$f(x,y)$ - ограниченная на P - огран., замкн. мн-во; $\mu(\partial P) = 0$ (т.е. квадр.)

$T = \{P_i\}_{i=1}^{r}$ -разбиение P кривыми площади 0 на P_i, $\mu(P_i) > 0$

$$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K), \quad m_i = \inf_{K \in P_i} f(K)$$

$$S_T(f) \equiv \sum_{i=1}^{r} M_i \cdot \mu(P_i)$$ - верхняя сумма Дарбу

$$s_T(f) \equiv \sum_{i=1}^{r} m_i \cdot \mu(P_i)$$ - нижняя сумма Дарбу

$\forall K_i \in P_i \quad m_i \le f(K_i) \le M_i \quad \cdot \mu(P_i)$ и $\sum_{i=1}^{r}$

$$\Rightarrow \quad s_T(f) \le \sigma_T(f, \{K_i\}) \le S_T(f)$$

Опр. $T_2 > T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-в T_1 путём проведения дополнительных кривых площадь.

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-в T_1 путём проведения дополнительных кривых площади.

Л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$, $s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-в T_1 путём проведения дополнительных кривых площади

Л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \le S_{T_1}(f)$, $s_{T_2}(f) \ge s_{T_1}(f)$

Д-во Л1. Достаточно $P_k \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^{r}$ разбить на 2 мн-ва: $P_k = P_k' \cup P_k''$, $\mu(P_k' \cap P_k'') = 0$.

$M_k = \sup\limits_{K \in P_k} f(K)$, $M_k' = \sup\limits_{K \in P_k'} f(K) \le M_k$, $M_k'' = \sup\limits_{K \in P_k''} f(K) \le M_k$

$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_k \mu(P_k) - M_k' \mu(P_k') - M_k'' \mu(P_k'') =$

$= (\mu(P_k) = \mu(P_k') + \mu(P_k'')) = \underbrace{(M_k - M_k')}_{\ge 0} \mu(P_k') + \underbrace{(M_k - M_k'')}_{\ge 0} \mu(P_k'') \ge$

≥ 0. Анал. $s_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \ge 0$. Л доказана.

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-в T_1 путём проведения дополнительных кривых площади.

Л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \le S_{T_1}(f)$, $s_{T_2}(f) \ge s_{T_1}(f)$

Л2. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow s_{T_1}(f) \le S_{T_2}(f)$

Д-во Л1. Достаточно $P_k \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^{r}$ разбить на 2 мн-ва: $P_k = P_k' \cup P_k''$, $\mu(P_k' \cap P_k'') = 0$.

$M_k = \sup\limits_{K \in P_k} f(K)$, $M_k' = \sup\limits_{K \in P_k'} f(K) \le M_k$, $M_k'' = \sup\limits_{K \in P_k''} f(K) \le M_k$

$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_k \mu(P_k) - M_k' \mu(P_k') - M_k'' \mu(P_k'') =$

$= (\mu(P_k) = \mu(P_k') + \mu(P_k'')) = \underbrace{(M_k - M_k')}_{\ge 0} \mu(P_k') + \underbrace{(M_k - M_k'')}_{\ge 0} \mu(P_k'')$

≥ 0. Анал. $s_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \ge 0$. Л. доказана.

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-в T_1 путём проведения дополнительных кривых площади.

Л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$, $s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

Л2. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow s_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

Д-во Л1. Достаточно $P_k \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^{r}$, разбито на 2 мн-ва: $P_k = P_k' \cup P_k''$, $\mu(P_k' \cap P_k'') = 0$.

$M_k = \sup\limits_{K \in P_k} f(K)$, $M_k' = \sup\limits_{K \in P_k'} f(K) \leq M_k$, $M_k'' = \sup\limits_{K \in P_k''} f(K) \leq M_k$

$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_k \mu(P_k) - M_k' \mu(P_k') - M_k'' \mu(P_k'') =$

$= (\mu(P_k) = \mu(P_k') + \mu(P_k'')) = \underbrace{(M_k - M_k')}_{\geq 0} \mu(P_k') + \underbrace{(M_k - M_k'')}_{\geq 0} \mu(P_k'') \geq$

≥ 0. Анал. $s_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \geq 0$. Л. доказана.

Д-во Л2. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1$, $T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$s_{T_1}(f) \leq s_{T_3}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_2}(f)$. Л. д-зана.

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-в T_1 путём проведения дополнительных кривых площади.

Л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f)$, $s_{T_2}(f) \geq s_{T_1}(f)$

Л2. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow s_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

Л3. $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \mathbb{K}^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r$, $\exists \mathbb{K}^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r$, $K_i^{(j)} \in P_i$, $i = 1, \dots, r$; $j = 1, 2$:

$$0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(1)}) < \varepsilon$$

$$0 \leq \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(2)}) - s_T(f) < \varepsilon$$

Д-во Л1. Достаточно $P_k \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$ разбить на 2 мн-ва: $P_k = P_k' \cup P_k''$, $\mu(P_k' \cap P_k'') = 0$.

$M_k = \sup\limits_{K \in P_k} f(K)$, $M_k' = \sup\limits_{K \in P_k'} f(K) \leq M_k$, $M_k'' = \sup\limits_{K \in P_k''} f(K) \leq M_k$

$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_k \mu(P_k) - M_k' \mu(P_k') - M_k'' \mu(P_k'') =$
$= (\mu(P_k) = \mu(P_k') + \mu(P_k'')) = \underbrace{(M_k - M_k')}_{\geq 0} \mu(P_k') + \underbrace{(M_k - M_k'')}_{\geq 0} \mu(P_k'') \geq 0$. Анал. $s_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \geq 0$. Л. Доказана.

