ЭКОНОМЕТРИКА

Тема лекции:

Парная регрессия

Преподаватель:
к.т.н.,доцент Павел Александрович Прохоренков

Модель парной регрессии

В модели парной линейной регрессии зависимость между переменными в генеральной совокупности представляется в виде

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon,$$

где X – неслучайная величина,

Y и ε - случайные величины.

Величина Y называется **объясняемой** (зависимой) переменной, а X - **объясняющей** (независимой) переменной. Постоянные α и β - параметры

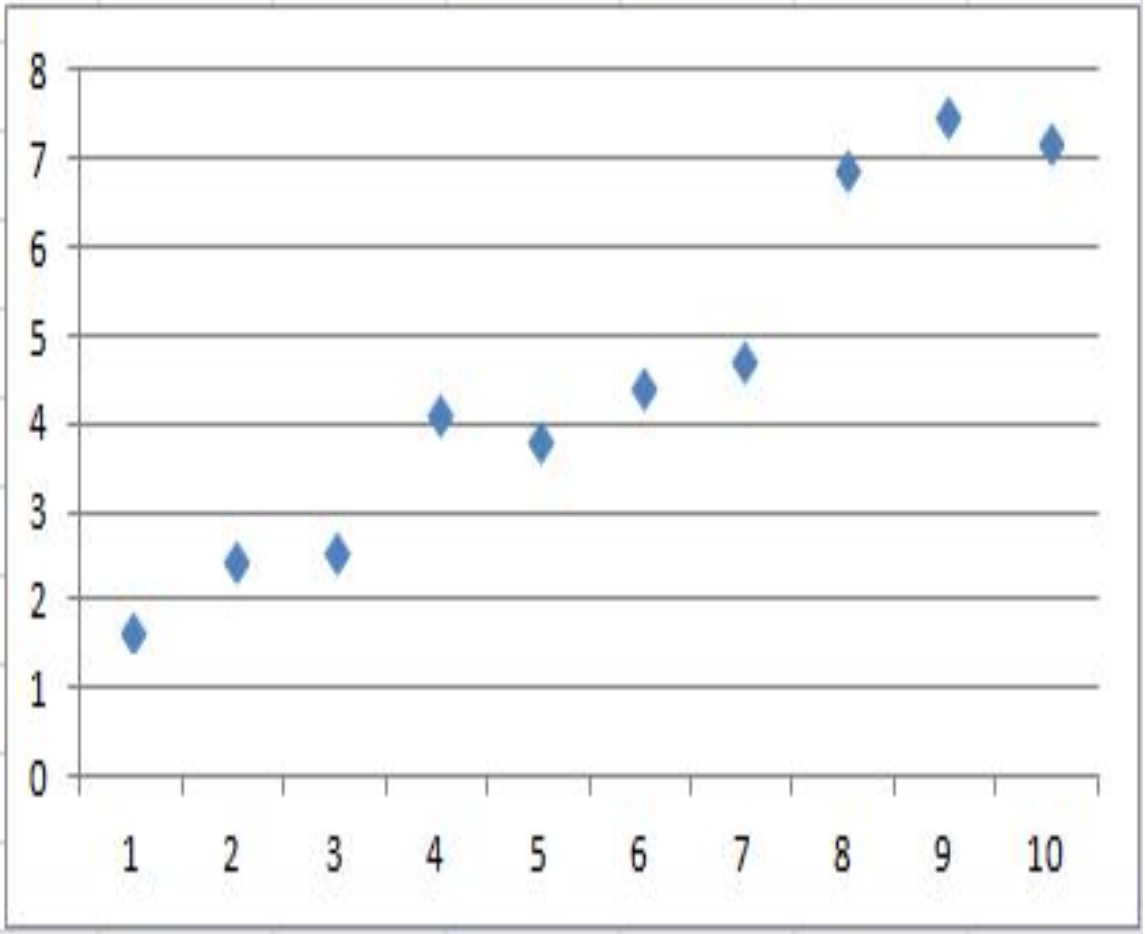
Наличие случайного члена ε (ошибка регрессии) связано с воздействием на зависимую переменную других неучтенных в уравнении факторов.

