''} f(K) \leq M_K$

$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_K \mu(P_K) - M_K' \mu(P_K') - M_K'' \mu(P_K'') =$

$= (\mu(P_K) = \mu(P_K') + \mu(P_K'')) = \underbrace{(M_K - M_K')}_{\geq 0} \mu(P_K') + \underbrace{(M_K - M_K'')}_{\geq 0} \mu(P_K'')$

$\geq 0.$ Анал. $S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) \geq 0.$ Л. Доказано.

Д-во 12. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$S_{T_1}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f).$ Л. Доказано.

Введём $\underline{I} \equiv \sup_T S_T(f)$ - нижний интеграл Дарбу Д-во 13. $\forall \varepsilon > 0$ по опред. таких точек $\exists K_i^{(1)} \in P_i,$

$\bar{I} \equiv \inf_T S_T(f)$ - верхний —, —, — $\exists K_i^{(2)} \in P_i:$

$0 \leq M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{\mu(P_i)} \quad i=1, 2, \dots, r$

$0 \leq f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\varepsilon}{\mu(P_i)}$

Асно, во $S_{T_2}(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_{T_1}(f) \quad \forall T_1, T_2$

$\bullet \mu(P_i)$ и $\sum_{i=1}^r$.

Лемма доказана.

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-ва T_1 д-во $\Lambda 1$. Достаточное $P_K \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$ разбито на пути проведения дополнительных кривых тисселей. 2 мн-ва: $P_K = P_K' \cup P_K''$, $\mu(P_K' \cap P_K'') = 0$.

л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

л2. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

л3. $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \varepsilon > 0 \exists K^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r,$

$\exists K^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2:$

$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \varepsilon$

$0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - s_T(f) < \varepsilon.$

$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M_K' = \sup_{K \in P_K'} f(K) \leq M_K, M_K'' = \sup_{K \in P_K''} f(K) \leq M_K$

$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_K \mu(P_K) - M_K' \mu(P_K') - M_K'' \mu(P_K'') =$
 $= (\mu(P_K) = \mu(P_K') + \mu(P_K'')) = \underbrace{(M_K - M_K')}_{\geq 0} \mu(P_K') + \underbrace{(M_K - M_K'')}_{\geq 0} \mu(P_K'')$

≥ 0 . Анал. $S_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \geq 0$. л доказана.

д-во $\Lambda 2$. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$S_{T_1}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_2}(f)$ л. д-во.

Введем $\underline{I} \equiv \sup_T s_T(f)$ - нижний интеграл Дарбу д-во $\Lambda 3$. $\forall \varepsilon > 0$ по опред. точных граней $\exists K_i^{(1)} \in P_i,$

$\bar{I} \equiv \inf_T S_T(f)$ - верхний —, —, — $\exists K_i^{(2)} \in P_i: 0 \leq M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$
 $0 \leq f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\varepsilon}{\mu(P)} \quad i=1, 2, \dots, r$

Ясно, что $S_{T_2}(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_{T_1}(f) \quad \forall T_1, T_2$

$\bullet \mu(P_i)$ и $\sum_{i=1}^r$. лемма доказана.

Т4. (Критерий интегрируемости). $f(x, y)$ - орг. ф-я

на орг. замкнутом квадрате P интегр. на $P \Leftrightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-ва T_1 Д-во 11. Достаточно $P_K \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$, разбитое на пути и проведенная дополнительные кривые т.е. мн-ва: $P_K = P_K' \cup P_K''$, $\mu(P_K' \cap P_K'') = 0$.

л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

л2. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

л3. $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \varepsilon > 0 \exists K^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r, \exists K^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2:$

$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \varepsilon$

$0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - s_T(f) < \varepsilon$

$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M_K' = \sup_{K \in P_K'} f(K) \leq M_K, M_K'' = \sup_{K \in P_K''} f(K) \leq M_K$
 $\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_K \mu(P_K) - M_K' \mu(P_K') - M_K'' \mu(P_K'') =$
 $= (\mu(P_K) = \mu(P_K') + \mu(P_K'')) = \underbrace{(M_K - M_K')}_{\geq 0} \mu(P_K') + \underbrace{(M_K - M_K'')}_{\geq 0} \mu(P_K'')$
 ≥ 0 . Анал. $S_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \geq 0$. л доказана.