Д-во Л2. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1$, $T_3 \succ T_2 \Rightarrow$
$s_{T_1}(f) \leq s_{T_3}(f) \leq S_{T_3}(f) \leq S_{T_2}(f)$. Л. Д-зана.

<u>Опр.</u> $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-в T_1 путём проведения дополнительных кривых площади.

<u>Л1.</u> $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \le S_{T_1}(f)$, $s_{T_2}(f) \ge s_{T_1}(f)$

<u>Л2.</u> $\forall T_1, T_2 \Rightarrow s_{T_1}(f) \le S_{T_2}(f)$

<u>Л3.</u> $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^{r}$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \mathbb{K}^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^{r}$, $\exists \mathbb{K}^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^{r}$, $K_i^{(j)} \in P_i$, $i = 1, \dots, r$; $j = 1, 2$:

$$0 \le S_T(f) - \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(1)}) < \varepsilon$$

$$0 \le \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(2)}) - s_T(f) < \varepsilon.$$

Д-во Л1. Достаточно $P_k \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^{r}$ разбить на 2 мн-ва: $P_k = P_k' \cup P_k''$, $\mu(P_k' \cap P_k'') = 0$.

$M_k = \sup\limits_{K \in P_k} f(K)$, $M_k' = \sup\limits_{K \in P_k'} f(K) \le M_k$, $M_k'' = \sup\limits_{K \in P_k''} f(K) \le M_k$

$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_k \mu(P_k) - M_k' \mu(P_k') - M_k'' \mu(P_k'') =$

$= (\mu(P_k) = \mu(P_k') + \mu(P_k'')) = \underbrace{(M_k - M_k')}_{\ge 0} \mu(P_k') + \underbrace{(M_k - M_k'')}_{\ge 0} \mu(P_k'')$

≥ 0. Анал. $s_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \ge 0$. Л. доказана.

Д-во Л2. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1$, $T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$s_{T_1}(f) \le s_{T_3}(f) \le S_{T_3}(f) \le S_{T_2}(f)$. Л. д-зана.

Д-во Л3. $\forall \varepsilon > 0$ по опред. <u>точных</u> граней $\exists K_i^{(1)} \in P_i$, $\exists K_i^{(2)} \in P_i$:

$$0 \le M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}, \quad 0 \le f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$\cdot \mu(P_i)$ и $\sum\limits_{i=1}^{r}$. Лемма доказана.

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-в T_1 путём проведения дополнительных кривых площади

Л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \le S_{T_1}(f),\ s_{T_2}(f) \ge s_{T_1}(f)$

Л2. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow s_{T_1}(f) \le S_{T_2}(f)$

Л3. $\forall T=\{P_i\}_{i=1}^{r}\ \forall \varepsilon>0\ \exists \mathbb{K}^{(1)}=\{K_i^{(1)}\}_{i=1}^{r},$

$\exists\ \mathbb{K}^{(2)}=\{K_i^{(2)}\}_{i=1}^{r},\ K_i^{(j)}\in P_i,\ i=1,\dots,r;\ j=1,2:$

$$0\le S_T(f)-\sigma_T(f,\mathbb{K}^{(1)})<\varepsilon$$

$$0\le \sigma_T(f,\mathbb{K}^{(2)})-s_T(f)<\varepsilon.$$

Введём $\underline{I} \equiv \sup\limits_{T} s_T(f)$ – нижний интеграл Дарбу

$\overline{I} \equiv \inf\limits_{T} S_T(f)$ – верхний —,—,—

Ясно, что $s_{T_1}(f)\le \underline{I}\le \overline{I}\le S_{T_2}(f)\ \forall T_1, T_2$

Д-во Л1. Достаточно $P_k\in T_1=\{P_i\}_{i=1}^{r}$ разбить на 2 мн-ва: $P_k=P_k'\cup P_k''$, $\mu(P_k'\cap P_k'')=0$.

$M_k=\sup\limits_{K\in P_k} f(K)$, $M_k'=\sup\limits_{K\in P_k'} f(K)\le M_k$, $M_k''=\sup\limits_{K\in P_k''} f(K)\le M_k$

$\Rightarrow S_{T_1}(f)-S_{T_2}(f)=M_k\mu(P_k)-M_k'\mu(P_k')-M_k''\mu(P_k'')=$

$=(\mu(P_k)=\mu(P_k')+\mu(P_k''))=\underbrace{(M_k-M_k')}_{\ge 0}\mu(P_k')+\underbrace{(M_k-M_k'')}_{\ge 0}\mu(P_k'')$

≥ 0. Анал. $s_{T_2}(f)-s_{T_1}(f)\ge 0$. Л. доказана.

Д-во Л2. $T_3=T_1\cup T_2 \Rightarrow T_3\succ T_1,\ T_3\succ T_2 \Rightarrow$

$s_{T_1}(f)\le s_{T_3}(f)\le S_{T_3}(f)\le S_{T_2}(f)$. Л. д-зана.

Д-во Л3. $\forall\varepsilon>0$ по опред. точных граней $\exists K_i^{(1)}\in P_i$,

$\exists K_i^{(2)}\in P_i:\quad 0\le M_i-f(K_i^{(1)})<\frac{\varepsilon}{\mu(P)}$

$\qquad 0\le f(K_i^{(2)})-m_i<\frac{\varepsilon}{\mu(P)} \qquad i=1,2,\dots,r$

$\cdot\,\mu(P_i)$ и $\sum\limits_{i=1}^{r}$. Лемма доказана.

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-в T_1 путём проведения дополнительных кривых площади.