Задача моделирования: на основе выборочного наблюдения оценивается выборочное уравнение регрессии (или линия регрессии):

$$\hat{y} = a + bx,$$

где коэффициенты (a и b) - оценки параметров (α и β).

X	Y
1	1,688
2	2,487
3	2,551
4	4,125
5	3,837
6	4,451
7	4,713
8	6,906
9	7,483
10	7,181



Метод наименьших квадратов

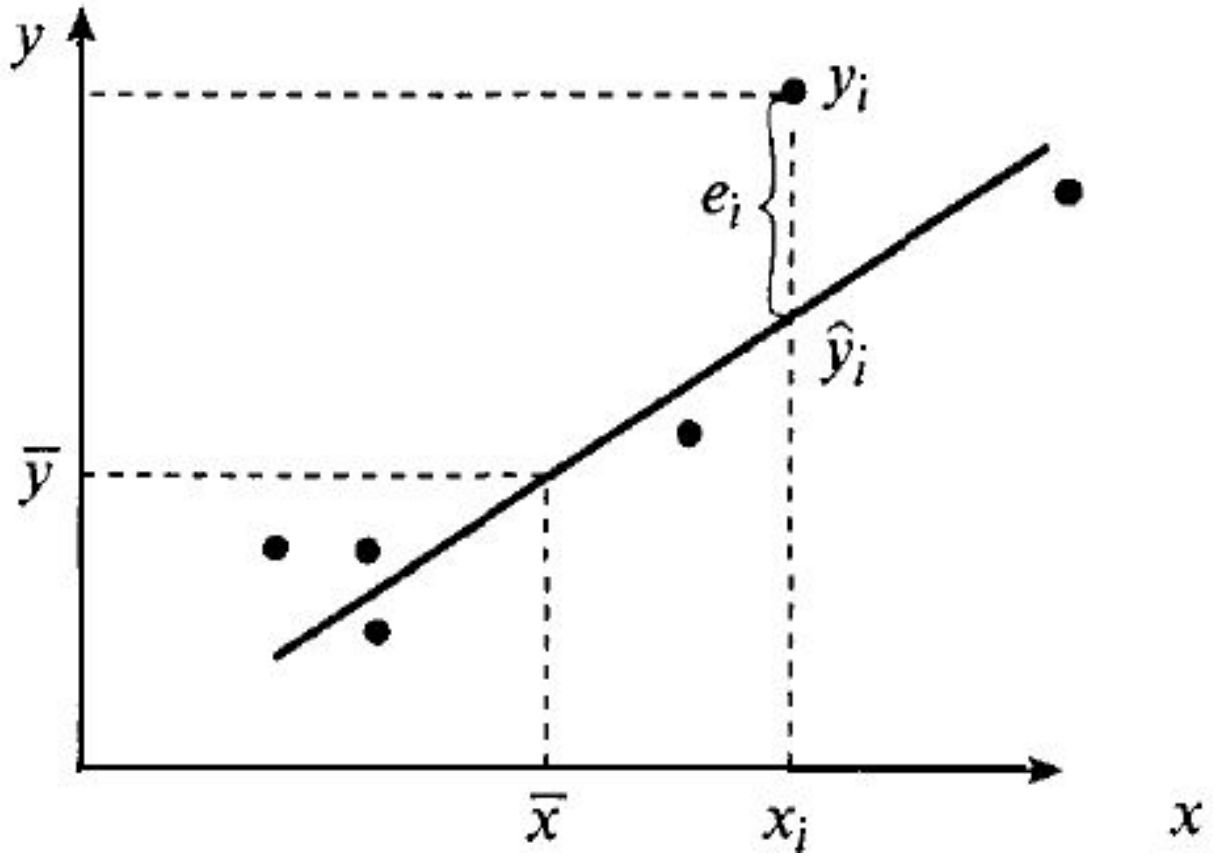
Рассмотрим задачу «наилучшей» аппроксимации набора наблюдений (x_i, y_i), $i = 1, \ldots n$ уравнением (2.2).

На рисунке приведены диаграмма рассеяния и линия регрессии.