Д-во 12. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$
 $s_{T_1}(f) \leq s_{T_3}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_2}(f)$. л. Д-во.

Введем $\underline{I} \equiv \sup_T s_T(f)$ - нижний интеграл Дарбу Д-во 13. $\forall \varepsilon > 0$ по опред. точных граней $\exists K_i^{(1)} \in P_i,$
 $\underline{I} \equiv \inf_T S_T(f)$ - верхний —, —, — $\exists K_i^{(2)} \in P_i: 0 \leq M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{\mu(P_i)}$
 $0 \leq f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\varepsilon}{\mu(P_i)} \quad i=1, 2, \dots, r$

Асно, что $s_{T_2}(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_{T_2}(f) \quad \forall T_1, T_2$

• $\mu(P_i)$ и $\sum_{i=1}^r$. Лемма доказана.

Т4. (Критерий интегрируемости). $f(x, y)$ - орг. ф-я

Д-во Т4. $\Rightarrow f(x, y)$ интер. на $P. I = \iint_P f(x, y) dx dy$

на орг. замкну. квадр P интер. на $P \Leftrightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta \quad \forall K = \{K_i\}_{i=1}^r,$
 $| \sigma_T(f, K) - I | < \frac{\varepsilon}{4}, I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma_T(f, K) < I + \frac{\varepsilon}{4}$

Но (л3) $\forall \varepsilon > 0 \forall T \exists K^{(1)}, \exists K^{(2)}:$
 $0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow$
 $0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - s_T(f) < \frac{\varepsilon}{4}$
 $I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma_T(f, K^{(2)}) - \frac{\varepsilon}{4} < s_T(f) \leq S_T(f) < \sigma_T(f, K^{(1)}) + \frac{\varepsilon}{4} < I + \frac{\varepsilon}{2},$
 т.е. $0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$, т.е. $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-ва T_1 д-во $\Lambda 1$. Достаточное $P_K \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$, разбито на нулем проводимых дополнительных кривых тласовид, 2 мн-ва: $P_K = P_K' \cup P_K''$, $\mu(P_K' \cap P_K'') = 0$.

Л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

Л2. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

Л3. $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \epsilon > 0 \exists K^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r, \exists K^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2:$

$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \epsilon$
 $0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - s_T(f) < \epsilon.$

Введем $\underline{I} \equiv \sup_T S_T(f)$ - нижний интеграл Дарбу
 $\bar{I} \equiv \inf_T S_T(f)$ - верхний —, —, —

Ясно, что $S_{T_2}(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_{T_1}(f) \forall T_1, T_2$

Т4. (Критерий интегрируемости). $f(x, y)$ - орг. ф-я

на орг. замкну. квадр P интегр. на $P \Leftrightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

$\Leftarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \epsilon$

$S_T(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_T(f) \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \ 0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq S_T(f) - s_T(f) < \epsilon$

$\Rightarrow \bar{I} - \underline{I} = 0$. Обозначим $I = \underline{I} = \bar{I}$. $S_T(f) \leq I \leq S_T(f)$

Но $\forall K = \{K_i\}_{i=1}^r \Rightarrow S_T(f) \leq \sigma_T(f, K) \leq S_T(f)$

$\Rightarrow |\sigma_T(f, K) - I| \leq S_T(f) - s_T(f) < \epsilon$, т.е. $f(x, y)$ - интегр. Т. Доказана.

$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M'_K = \sup_{K \in P'_K} f(K) \leq M_K, M''_K = \sup_{K \in P''_K} f(K) \leq M_K$
 $\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_K \mu(P_K) - M'_K \mu(P'_K) - M''_K \mu(P''_K) =$
 $= (\mu(P_K) = \mu(P'_K) + \mu(P''_K)) = \underbrace{(M_K - M'_K)}_{\geq 0} \mu(P'_K) + \underbrace{(M_K - M''_K)}_{\geq 0} \mu(P''_K) \geq 0$. Анал. $S_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \geq 0$. Л. Доказана.

Д-во Л2. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow S_{T_1}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$. Л. Доказана.