Л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \le S_{T_1}(f)$, $s_{T_2}(f) \ge s_{T_1}(f)$

Л2. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow s_{T_1}(f) \le S_{T_2}(f)$

Л3. $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^{r}$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \mathbb{K}^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^{r}$, $\exists \mathbb{K}^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^{r}$, $K_i^{(j)} \in P_i$, $i = 1, \dots, r;\ j = 1, 2$:

$$0 \le S_T(f) - \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(1)}) < \varepsilon$$

$$0 \le \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(2)}) - s_T(f) < \varepsilon.$$

Введём $\underline{I} \equiv \sup\limits_T s_T(f)$ – нижний интеграл Дарбу

$\overline{I} \equiv \inf\limits_T S_T(f)$ – верхний —, —, —

Ясно, что $s_{T_1}(f) \le \underline{I} \le \overline{I} \le S_{T_2}(f)$ $\forall T_1, T_2$

Т4. (Критерий интегрируемости). $f(x,y)$ – огр. ф-я на огр. замкн. квадр. P интегр. на P $\Leftrightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f) - s_T(f)) = 0$

Д-во Л1. Достаточно $P_k \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^{r}$ разбито на 2 мн-ва: $P_k = P_k' \cup P_k''$, $\mu(P_k' \cap P_k'') = 0$.

$M_k = \sup\limits_{K \in P_k} f(K)$, $M_k' = \sup\limits_{K \in P_k'} f(K) \le M_k$, $M_k'' = \sup\limits_{K \in P_k''} f(K) \le M_k$

$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_k \mu(P_k) - M_k' \mu(P_k') - M_k'' \mu(P_k'') =$

$= (\mu(P_k) = \mu(P_k') + \mu(P_k'')) = \underbrace{(M_k - M_k')}_{\ge 0} \mu(P_k') + \underbrace{(M_k - M_k'')}_{\ge 0} \mu(P_k'') \ge 0$. Анал. $s_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \ge 0$. Л. доказана.

Д-во Л2. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1,\ T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$s_{T_1}(f) \le s_{T_3}(f) \le S_{T_3}(f) \le S_{T_2}(f)$. Л. д-зана.

Д-во Л3. $\forall \varepsilon > 0$ по опред. точных граней $\exists K_i^{(1)} \in P_i$, $\exists K_i^{(2)} \in P_i$:

$$0 \le M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}, \quad 0 \le f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$\cdot\, \mu(P_i)$ и $\sum\limits_{i=1}^{r}$. Лемма доказана.

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-в T_1 путём проведения дополнительных кривых площади.

Л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \le S_{T_1}(f)$, $s_{T_2}(f) \ge s_{T_1}(f)$

Л2. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow s_{T_1}(f) \le S_{T_2}(f)$

Л3. $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \mathbb{K}^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r$, $\exists \mathbb{K}^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r$, $K_i^{(j)} \in P_i$, $i = 1,\dots,r$; $j = 1,2$:

$$0 \le S_T(f) - \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(1)}) < \varepsilon$$

$$0 \le \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(2)}) - s_T(f) < \varepsilon.$$

Введём $\underline{I} \equiv \sup\limits_T s_T(f)$ – нижний интеграл Дарбу

$\overline{I} \equiv \inf\limits_T S_T(f)$ – верхний — , — , —

Ясно, что $s_{T_1}(f) \le \underline{I} \le \overline{I} \le S_{T_2}(f)$ $\forall T_1, T_2$

Т4. (Критерий интегрируемости). $f(x,y)$ – огр. ф-я на огр. замкн. квадр P интегр. на $P \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f) - s_T(f)) = 0$

Д-во Л1. Достаточно $P_k \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$ разбить на 2 мн-ва: $P_k = P_k' \cup P_k''$, $\mu(P_k' \cap P_k'') = 0$.

$M_k = \sup\limits_{K \in P_k} f(K)$, $M_k' = \sup\limits_{K \in P_k'} f(K) \le M_k$, $M_k'' = \sup\limits_{K \in P_k''} f(K) \le M_k$

$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_k \mu(P_k) - M_k' \mu(P_k') - M_k'' \mu(P_k'') =$

$= (\mu(P_k) = \mu(P_k') + \mu(P_k'')) = \underbrace{(M_k - M_k')}_{\ge 0} \mu(P_k') + \underbrace{(M_k - M_k'')}_{\ge 0} \mu(P_k'') \ge 0$. Анал. $s_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \ge 0$. Л. доказана.

Д-во Л2. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1$, $T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$s_{T_1}(f) \le s_{T_3}(f) \le S_{T_3}(f) \le S_{T_2}(f)$. Л. д-зана.

Д-во Л3. $\forall \varepsilon > 0$ по опред. точных граней $\exists K_i^{(1)} \in P_i$, $\exists K_i^{(2)} \in P_i$:

$$0 \le M_i - f(K_i^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$$
$$0 \le f(K_i^{(2)}) - m_i < \frac{\varepsilon}{\mu(P)} \qquad i = 1,2,\dots,r$$

$\cdot \mu(P_i)$ и $\sum\limits_{i=1}^r$. Лемма доказана.

Д-во Т4. $\Rightarrow$. $f(x,y)$ интегр. на P. $I = \iint\limits_P f(x,y)\,dx\,dy$

$\underline{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta\ \forall \mathbb{K} = \{K_i\}_{i=1}^r,}$

$|\sigma_T(f, \mathbb{K}) - I| < \frac{\varepsilon}{4}$, $I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma_T(f, \mathbb{K}) < I + \frac{\varepsilon}{4}$

Но (Л3) $\forall \varepsilon > 0$ $\forall T$ $\exists \mathbb{K}^{(1)}$, $\exists \mathbb{K}^{(2)}$:

$$0 \le S_T(f) - \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{4}$$
$$0 \le \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(2)}) - s_T(f) < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow$$

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(2)}) - \frac{\varepsilon}{4} < s_T(f) \le S_T(f) < \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(1)}) + \frac{\varepsilon}{4} < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

т.е. $\underline{0 \le S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon}$, т.е. $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f) - s_T(f)) = 0$

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-в T_1 путём проведения дополнительных кривых площади 0.