Величина $\hat{y}_i$ описывается как расчетное значение переменной y, соответствующее значению x_i. Наблюдаемые значения y_i не лежат в точности на линии регрессии, т.е. не совпадают с $\hat{y}_i$.

Найдем остаток e_i в i-ом наблюдении как разность между фактическим и расчетным значениями зависимой переменной, т.е.

$$e_i = y_i - \hat{y}_i.$$



Неизвестные значения (a и b) определяются **методом наименьших квадратов** (МНК). Суть МНК заключается в минимизации суммы квадратов остатков:

$$Q = \sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum (y_i - a - bx_i)^2 \to min.$$

В данном выражении (x_i, y_i) - известные значения наблюдения (какие-то числа), (a , b) – неизвестные, которые надо найти.

Запишем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} Q'_a = -2 \sum (y_i - a - bx_i) = 0, \\ Q'_b = -2 \sum (y_i - a - bx_i) \cdot x_i = 0. \end{cases}$$

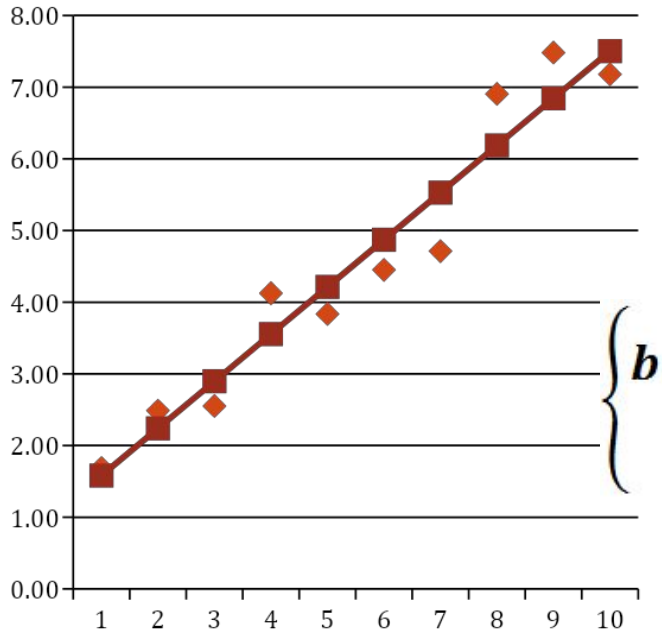
После преобразований получим систему нормальных уравнений относительно (a , b): (справка: система уравнений является нормальной относительно переменных *а,в*, если это система алгебраических линейных уравнений относительно этих переменных):

$$\begin{cases} a + b\bar{x} = \bar{y}, \\ a\bar{x} + b\overline{x^2} = \overline{xy}. \end{cases}$$

Решение системы:

$$\begin{cases} b = \dfrac{cov(x,y)}{var(x,y)} = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}, \\ a = \bar{y} - b\bar{x}. \end{cases} \qquad (2.3)$$

10	X	Y	y1	XY	Xкв	Yкв	e
	1	1,69	1,58	1,69	1	2,85	0,11
	2	2,49	2,24	4,97	4	6,19	0,25
	3	2,55	2,90	7,65	9	6,51	-0,35
	4	4,13	3,56	16,50	16	17,02	0,57
	5	3,84	4,21	19,19	25	14,72	-0,38
	6	4,45	4,87	26,71	36	19,81	-0,42
	7	4,71	5,53	32,99	49	22,21	-0,82
	8	6,91	6,19	55,25	64	47,69	0,72
	9	7,48	6,85	67,35	81	56,00	0,64
	10	7,18	7,50	71,81	100	51,57	-0,32
сумма	55	45,422	45,422	304,102	385	244,559	
средние	5,5	4,5422	4,5422	30,4102	38,5	24,4559	



$$\hat{y} = a + bx$$

$$\begin{cases} b = \dfrac{cov(x,y)}{var(x,y)} = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} = 0,658 \\ a = \overline{y} - b\overline{x} = 0,923 \end{cases}$$

Можно показать, что

$$b = \frac{cov(x,y)}{var(x,y)} = r\sqrt{\frac{var(y)}{var(x)}} = r\frac{S_y}{S_x},$$

где r – коэффициент корреляции между x и y,

S_x, S_y - их стандартные отклонения. Таким образом, если коэффициент корреляции уже рассчитан, можно найти коэффициенты (a , b) парной регрессии.