Д-во Л3. $\forall \epsilon > 0$ по опред. таких граней $\exists K_i^{(1)} \in P_i, \exists K_i^{(2)} \in P_i: 0 \leq M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\epsilon}{\mu(P_i)}$
 $0 \leq f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\epsilon}{\mu(P_i)} \quad i=1, 2, \dots, r$
 • $\mu(P_i)$ и $\sum_{i=1}^r$. Лемма доказана.

Д-во Т4. $\Rightarrow f(x, y)$ интегр. на P . $I = \iint_P f(x, y) dx dy$

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow \forall K = \{K_i\}_{i=1}^r, |\sigma_T(f, K) - I| < \frac{\epsilon}{4}, I - \frac{\epsilon}{4} < \sigma_T(f, K) < I + \frac{\epsilon}{4}$

Но (Л3) $\forall \epsilon > 0 \forall T \exists K^{(1)}, \exists K^{(2)}: 0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \frac{\epsilon}{4} \Rightarrow 0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - s_T(f) < \frac{\epsilon}{4}$
 $I - \frac{\epsilon}{2} < \sigma_T(f, K^{(2)}) - \frac{\epsilon}{4} < s_T(f) \leq S_T(f) < \sigma_T(f, K^{(1)}) + \frac{\epsilon}{4} < I + \frac{\epsilon}{2}$
 т.е. $0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \epsilon$, т.е. $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-ва T_1 D-во $\Lambda 1$. Достаточное $P_K \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$, разбито на путьм проведения дополнительных кривых произвольн. 2 мн-ва: $P_K = P_K' \cup P_K''$, $\mu(P_K' \cap P_K'') = 0$.

л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

л2. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$

л3. $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \forall \varepsilon > 0 \exists K^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r,$

$\exists K^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r, K_i^{(j)} \in P_i, i=1, \dots, r; j=1, 2:$

$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \varepsilon$

$0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - s_T(f) < \varepsilon.$

$M_K = \sup_{K \in P_K} f(K), M_K' = \sup_{K \in P_K'} f(K) \leq M_K, M_K'' = \sup_{K \in P_K''} f(K) \leq M_K$

$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_K \mu(P_K) - M_K' \mu(P_K') - M_K'' \mu(P_K'')$
 $= (\mu(P_K) - \mu(P_K') + \mu(P_K'')) = \underbrace{(M_K - M_K')}_{\geq 0} \mu(P_K') + \underbrace{(M_K - M_K'')}_{\geq 0} \mu(P_K'')$

≥ 0 . Анал. $S_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \geq 0$. л. доказана.

D-во $\Lambda 2$. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1, T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$S_{T_1}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$. л. доказана.

Введем $\underline{I} \equiv \sup_T s_T(f)$ - нижний интеграл Дарбу D-во $\Lambda 3$. $\forall \varepsilon > 0$ по опред. точек $K_i^{(1)} \in P_i,$

$\bar{I} \equiv \inf_T S_T(f)$ - верхний —, —, — $\exists K_i^{(2)} \in P_i: 0 \leq M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$

$0 \leq f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\varepsilon}{\mu(P)} \quad i=1, 2, \dots, r$

Асно, что $s_{T_2}(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_{T_2}(f) \quad \forall T_1, T_2$

$\mu(P_i)$ и $\sum_{i=1}^r$. Лемма доказана.

Т4. (Критерий интегрируемости). $f(x, y)$ - орг. ф-я

D-во Т4. $\Rightarrow f(x, y)$ интегр. на P. $I = \iint_P f(x, y) dx dy$

на орг. замкн. квадр P интегр. на P $\Leftrightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta \quad \forall K = \{K_i\}_{i=1}^r,$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta \quad 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

$|\sigma_T(f, K) - I| < \frac{\varepsilon}{4}, I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma_T(f, K) < I + \frac{\varepsilon}{4}$

$s_T(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_T(f) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon,$

Но (л3) $\forall \varepsilon > 0 \forall T \exists K^{(1)}, \exists K^{(2)}:$

$\Rightarrow \bar{I} - \underline{I} = 0$. Обозначим $I = \underline{I} = \bar{I}$. $s_T(f) \leq I \leq S_T(f)$

$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, K^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow$

$0 \leq \sigma_T(f, K^{(2)}) - s_T(f) < \frac{\varepsilon}{4}$

Но $\forall K = \{K_i\}_{i=1}^r \Rightarrow s_T(f) \leq \sigma_T(f, K) \leq S_T(f)$

$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma_T(f, K^{(2)}) - \frac{\varepsilon}{4} < s_T(f) \leq S_T(f) < \sigma_T(f, K^{(1)}) + \frac{\varepsilon}{4} < I + \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow |\sigma_T(f, K) - I| \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$, т.е. $f(x, y)$ - интегр. Т. доказана.