Л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \le S_{T_1}(f)$, $s_{T_2}(f) \ge s_{T_1}(f)$

Л2. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow s_{T_1}(f) \le S_{T_2}(f)$

Л3. $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \mathbb{K}^{(1)} = \{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r$, $\exists \mathbb{K}^{(2)} = \{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r$, $K_i^{(j)} \in P_i$, $i = 1, \dots, r$; $j = 1, 2$:

$$0 \le S_T(f) - \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(1)}) < \varepsilon$$

$$0 \le \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(2)}) - s_T(f) < \varepsilon.$$

Введём $\underline{I} \equiv \sup\limits_T s_T(f)$ – нижний интеграл Дарбу

$\overline{I} \equiv \inf\limits_T S_T(f)$ – верхний — , — , —

Ясно, что $s_{T_1}(f) \le \underline{I} \le \overline{I} \le S_{T_2}(f)$ $\forall T_1, T_2$

Т4. (Критерий интегрируемости). $f(x,y)$ – огр. ф-я на огр. замкн. квадр P интегр. на $P \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f) - s_T(f)) = 0$

$\Leftarrow$. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta$ $\quad 0 \le S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

$s_T(f) \le \underline{I} \le \overline{I} \le S_T(f) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $0 \le \overline{I} - \underline{I} \le S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

$\Rightarrow \overline{I} - \underline{I} = 0$. Обозначим $I = \underline{I} = \overline{I}$. $s_T(f) \le I \le S_T(f)$

Но $\forall \mathbb{K} = \{K_i\}_{i=1}^r \Rightarrow \quad s_T(f) \le \sigma_T(f, \mathbb{K}) \le S_T(f)$

$\Rightarrow |\sigma_T(f, \mathbb{K}) - I| \le S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$, т.е. $f(x,y)$ – интегр.

Т. доказана.

Д-во Л1. Достаточно $P_k \in T_1 = \{P_i\}_{i=1}^r$ разбито на 2 мн-ва: $P_k = P_k' \cup P_k''$, $\mu(P_k' \cap P_k'') = 0$.

$M_k = \sup\limits_{K \in P_k} f(K)$, $M_k' = \sup\limits_{K \in P_k'} f(K) \le M_k$, $M_k'' = \sup\limits_{K \in P_k''} f(K) \le M_k$

$\Rightarrow S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f) = M_k \mu(P_k) - M_k' \mu(P_k') - M_k'' \mu(P_k'') =$

$= (\mu(P_k) = \mu(P_k') + \mu(P_k'')) = \underbrace{(M_k - M_k')}_{\ge 0}\mu(P_k') + \underbrace{(M_k - M_k'')}_{\ge 0}\mu(P_k'') \ge$

≥ 0. Анал. $s_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) \ge 0$. Л. доказана.

Д-во Л2. $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T_3 \succ T_1$, $T_3 \succ T_2 \Rightarrow$

$s_{T_1}(f) \le s_{T_3}(f) \le S_{T_3}(f) \le S_{T_2}(f)$. Л. д-зана.

Д-во Л3. $\forall \varepsilon > 0$ по опред. точных граней $\exists K_i^{(1)} \in P_i$, $\exists K_i^{(2)} \in P_i$: $\quad 0 \le M_i - f(K_i^{(1)}) < \dfrac{\varepsilon}{\mu(P)}$

$0 \le f(K_i^{(2)}) - m_i < \dfrac{\varepsilon}{\mu(P)} \quad i = 1, 2, \dots, r$

$\cdot \mu(P_i)$ и $\sum\limits_{i=1}^r$. Лемма доказана.

Д-во Т4. $\Rightarrow$. $f(x,y)$ интегр. на P. $I = \iint\limits_P f(x,y)\,dx\,dy$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta$ $\forall \mathbb{K} = \{K_i\}_{i=1}^r$

$|\sigma_T(f, \mathbb{K}) - I| < \frac{\varepsilon}{4}$, $I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma_T(f, \mathbb{K}) < I + \frac{\varepsilon}{4}$

Но (Л3) $\forall \varepsilon > 0$ $\forall T$ $\exists \mathbb{K}^{(1)}$, $\exists \mathbb{K}^{(2)}$:

$$0 \le S_T(f) - \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{4} \quad \Rightarrow$$

$$0 \le \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(2)}) - s_T(f) < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(2)}) - \frac{\varepsilon}{4} < s_T(f) \le S_T(f) < \sigma_T(f, \mathbb{K}^{(1)}) + \frac{\varepsilon}{4} < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

т.е. $0 \le S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f) - s_T(f)) = 0$

Опр. $T_2 \succ T_1$, если мн-ва T_2 получены из мн-в T_1 путём проведения дополнительных кривых площади 0.

Л1. $T_2 \succ T_1 \Rightarrow S_{T_2}(f) \le S_{T_1}(f),\ s_{T_2}(f) \ge s_{T_1}(f)$

Л2. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow s_{T_1}(f) \le S_{T_2}(f)$

Л3. $\forall T=\{P_i\}_{i=1}^r,\ \forall\varepsilon>0\ \exists \mathbb{K}^{(1)}=\{K_i^{(1)}\}_{i=1}^r$,
$\exists \mathbb{K}^{(2)}=\{K_i^{(2)}\}_{i=1}^r,\ K_i^{(j)}\in P_i,\ i=1,\dots,r;\ j=1,2$:

$$0\le S_T(f)-\sigma_T(f,\mathbb{K}^{(1)})<\varepsilon$$
$$0\le \sigma_T(f,\mathbb{K}^{(2)})-s_T(f)<\varepsilon.$$