Запишем выборочные дисперсии величин $y, \hat{y}, e$:

$$var(y) = \frac{1}{n}\sum(y_i - \bar{y})^2$$ – дисперсия наблюдаемых значений y;

$$var(\hat{y}) = \frac{1}{n}\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2$$ – дисперсия расчетных значений y;

$$var(e) = \frac{1}{n}\sum(e_i - \bar{e})^2 = \frac{1}{n}\sum e_i^2$$ – дисперсия остатков.

Анализ вариации зависимой переменной

Цель регрессионного анализа состоит в объяснении поведения зависимой переменной y.

Пусть на основе выборочных наблюдений построено уравнение регрессии $\hat{y}$, тогда значение зависимой переменной y каждом наблюдении можно разложить на две составляющие:

$$y_i = \hat{y}_i + e_i,$$

где остаток e_i есть та часть зависимой переменной y, которую невозможно объяснить с помощью уравнения регрессии.

Разброс значений зависимой переменной характеризуется выборочной дисперсией $var(y)$, которую можно представить как:

$$var(y) = var(\hat{y} + e) = var(\hat{y}) + var(e) + 2cov(\hat{y}, e).$$

Можно доказать, что $cov(\hat{y}, e) = 0$, тогда

$$var(y) = var(\hat{y}) + var(e). \qquad (2.5)$$

Таким образом, дисперсия $var(y)$ разложена на 2 части:

- $var(\hat{y})$ – часть объясненная регрессионным уравнением,
- $var(e)$ – необъясненная часть.

Коэффициентом детерминации R^2 называется отношение:

$$R^2 = \frac{var(\hat{y})}{var(y)} = 1 - \frac{var(e)}{var(y)}, \qquad 0 \le R^2 \le 1.$$

R^2 характеризует долю вариации зависимой переменной, объясненную с помощью уравнения регрессии.

Отношение $\frac{var(e)}{var(y)}$ представляет собой долю необъясненной регрессии.

Если $R^2 = 1$, то регрессия точно описывает выборку:

$$var(y) = var(\hat{y}),\ var(e) = 0,\ y_i = \hat{y}_i,\ i = 1, \dots, n,$$

т.е. все точки наблюдения лежат на регрессионной прямой.

Если $R^2 = 0$, то регрессия ничего не дает для описания выборки:

$$var(y) = var(e),\ var(\hat{y}) = 0,\ \hat{y}_i, \ = \bar{y}_i,\ \ i = 1, \dots, n,$$

т.е. переменная x не улучшает качества предсказания y по сравнению с горизонтальной прямой $\hat{y}_i, \ = \bar{y}_i$.

Чем ближе к единице R^2, тем $\hat{y}$ более точно аппроксимирует y.

Замечание. Вычисление R^2 корректно, если константа a включена в уравнение регрессии.

F – тест на качество оценивания

Для определения статистической значимости коэффициента детерминации R^2 проверяется гипотеза: $H_0: F = 0$ для F – статистики:

$$F = \frac{R^2(n-2)}{1-R^2}.$$

Величина F имеет распределение Фишера с $v_1 - 1, v_2 = n - 2.$

Проверку значимости R^2 можно выполнить двумя способами.

1. Критическое значение $F_{\text{крит}}$ при заданных α, v_1, v_2 определяется по таблице F- распределения Фишера или в Excel с помощью функции

$$F_{\text{крит}} = FРАСПОБР(\alpha, v_1, v_2).$$

Из сравнения наблюдаемого значения F с критическим, получаем:

- Если $F < F_{крит}$, то H_0 принимается, т.е. R^2 незначим.
- Если $F > F_{крит}$, то H_0 отвергается, т.е. R^2 значим.

2. Наблюдаемому (расчетному) значению критерия F соответствует определенная *значимость* F, которую можно вычислить в Excel с помощью функции

Значимость $F = FРАСП(F, v_1, v_2)$.