т.е. $0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$, т.е. $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

Сл. $f(x, y)$ орг. ф-я на орг. замкн. квадр. P интегр.

D-то самосодержимо.

$\Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(f) = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} s_T(f) = I = \iint_P f(x, y) dx dy.$

Т5 (Интерпретируемость непрерывных функций),

$f(x,y)$ непр. на отр. замкну. квадр. $P \Rightarrow$

$f(x,y)$ интер. на P .

Т5 (Интерпретируемость непрерывных функций),

$f(x, y)$ непр. на огр. замкну. квадр. $P \Rightarrow$

$f(x, y)$ интер. на P .

Д-во. $f(x, y)$ - равн. непр. на P , т.е. $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0$, $\forall K', K'' \in P: \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

Тогда $\forall T, \delta_T < \delta$ $S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i)$, $s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K_i')$, $m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K_i'')$, $K_i', K_i'' \in P_i$

$\rho(K_i', K_i'') \leq \text{diam } P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K_i') - f(K_i'') < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

$\cdot \mu(P_i)$, $\sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{N(P)} \mu(P_i) = \varepsilon$,

т.е. $f(x, y)$ интер. на P . \square Т. доказана.

Т5 (Интегрируемость непрерывных функций).

$f(x, y)$ непр. на отр. замкну. квадр. $P \Rightarrow$

$f(x, y)$ интегр. на P .

\mathcal{D} -во. $f(x, y)$ - равномер. непр. на P , т.е. $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0$: $\forall K', K'' \in P: \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

Тогда $\forall T, \delta_T < \delta$ $S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i)$, $s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K_i')$, $m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K_i'')$, $K_i', K_i'' \in P_i$

$\rho(K_i', K_i'') \leq \text{diam } P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K_i') - f(K_i'') < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

$\mu(P_i)$, $\sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{N(P)} \mu(P_i) = \varepsilon$,

т.е. $f(x, y)$ интегр. на P . \square Т. доказана.

Можно заметить, что если существует интегр. f -ю на некоторой лев. ве. тогек или кривых площади 0 , то получится интегр. f -ю с тем же интегралом.

Т5 (Интерпретируемость непрерывных функций),

$f(x,y)$ непр. на огр. замкну. квадр. $P \Rightarrow$

$f(x,y)$ интер. на P .

Д-во. $f(x,y)$ - равномерно непр. на P , т.е. $\forall \epsilon > 0$

$\exists \delta > 0: \forall K', K'' \in P: \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\epsilon}{N(P)}$

Тогда $\forall T, \delta_T < \delta$ $S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i)$, $s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K_i')$, $m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K_i'')$, $K_i', K_i'' \in P_i$

$\rho(K_i', K_i'') \leq \text{diam } P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K_i') - f(K_i'') < \frac{\epsilon}{N(P)}$

$\cdot \mu(P_i)$, $\sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\epsilon}{N(P)} \mu(P_i) = \epsilon$,

т.е. $f(x,y)$ интер. на P . Т. доказано.

Можно д-ть, что если изменить интер. ф-ю на конечном мен. ве точек или кривой площади O , то получится интерпр. ф-я с тем же интервалом.

Свойства двойного интеграла

(P - оград. замкну. квадрат. мен. во)

1. $f(x,y)$ интер. на $P \Rightarrow \forall c \in (-\infty, +\infty)$ $c f(x,y)$

интер. на P , причем

$$\iint_P c \cdot f(x,y) dx dy = c \iint_P f(x,y) dx dy.$$

Т5 (Интерпретируемость непрерывных функций),

$f(x, y)$ непр. на огр. замкну. квадр. $P \Rightarrow$

$f(x, y)$ интер. на P .