Введём $\underline{I}\equiv\sup_T s_T(f)$ — нижний интеграл Дарбу

$\overline{I}\equiv\inf_T S_T(f)$ — верхний —, —

Ясно, что $s_{T_1}(f)\le \underline I\le\overline I\le S_{T_2}(f)\ \forall T_1,T_2$

Т4. (Критерий интегрируемости). $f(x,y)$ — огр. ф-я на огр. замкн. квадр P интегр. на $P \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta_T\to0}(S_T(f)-s_T(f))=0$

$\Leftarrow$. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall T,\delta_T<\delta\quad 0\le S_T(f)-s_T(f)<\varepsilon$

$s_T(f)\le\underline I\le\overline I\le S_T(f)\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ 0\le\overline I-\underline I\le S_T(f)-s_T(f)<\varepsilon$,

$\Rightarrow \overline I-\underline I=0$. Обозначим $I=\underline I=\overline I$. $s_T(f)\le I\le S_T(f)$

Но $\forall \mathbb K=\{K_i\}_{i=1}^r \Rightarrow \quad s_T(f)\le\sigma_T(f,\mathbb K)\le S_T(f)$

$\Rightarrow |\sigma_T(f,\mathbb K)-I|\le S_T(f)-s_T(f)<\varepsilon$, т.е. $f(x,y)$ — интегр.
Т. доказана.

Сл. $f(x,y)$ огр. ф-я на огр. замкн. квадр. P интегр.
$\Rightarrow \lim\limits_{\delta_T\to0} S_T(f)=\lim\limits_{\delta_T\to0} s_T(f)=I=\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy.$

Д-во Л1. Достаточно $P_k\in T_1=\{P_i\}_{i=1}^r$ разбито на 2 мн-ва: $P_k=P_k'\cup P_k''$, $\mu(P_k'\cap P_k'')=0$.

$M_k=\sup\limits_{K\in P_k} f(K)$, $M_k'=\sup\limits_{K\in P_k'} f(K)\le M_k$, $M_k''=\sup\limits_{K\in P_k''}f(K)\le M_k$

$\Rightarrow S_{T_1}(f)-S_{T_2}(f)=M_k\mu(P_k)-M_k'\mu(P_k')-M_k''\mu(P_k'')=$

$=(\mu(P_k)=\mu(P_k')+\mu(P_k''))=\underbrace{(M_k-M_k')}_{\ge0}\mu(P_k')+\underbrace{(M_k-M_k'')}_{\ge0}\mu(P_k'')$
≥0. Анал. $s_{T_2}(f)-s_{T_1}(f)\ge0$. Л. доказана.

Д-во Л2. $T_3=T_1\cup T_2\Rightarrow T_3\succ T_1,\ T_3\succ T_2\Rightarrow$

$s_{T_1}(f)\le s_{T_3}(f)\le S_{T_3}(f)\le S_{T_2}(f)$. Л. д-зана.

Д-во Л3. $\forall\varepsilon>0$ по опред. точных граней $\exists K_i^{(1)}\in P_i$,
$\exists K_i^{(2)}\in P_i$: $\quad 0\le M_i-f(K_i^{(1)})<\frac{\varepsilon}{\mu(P)}$
$\quad 0\le f(K_i^{(2)})-m_i<\frac{\varepsilon}{\mu(P)}$ $\quad i=1,2,\dots,r$

$\cdot\,\mu(P_i)$ и $\sum\limits_{i=1}^r$. Лемма доказана.

Д-во Т4. $\Rightarrow$. $f(x,y)$ интегр. на P. $I=\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall T,\delta_T<\delta\ \ \forall\mathbb K=\{K_i\}_{i=1}^r$

$|\sigma_T(f,\mathbb K)-I|<\frac\varepsilon4$, $I-\frac\varepsilon4<\sigma_T(f,\mathbb K)<I+\frac\varepsilon4$

Но (л3) $\forall\varepsilon>0\ \forall T\ \exists\mathbb K^{(1)},\ \exists\mathbb K^{(2)}$:

$$0\le S_T(f)-\sigma_T(f,\mathbb K^{(1)})<\frac\varepsilon4 \Rightarrow$$
$$0\le\sigma_T(f,\mathbb K^{(2)})-s_T(f)<\frac\varepsilon4$$

$I-\frac\varepsilon2<\sigma_T(f,\mathbb K^{(2)})-\frac\varepsilon4<s_T(f)\le S_T(f)<\sigma_T(f,\mathbb K^{(1)})+\frac\varepsilon4<I+\frac\varepsilon2$,

т.е. $0\le S_T(f)-s_T(f)<\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{\delta_T\to0}(S_T(f)-s_T(f))=0$

Д-тб самостоятельно.

Т5 (Интегрируемость непрерывных функций).

$f(x,y)$ непр. на огр. замкн. квадр. P $\Rightarrow$

$f(x,y)$ интегр. на P.

T5 (Интегрируемость непрерывных функций).

$f(x,y)$ непр. на огр. замкн. квадр. $P \Rightarrow$

$f(x,y)$ интегр. на P.

Д-во. $f(x,y)$ - равном. непр. на P, т.е. $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0$: $\forall K', K'' \in P : \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$

Тогда $\forall T, \delta_T < \delta$ $S_T(f) = \sum\limits_{i=1}^{r} M_i \mu(P_i)$, $s_T(f) = \sum\limits_{i=1}^{r} m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup\limits_{K \in P_i} f(K) = f(K_i')$, $m_i = \inf\limits_{K \in P_i} f(K) = f(K_i'')$; $K_i', K_i'' \in P_i$

$\rho(K_i', K_i'') \leq \operatorname{diam} P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K_i') - f(K_i'') < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$

$\cdot \mu(P_i)$, $\sum\limits_{i=1}^{r}$ $\Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum\limits_{i=1}^{r} \frac{\varepsilon}{\mu(P)} \mu(P_i) = \varepsilon$,

т.е. $f(x,y)$ интегр. на P. Т. доказана.