Из сравнения *значимости* F с заданным стандартным уровнем значимости, получаем:

- Если *значимость* F больше стандартного уровня, то R^2 незначим.
- Если *значимость* F меньше стандартного уровня, то R^2 значим.

Чаще всего F- тест используется для оценки того, значимо ли объяснение, даваемое уравнением, в целом.

Средняя ошибка аппроксимации

Оценку качества построенной модели дает коэффициент детерминации, а также средняя ошибка аппроксимации.

Средняя ошибка аппроксимации – среднее отклонение расчетных значений зависимой переменной от фактических значений:

$$A = \frac{1}{n}\sum \left|\frac{y - \hat{y}}{y}\right| \cdot 100\%.$$

Допустимый предел значений A не более 8 – 10%.

Свойства коэффициентов регрессии и проверка гипотез

Случайные составляющие коэффициентов регрессии

Величина Y в модели регрессии $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$ имеет две составляющие:

- Неслучайную $(\alpha + \beta X)$;
- Случайную (ε).

Оценки коэффициентов регрессии (a, b) являются линейными функциями Y, и теоретически их также можно представить в виде двух составляющих:

$$\begin{cases} b = \beta + \dfrac{cov(x,\varepsilon)}{var(x)} \\ a = \alpha + \left[\dfrac{1}{n}\sum \varepsilon_i - \dfrac{\bar{x}cov(x,\varepsilon)}{var(x)}\right] \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь коэффициенты (a, b) разложены на две составляющие: неслучайную, равную истинным значениям (α, β), и случайную, зависящую от ε.

На практике нельзя разложить коэффициенты регрессии на составляющие, так как значения (α, β) или фактические значения ε в выборке неизвестны.

Предпосылки регрессионного анализа. Условия Гаусса - Маркова

Линейная регрессионная модель с двумя переменными имеет вид:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где Y - объясняемая переменная,

X - объясняющая переменная,

ε - случайный член.

Для того, чтобы регрессионный анализ, основанный на МНК, давал наилучшие, из всех возможных, результаты, должны выполняться определенные условия, которые называются условиями Гаусса – Маркова:

1. Математическое ожидание случайного члена в любом наблюдении должно быть равно нулю, т.е.

$$M(\varepsilon_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

2. Дисперсия случайного члена должна быть постоянной для всех наблюдений, т.е.

$$D(\varepsilon_i) = M(\varepsilon_i^2) = \sigma^2, \qquad i = 1, \dots, n.$$

3. Случайные члены должны быть статистически независимы (некоррелированы) между собой, т.е.

$$M(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0, \quad i \neq j.$$

4. Объясняющая переменная x_i есть величина неслучайная.

При выполнении условий Гаусса – Маркова модель называется **классической нормальной регрессионной моделью**. Также обычно предполагают, что случайный член распределен нормально, т.е. $\varepsilon_i \sim N(0; \sigma^2)$.

Замечание. Если случайный член имеет нормальное распределение, то требование некоррелированности случайных членов эквивалентно их независимости.

Рассмотрим, что означают условия Гаусса – Маркова.

Первое условие означает, что случайный член не должен иметь систематического смещения. Если постоянный член включен в уравнение регрессии, то это условие выполняется автоматически.

Второе условие означает, что дисперсия случайного члена в каждом наблюдении имеет только одно значение.

Под дисперсией σ^2 имеется в виду возможное поведение случайного члена до того, как сделана выборка. Величина σ^2 неизвестна и оценка σ^2 - одна из задач регрессионного анализа.