Д-во. $f(x, y)$ - равном. непр. на P , т.е. $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0, \forall K', K'' \in P: \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

Тогда $\forall T, \delta_T < \delta$ $S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i), s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K_i'), m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K_i''); K_i', K_i'' \in P_i$

$\rho(K_i', K_i'') \leq \text{diam } P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K_i') - f(K_i'') < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

$\cdot \mu(P_i), \sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{N(P)} \mu(P_i) = \varepsilon$,

т.е. $f(x, y)$ интер. на P . \square Т. доказана.

Можно д-ть, что если увеличить интер. ф-ю на конечной замк. веле толек или кривых площади O , то получится интерпр. ф-я с тем же интервалом.

Свойства двойного интеграла

(P - оград. замкну. квадр. зам. во)

1. $f(x, y)$ интер. на $P \Rightarrow \forall c \in (-\infty, +\infty)$ с.ф.о.у)

○ интер. на P , кривым

$$\iint_P c \cdot f(x, y) dx dy = c \iint_P f(x, y) dx dy.$$

Д-во. $\sigma_T(c \cdot f, K) = \sum_{i=1}^r c \cdot f(K_i) \mu(P_i) =$

$$= c \sum_{i=1}^r f(K_i) \mu(P_i) = c \cdot \sigma_T(f, K) \xrightarrow{(\delta_T \rightarrow 0)} c \cdot \iint_P f(x, y) dx dy$$

Т5 (Интерпретируемость непрерывных функций).

$f(x,y)$ непр. на огр. замкн. квадр. $P \Rightarrow$

$f(x,y)$ интер. на P .

D -во. $f(x,y)$ - равном. непр. на P , т.е. $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0: \forall K', K'' \in P: \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{M(P)}$

Тогда $\forall T, \delta_T < \delta$ $S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i)$, $s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K'_i)$, $m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K''_i)$; $K'_i, K''_i \in P_i$

$\rho(K'_i, K''_i) \leq \text{diam } P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K'_i) - f(K''_i) < \frac{\varepsilon}{M(P)}$

$\cdot \mu(P_i)$, $\sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{M(P)} \mu(P_i) = \varepsilon$,

т.е. $f(x,y)$ интер. на P . Т. доказана.

Можно заметить, что если существует интер. ф-я на конечном лн. ве тогек или кривых площади 0, то получится интерпр. ф-я с тем же интервалом.

Свойства двойного интеграла

(P - оград. замкн. квадр. лн. во)

1. $f(x,y)$ интер. на $P \Rightarrow \forall c \in (-\infty, +\infty)$ $c \cdot f(x,y)$

интер. на P , причем

$$\iint_P c \cdot f(x,y) dx dy = c \iint_P f(x,y) dx dy.$$

$$D\text{-во. } \sigma_T(c \cdot f, K) = \sum_{i=1}^r c \cdot f(K_i) \mu(P_i) = \\ = c \sum_{i=1}^r f(K_i) \mu(P_i) = c \cdot \sigma_T(f, K) \xrightarrow{(\delta_T \rightarrow 0)} c \cdot \iint_P f(x,y) dx dy$$

2. $f(x,y), g(x,y)$ интер. на $P \Rightarrow f(x,y) \pm g(x,y)$

- интер. на P , причем

$$\iint_P (f(x,y) \pm g(x,y)) dx dy = \iint_P f(x,y) dx dy \pm \iint_P g(x,y) dx dy$$

D -то сумма.

Св-во 1, 2 - линейность дв. инт-ла.

Т5 (Интерпретируемость непрерывных функций).

$f(x, y)$ непрерывна на отг. замкнутом квадрате $P \Rightarrow$

$f(x, y)$ непрерывна на P .

D -во. $f(x, y)$ - равномерна непрерывна на P , т.е. $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0$: $\forall K', K'' \in P$: $\rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

Тогда $\forall T, \delta_T < \delta$ $S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i)$, $s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K_i')$, $m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K_i'')$; $K_i', K_i'' \in P_i$

$\rho(K_i', K_i'') \leq \text{diam } P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K_i') - f(K_i'') < \frac{\varepsilon}{N(P)}$

$\cdot \mu(P_i)$, $\sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{N(P)} \mu(P_i) = \varepsilon$,

т.е. $f(x, y)$ интегрируема на P . \square Т. доказана.