Т5 (Интегрируемость непрерывных функций).

$f(x,y)$ непр. на огр. замкн. квадр. P $\Rightarrow$

$f(x,y)$ интегр. на P.

Д-во. $f(x,y)$ - равном. непр. на P, т.е. $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0 : \forall K', K'' \in P : \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$

Тогда $\forall T, \delta_T < \delta$ $S_T(f) = \sum_{i=1}^{r} M_i \mu(P_i)$, $s_T(f) = \sum_{i=1}^{r} m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K_i')$, $m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K_i'')$; $K_i', K_i'' \in P_i$

$\rho(K_i', K_i'') \leq \operatorname{diam} P_i \leq \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq f(K_i') - f(K_i'') < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$

$\cdot \mu(P_i)$, $\sum_{i=1}^{r}$ $\Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^{r} \frac{\varepsilon}{\mu(P)} \mu(P_i) = \varepsilon$,

т.е. $f(x,y)$ интегр. на P. Т. доказана.

Можно д-ть, что если изменить интегр. ф-ю на конечном мн-ве точек или кривых площади 0, то получится интегрир. ф-я с тем же интегралом.

T5 (Интегрируемость непрерывных функций).

$f(x,y)$ непр. на огр. замкн. квадр. $P \Rightarrow$

$f(x,y)$ интегр. на P.

Д-во. $f(x,y)$ - равном. непр. на P, т.е. $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0 : \forall K', K'' \in P : \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$

Тогда $\forall T, \delta_T < \delta$ $S_T(f) = \sum_{i=1}^{r} M_i \mu(P_i)$, $s_T(f) = \sum_{i=1}^{r} m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K_i')$, $m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K_i'')$; $K_i', K_i'' \in P_i$

$\rho(K_i', K_i'') \le \operatorname{diam} P_i \le \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \le f(K_i') - f(K_i'') < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$

$\cdot \mu(P_i), \sum_{i=1}^{r} \Rightarrow 0 \le S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^{r} \frac{\varepsilon}{\mu(P)} \mu(P_i) = \varepsilon$,

т.е. $f(x,y)$ интегр. на P. Т. доказана.

Можно д-ть, что если изменить интегр. ф-ю на конечном мн-ве точек или кривых площади 0, то получится интегрир. ф-я с тем же интегралом.

Свойства двойного интеграла

(P - огран. замкн. квадр. мн-во)

1. $f(x,y)$ интегр. на $P \Rightarrow \forall c \in (-\infty, +\infty)$ $c f(x,y)$ интегр. на P, причём

$$\iint_P c \cdot f(x,y)\,dx\,dy = c \iint_P f(x,y)\,dx\,dy.$$

T5 (Интегрируемость непрерывных функций). $f(x,y)$ непр. на огр. замкн. квадр. $P \Rightarrow$ $f(x,y)$ интегр. на P.

Д-во. $f(x,y)$ - равном. непр. на P, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall K', K'' \in P : \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$

Тогда $\forall T, \delta_T < \delta$ $S_T(f) = \sum_{i=1}^{r} M_i \mu(P_i)$, $s_T(f) = \sum_{i=1}^{r} m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K_i')$, $m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K_i'')$; $K_i', K_i'' \in P_i$

$\rho(K_i', K_i'') \le \operatorname{diam} P_i \le \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \le f(K_i') - f(K_i'') < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$ $\cdot \mu(P_i)$, $\sum_{i=1}^{r}$ $\Rightarrow 0 \le S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^{r} \frac{\varepsilon}{\mu(P)} \mu(P_i) = \varepsilon$,

т.е. $f(x,y)$ интегр. на P. Т. доказана.

Можно д-ть, что если изменять интегр. ф-ю на конечном мн-ве точек или кривых площади 0, то получится интегрир. ф-я с тем же интегралом.

Свойства двойного интеграла

(P - огран. замкн. квадр. мн-во)

1. $f(x,y)$ интегр. на $P \Rightarrow \forall c \in (-\infty, +\infty)$ $c \cdot f(x,y)$ интегр. на P, причём

$$\iint_P c \cdot f(x,y)\,dxdy = c \iint_P f(x,y)\,dxdy.$$

Д-во. $\sigma_T(cf, \mathbb{K}) = \sum_{i=1}^{r} cf(K_i)\mu(P_i) = c \sum_{i=1}^{r} f(K_i)\mu(P_i) = c \cdot \sigma_T(f, \mathbb{K}) \xrightarrow[(\delta_T \to 0)]{} c \cdot \iint_P f(x,y)\,dxdy$

T5 (Интегрируемость непрерывных функций).
$f(x,y)$ непр. на огр. замкн. квадр. $P \Rightarrow$
$f(x,y)$ интегр. на P.

Д-во. $f(x,y)$ - равном. непр. на P, т.е. $\forall \varepsilon > 0$
$\exists \delta > 0 : \forall K', K'' \in P : \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$

Тогда $\forall T, \delta_T < \delta$ $S_T(f) = \sum_{i=1}^{r} M_i \mu(P_i)$, $s_T(f) = \sum_{i=1}^{r} m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K_i')$, $m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K_i'')$; $K_i', K_i'' \in P_i$

$\rho(K_i', K_i'') \le \operatorname{diam} P_i \le \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \le f(K_i') - f(K_i'') < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$

$\cdot \mu(P_i)$, $\sum_{i=1}^{r} \Rightarrow 0 \le S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^{r} \frac{\varepsilon}{\mu(P)} \mu(P_i) = \varepsilon$,

т.е. $f(x,y)$ интегр. на P. Т. доказана.