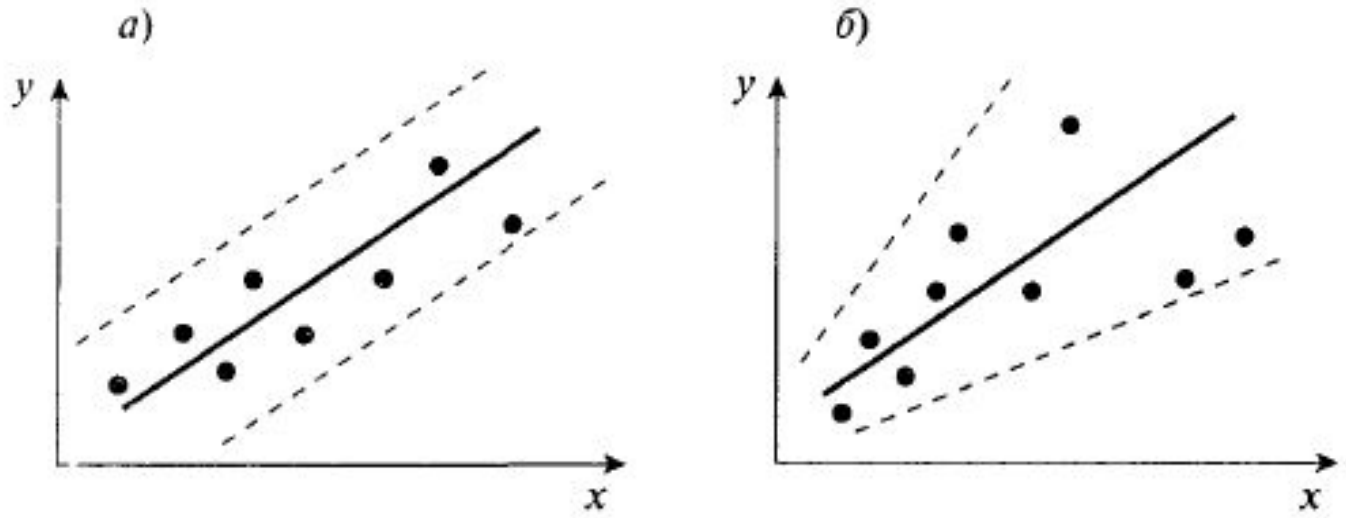
Условие независимости дисперсии случайного члена от номера наблюдения называется **гомоскедастичностью** (этот термин означает «одинаковый разброс»).

Зависимость дисперсии случайного члена от номера наблюдения называется **гетероскедастичностью.**

Таким образом:

- $D(\varepsilon_i) = \sigma^2, \ i = 1, \dots, n$ - **гомоскедастичность**
- $D(\varepsilon_i) = \sigma_i^2, \ i = 1, \dots, n$ - **гетероскедастичность.**

Характерные диаграммы рассеяния для случая гомоскедастичности (а) и случай гетероскедастичности (б) показаны на рисунке:

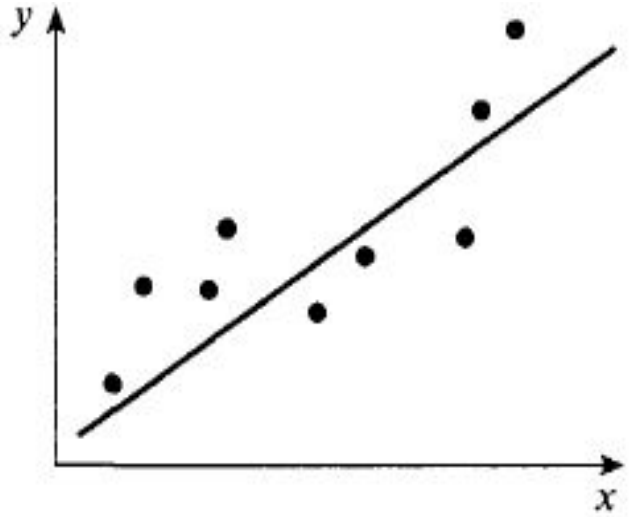


Если условие гомоскедастичности не выполняется, то оценки коэффициентов регрессии будут *неэффективными*, хотя и *несмещенными*.

Существуют специальные методы позволяющие определить наличие гетероскедастичности и устранить ее.

Третье условие указывает на некоррелированность случайных членов для разных наблюдений. Это условие часто нарушается, когда данные являются временными рядами. В случае, когда третье условие не выполняется, говорят об **автокорреляции остатков**.

Типичный вид данных при автокорреляции остатков показан на рисунке:



(Можно представить, что точки выборки разбросаны вокруг линии регрессии по какому-то закону).

Если условие независимости остатков не выполняется, то оценки коэффициентов регрессии, полученные по методу МНК, будут *неэффективными*, хотя и *несмещенными*.