Можно заметить, что если иметь непрерывную функцию на компактном мн.-ве точек или кривых площади 0, то получится интегрируемая функция с тем же интегралом.

Свойства двойного интеграла

(P - отг. замкнутый квадрат или о.во)

1. $f(x, y)$ интегрируема на $P \Rightarrow \forall c \in (-\infty, +\infty)$ $c \cdot f(x, y)$

интегрируема на P , причем

$$\iint_P c \cdot f(x, y) dx dy = c \iint_P f(x, y) dx dy.$$

$$D\text{-во. } \sigma_T(c f, K) = \sum_{i=1}^r c f(K_i) \mu(P_i) =$$

$$= c \sum_{i=1}^r f(K_i) \mu(P_i) = c \cdot \sigma_T(f, K) \xrightarrow{\delta_T \rightarrow 0} c \cdot \iint_P f(x, y) dx dy$$

2. $f(x, y), g(x, y)$ интегрируемы на $P \Rightarrow f(x, y) \pm g(x, y)$

- интегрируема на P , причем

$$\iint_P (f(x, y) \pm g(x, y)) dx dy = \iint_P f(x, y) dx dy \pm \iint_P g(x, y) dx dy$$

D -то сумма.

$c \in \mathbb{R}$ во 1, 2 - множитель дв. ин-ла.

3. $f(x, y), g(x, y)$ интегрируемы на $P \Rightarrow f(x, y) \cdot g(x, y)$ интегрируема на P .

Т5 (Интерпретируемость непрерывных функций).

$f(x,y)$ непр. на огр. замкн. квадр. $P \Rightarrow$

$f(x,y)$ интер. на P .

Д-во. $f(x,y)$ - равном. непр. на P , т.е. $\forall \epsilon > 0$

$\exists \delta > 0, \forall K', K'' \in P: \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\epsilon}{\mu(P)}$

Тогда $\forall T, \delta_T < \delta$ $S_T(f) = \sum_{i=1}^r M_i \mu(P_i), s_T(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K_i'), m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K_i''); K_i', K_i'' \in P_i$

$\rho(K_i', K_i'') \leq \text{diam } P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K_i') - f(K_i'') < \frac{\epsilon}{\mu(P)}$

$\cdot \mu(P_i), \sum_{i=1}^r \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^r \frac{\epsilon}{\mu(P)} \mu(P_i) = \epsilon$,

т.е. $f(x,y)$ интер. на P . Т. доказано.

Можно д-ть, что если иметь интер. ф-ю

на конечном лин. ве толк или кривых пло-

щади O , то получается интерпрет. ф-я с тем

же интервалом.

Свойства двойного интеграла

(P -огр. замкн. квадр. лин. во)

1. $f(x,y)$ интер. на $P \Rightarrow \forall c \in (-\infty, +\infty) c \cdot f(x,y)$

интер. на P , причем

$$\iint_P c \cdot f(x,y) dx dy = c \iint_P f(x,y) dx dy.$$

$$\text{Д-во. } \sigma_T(c f, K) = \sum_{i=1}^r c f(K_i) \mu(P_i) = c \sum_{i=1}^r f(K_i) \mu(P_i) = c \cdot \sigma_T(f, K) \xrightarrow{(\delta_T \rightarrow 0)} c \cdot \iint_P f(x,y) dx dy$$

2. $f(x,y), g(x,y)$ интер. на $P \Rightarrow f(x,y) \pm g(x,y)$

- интер. на P , причем

$$\iint_P (f(x,y) \pm g(x,y)) dx dy = \iint_P f(x,y) dx dy \pm \iint_P g(x,y) dx dy$$

Д-ть само.

СВ-во 1, 2 - линейность дв. инт-ла.

3. $f(x,y), g(x,y)$ интер. на $P \Rightarrow f(x,y) \cdot g(x,y)$ интер. на P .