Можно д-ть, что если изменить интегр. ф-ю на конечном мн-ве точек или кривых площади 0, то получится интегрир. ф-я с тем же интегралом.

Свойства двойного интеграла

(P - огран. замкн. квадр. мн-во)

1. $f(x,y)$ интегр. на $P \Rightarrow \forall c \in (-\infty, +\infty)$ $c \cdot f(x,y)$ интегр. на P, причём

$$\iint_P c \cdot f(x,y)\,dxdy = c \iint_P f(x,y)\,dxdy.$$

Д-во. $\sigma_T(cf, \mathbb{K}) = \sum_{i=1}^{r} c f(K_i) \mu(P_i) =$
$= c \sum_{i=1}^{r} f(K_i) \mu(P_i) = c \cdot \sigma_T(f, \mathbb{K}) \xrightarrow[(\delta_T \to 0)]{} c \cdot \iint_P f(x,y)\,dxdy$

2. $f(x,y), g(x,y)$ интегр. на $P \Rightarrow f(x,y) \pm g(x,y)$ - интегр. на P, причём

$$\iint_P (f(x,y) \pm g(x,y))\,dxdy = \iint_P f(x,y)\,dxdy \pm \iint_P g(x,y)\,dxdy$$

Д-ть самост.

Св-ва 1, 2 - линейность дв. инт-ла.

T5 (Интегрируемость непрерывных функций). $f(x,y)$ непр. на огр. замкн. квадр. $P \Rightarrow$ $f(x,y)$ интегр. на P.

Д-во. $f(x,y)$ - равном. непр. на P, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0: \forall K', K'' \in P: \rho(K', K'') < \delta \Rightarrow |f(K') - f(K'')| < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$

Тогда $\forall T, \delta_T < \delta$ $S_T(f) = \sum_{i=1}^{r} M_i \mu(P_i)$, $s_T(f) = \sum_{i=1}^{r} m_i \mu(P_i)$

$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K) = f(K_i')$, $m_i = \inf_{K \in P_i} f(K) = f(K_i'')$; $K_i', K_i'' \in P_i$

$\rho(K_i', K_i'') \le \operatorname{diam} P_i \le \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \le f(K_i') - f(K_i'') < \frac{\varepsilon}{\mu(P)}$

$\cdot \mu(P_i)$, $\sum_{i=1}^{r} \Rightarrow 0 \le S_T(f) - s_T(f) < \sum_{i=1}^{r} \frac{\varepsilon}{\mu(P)} \mu(P_i) = \varepsilon$,

т.е. $f(x,y)$ интегр. на P. Т. доказана.

Можно д-ть, что если изменить инт-гр. ф-ю на конечном мн-ве точек или кривых площади 0, то получится интегрир. ф-я с тем же интегралом.

Свойства двойного интеграла

(P - огран. замкн. квадр. мн-во)

1. $f(x,y)$ интегр. на $P \Rightarrow \forall c \in (-\infty, +\infty)$ $c \cdot f(x,y)$ интегр. на P, причём

$$\iint_P c \cdot f(x,y)\,dxdy = c \iint_P f(x,y)\,dxdy.$$

Д-во. $\sigma_T(cf, \mathbb{K}) = \sum_{i=1}^{r} cf(K_i)\mu(P_i) = c\sum_{i=1}^{r} f(K_i)\mu(P_i) = c \cdot \sigma_T(f, \mathbb{K}) \xrightarrow[(\delta_T \to 0)]{} c \iint_P f(x,y)\,dxdy$

2. $f(x,y), g(x,y)$ интегр. на $P \Rightarrow f(x,y) \pm g(x,y)$ - интегр. на P, причём

$$\iint_P (f(x,y) \pm g(x,y))\,dxdy = \iint_P f(x,y)\,dxdy \pm \iint_P g(x,y)\,dxdy$$

Д-ть самост.

Св-ва 1,2 - линейность дв. инт-ла.

3. $f(x,y), g(x,y)$ интегр. на $P \Rightarrow f(x,y) \cdot g(x,y)$ интегр. на P.

Т5 (Интегрируемость непрерывных функций).
$f(x,y)$ непр. на огр. замкн. квадр. $P \Rightarrow$
$f(x,y)$ интегр. на P.

Д-во. $f(x,y)$ - равном. непр. на P, т.е. $\forall \varepsilon>0$
$\exists \delta>0: \forall K', K''\in P: \rho(K',K'')<\delta \Rightarrow |f(K')-f(K'')|<\frac{\varepsilon}{\mu(P)}$

Тогда $\forall T, \delta_T<\delta$ $\quad S_T(f)=\sum_{i=1}^{r} M_i\,\mu(P_i)$, $s_T(f)=\sum_{i=1}^{r} m_i\,\mu(P_i)$

$M_i=\sup_{K\in P_i} f(K)=f(K_i')$, $m_i=\inf_{K\in P_i} f(K)=f(K_i'')$; $K_i', K_i''\in P_i$

$\rho(K_i',K_i'')\le \operatorname{diam} P_i\le \delta_T<\delta \Rightarrow 0\le f(K_i')-f(K_i'')<\frac{\varepsilon}{\mu(P)}$

$\cdot\mu(P_i)$, $\sum_{i=1}^{r} \Rightarrow \underline{0\le S_T(f)-s_T(f)<\sum_{i=1}^{r}\frac{\varepsilon}{\mu(P)}\mu(P_i)=\varepsilon}$,

т.е. $f(x,y)$ интегр. на P. Т. доказана.

Можно д-ть, что если изменить интегр. ф-ю на конечном мн-ве точек или кривых площади 0, то получится инт-егрир. ф-я с тем же интегралом.

Свойства двойного интеграла

(P - огран. замкн. квадр. мн-во)

1. $f(x,y)$ интегр. на $P \Rightarrow \forall c\in(-\infty,+\infty)$ $c\cdot f(x,y)$ интегр. на P, причём

$$\iint_P c\cdot f(x,y)\,dxdy = c\iint_P f(x,y)\,dxdy.$$

Д-во. $\sigma_T(cf, \mathbb{K})=\sum_{i=1}^{r} cf(K_i)\mu(P_i)=$
$=c\sum_{i=1}^{r} f(K_i)\mu(P_i)=c\cdot\sigma_T(f,\mathbb{K})\xrightarrow[(\delta_T\to 0)]{} c\cdot\iint_P f(x,y)\,dxdy$

2. $f(x,y), g(x,y)$ интегр. на $P\Rightarrow f(x,y)\pm g(x,y)$ - интегр. на P, причём

$$\iint_P (f(x,y)\pm g(x,y))\,dxdy=\iint_P f(x,y)\,dxdy\pm\iint_P g(x,y)\,dxdy$$

Д-ть самост.

Св-ва 1, 2 - линейность дв. инт-ла.

3. $f(x,y), g(x,y)$ интегр. на $P\Rightarrow f(x,y)\cdot g(x,y)$ интегр. на P.

Д-во. $|f(x,y)|\le M^f$, $|g(x,y)|\le M^g$ $\forall (x,y)\in P$; $M^f>0$, $M^g>0$

$T=\{P_i\}_{i=1}^{r}$ $M_i^h=\sup_{K\in P_i} h(K)$, $m_i^h=\inf_{K\in P_i} h(K)$ $\quad h=f, g, f\cdot g$, $i=1,2,\dots,r$

$\underline{\forall\alpha>0}$ $\exists K_i', K_i''\in P_i: f(K_i')g(K_i')>M_i^{fg}-\frac{\alpha}{2}$; $f(K_i'')g(K_i'')<m_i^{fg}+\frac{\alpha}{2}\Rightarrow$

$\underline{0\le M_i^{fg}-m_i^{fg}}<\left(f(K_i')g(K_i')+\frac{\alpha}{2}\right)-\left(f(K_i'')g(K_i'')-\frac{\alpha}{2}\right)=f(K_i')g(K_i')-$
$-f(K_i')g(K_i'')+f(K_i')g(K_i'')-f(K_i'')g(K_i'')+\alpha=f(K_i')\left(g(K_i')-g(K_i'')\right)+$
$+g(K_i'')\left(f(K_i')-f(K_i'')\right)+\alpha\le \underline{M^f(M_i^g-m_i^g)+M^g(M_i^f-m_i^f)+\alpha}$ $\forall\alpha>0$

$\Rightarrow 0\le M_i^{fg}-m_i^{fg}\le M^f(M_i^g-m_i^g)+M^g(M_i^f-m_i^f)$

$\cdot\mu(P_i)$ и $\sum_{i=1}^{r}\Rightarrow$

$$0\le S_T(fg)-s_T(fg)\le M^f\underbrace{(S_T(g)-s_T(g))}_{\to 0}+M^g\underbrace{(S_T(f)-s_T(f))}_{\to 0}\quad(\delta_T\to 0)$$

$\Rightarrow \lim_{\delta_T\to 0}(S_T(fg)-s_T(fg))=0$, т.е.
$f(x,y)\cdot g(x,y)$ интегр. на P

4. $f(x,y)$ интегр. на P. $\Rightarrow \forall$ огр. замкн. квадр. $P_1 \subset P$ $f(x,y)$ интегр. на P_1.

4. $f(x,y)$ интегр. на P. $\Rightarrow \forall$ огр. замкн. квадр. $P_1 \subset P$ $f(x,y)$ интегр. на P_1.

Д-во. T - разбиение P, τ - разбиение P_1. $f(x,y)$ интегр. на $P \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta$ $0 \le S_T(f, P) - s_T(f, P) < \varepsilon$. Берём $\forall \tau : \delta_\tau < \delta$

Возьмём $T : \delta_T < \delta$ и $T|_{P_1} = \tau$. $\Rightarrow 0 \le \underbrace{S_\tau(f, P_1) - s_\tau(f, P_1)}_{\sum_{i=1}^{r_1}(M_i - m_i)\mu(P_i),\ r_1 \le r} \le$

$\le \underbrace{S_T(f, P) - s_T(f, P)}_{\sum_{i=1}^{r}(M_i - m_i)\mu(P_i)} < \varepsilon$

$\Rightarrow f(x,y)$ интегр. на P_1

4. $f(x,y)$ интегр. на P. $\Rightarrow \forall$ огр. замкн. квадр. $P_1 \subset P$ $f(x,y)$ интегр. на P_1.

Д-во. T - разбиение P, τ - разбиение P_1. $f(x,y)$ интегр. на P $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta$ $\quad 0 \leq S_T(f, P) - s_T(f, P) < \varepsilon$. Берём $\forall \tau : \delta_\tau < \delta$

Возьмём $T : \delta_T < \delta$ и $T|_{P_1} = \tau$. $\Rightarrow 0 \leq \underbrace{S_\tau(f, P_1) - s_\tau(f, P_1)}_{\sum_{i=1}^{r_1}(M_i - m_i)\mu(P_i),\ r_1 \leq r} \leq$

$\leq \underbrace{S_T(f, P) - s_T(f, P)}_{\sum_{i=1}^{r}(M_i - m_i)\mu(P_i)} < \varepsilon$

$\Rightarrow f(x,y)$ интегр. на P_1

5. (Св-во аддитивности двойного интеграла, б/д). $f(x,y)$ интегр. на $P_1, P_2 : \mu(P_1 \cap P_2) = 0$. $\Rightarrow f(x,y)$ интегр. на $P = P_1 \cup P_2$, причём

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{P_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{P_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$