Д-во. $|f(x,y)| \leq M^f, |g(x,y)| \leq M^g \forall (x,y) \in P, M^f > 0, M^g > 0$

$T = \{P_i\}_{i=1}^r, M_i^h = \sup_{K \in P_i} h(K), m_i^h = \inf_{K \in P_i} h(K) \quad h = f, g, f \cdot g$

$\forall \alpha > 0 \exists K_i', K_i'' \in P_i: f(K_i') \cdot g(K_i') > M_i^{fg} - \frac{\alpha}{2}, f(K_i'') \cdot g(K_i'') < m_i^{fg} + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$$0 \leq M_i^{fg} - m_i^{fg} < (f(K_i') \cdot g(K_i') + \frac{\alpha}{2}) - (f(K_i'') \cdot g(K_i'') - \frac{\alpha}{2}) = f(K_i') \cdot g(K_i') -$$

$$- f(K_i'') \cdot g(K_i'') + f(K_i') \cdot g(K_i'') - f(K_i'') \cdot g(K_i'') + \alpha = f(K_i') (g(K_i') - g(K_i'')) +$$

$$+ g(K_i'') (f(K_i') - f(K_i'')) + \alpha \leq M^f (M^g - m^g) + M^g (M^f - m^f) + \alpha \quad \forall \alpha > 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq M_i^{fg} - m_i^{fg} \leq M^f (M^g - m^g) + M^g (M^f - m^f)$$

$$\cdot \mu(P_i) \quad \vee \sum_{i=1}^r \Rightarrow$$

$$0 \leq S_T(fg) - s_T(fg) \leq M^f (S_T(g) - s_T(g)) + M^g (S_T(f) - s_T(f))$$

$$\xrightarrow{(\delta_T \rightarrow 0)} \rightarrow 0 \quad \xrightarrow{(\delta_T \rightarrow 0)} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(fg) - s_T(fg)) = 0, \text{ т.е.}$$

$f(x,y) \cdot g(x,y)$ интер. на P

4. $f(x, y)$ интегр. на D . $\Rightarrow \forall$ отр. замкн. квадр. $P_1 \subset D$ $f(x, y)$ интегр. на P_1 .

4. $f(x, y)$ непрерывна на D . \Rightarrow \forall открытой области $P_1 \subset D$ $f(x, y)$ непрерывна на P_1 .

До-во. T -разбиение P , τ -разбиение P_1 . $f(x, y)$ непрерывна на $D \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \quad 0 \leq S_T(f, P) - s_T(f, P) < \varepsilon$. Берём $\forall \tau : \delta_\tau < \delta$

$$\begin{aligned} \text{Возьмём } T : \delta_T < \delta \text{ и } T|_{P_1} = \tau. \Rightarrow 0 \leq \underbrace{S_\tau(f, P_1) - s_\tau(f, P_1)}_{\sum_{i=1}^{n_1} (M_i - m_i) \mu(P_i), n_1 \leq n} &\leq \\ \leq \underbrace{S_T(f, P) - s_T(f, P)}_{\sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \mu(P_i)} &< \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x, y)$ непрерывна на P_1

4. $f(x, y)$ непрерывна на P . $\Rightarrow \forall$ окр. замкну. квадр. $P_1 \subset P$ $f(x, y)$ непрерывна на P_1 .

2-во. T -разбиение P , τ -разбиение P_1 . $f(x, y)$ непрерывна на $P \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \quad 0 \leq S_T(f, P) - s_T(f, P) < \varepsilon$. Берём $\forall \tau : \delta_\tau < \delta$

Возьмём $T : \delta_T < \delta$ и $T|_{P_1} = \tau$. $\Rightarrow 0 \leq \underbrace{S_\tau(f, P_1) - s_\tau(f, P_1)}_{\sum_{i=1}^{r_1} (M_i - m_i) \mu(P_i)}, r_1 \leq r$

$$\leq \underbrace{S_T(f, P) - s_T(f, P)}_{\sum_{i=1}^r (M_i - m_i) \mu(P_i)} < \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^r (M_i - m_i) \mu(P_i)$$

$\Rightarrow f(x, y)$ непрерывна на P_1

5. (Сл-во аддитивности двойного интеграла, δ/∂). $f(x, y)$ непрерывна

на $P_1, P_2 : \mu(P_1 \cap P_2) = 0$. $\Rightarrow f(x, y)$ непрерывна на $P = P_1 \cup P_2$, поэтому

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \iint_{P_1} f(x, y) dx dy + \iint_{P_2} f(x, y) dx dy.$$