Существуют специальные методы позволяющие определить наличие автокорреляции и устранить ее.

Наиболее важным является **четвертое** условие. Если условие о неслучайности объясняющей переменной не выполняется, то оценки коэффициентов регрессии оказываются *смещенными* и *несостоятельными*.

Нарушение четвертого условия может быть связано с ошибками измерения объясняющих переменных или с использованием лаговых переменных. (Для справки: лаговые переменные – это переменные относящиеся к предыдущим моментам времени).

Предположение о нормальности распределения случайного члена необходимо для проверки значимости параметров регрессии и для их интервального оценивания.

Теорема Гаусса - Маркова

Если условия 1-4 регрессионного анализа выполняются, то оценки (a, b), сделанные с помощью МНК, являются наилучшими линейными несмещенными оценками, т.е. обладают следующими свойствами:

1) Несмещенность, т.е. $M(a) = \alpha,\ M(b) = \beta.$

   (Это означает отсутствие систематической ошибки в положении линии регрессии).

2) Эффективность, т.е. имеет наименьшую дисперсию в классе всех линейных несмещенных оценок, равную:

$$D(a) = \frac{\overline{x^2} \cdot \sigma^2}{n \cdot var(x)}, \qquad D(b) = \frac{\sigma^2}{n \cdot var(x)}.$$

3) Состоятельность, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} D(a) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} D(b) = 0.$$

(Это означает, что при достаточно большом n оценки (a, b) близки к (α, β)).

Расчет стандартных ошибок коэффициентов регрессии

Полученные теоретические дисперсии $D(a)$ и $D(b)$ зависят от дисперсии σ^2 случайного члена.

По данным выборки отклонения ε_i, а следовательно, и их дисперсии σ^2 найти невозможно, поэтому их заменяют наблюдаемыми остатками e_i и их выборочной дисперсией.

Однако оценка $var(e)$ является смещенной, т.е.

$$M[var(e)] = \frac{n-2}{n}\sigma^2.$$

Несмещенной оценкой дисперсии σ^2 является величина остаточной дисперсии, которую находят по формуле:

$$S^2 = \frac{n}{n-2} var(e) = \frac{1}{n-2} \sum e_i^2,$$

которая служит мерой разброса зависимой переменной вокруг линии регрессии.

Величина S называется **стандартной ошибкой регрессии**.

Заменив в теоретических дисперсиях $D(a)$ и $D(b)$, неизвестную σ^2 на ее оценку S^2, получим оценки дисперсий коэффициентов уравнения регрессии:

$$S_a^2 = \frac{\overline{x^2} \cdot S^2}{n \cdot var(x)}, \qquad S_b^2 = \frac{S^2}{n \cdot var(x)}.$$

Величины S_a и S_b называются стандартными ошибками коэффициентов регрессии.

Статистические свойства МНК - оценок (a, b)

Пусть выполняется условие нормальности распределения случайного члена, т.е. $\varepsilon_i \sim N(0;\ \sigma^2)$. Тогда МНК – оценки коэффициентов регрессии также имеют нормальное распределение, т.е.

$$a \sim N\left(\alpha;\ \frac{\sigma^2 \cdot \overline{x^2}}{n \cdot var(x)}\right); \qquad b \sim N\left(\beta;\ \frac{\sigma^2}{n \cdot var(x)}\right).$$

Если условие нормальности распределения случайного члена не выполняется, то оценки (a, b) имеют асимптоматически нормальное распределение.

Проверка гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии (a, b)

Проверка гипотезы $H_0: \beta = \beta_0$

Пусть в теоретической зависимости

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$$

Случайный член ε распределен нормально с неизвестной дисперсией σ^2.

Хотя величина β неизвестна, можно предполагать, что она равна заданной величине β_0.

Выдвигаются гипотезы

$$\begin{cases} H_0: \beta = \beta_0 \\ H_1: \beta \neq \beta_0 \end{cases}.$$

Задача состоит в проверке гипотезы H_0 на основании выборочных данных.

Пусть по выборочным данным получена оценка b.

В качестве критерия проверки гипотезы H_0 принимают случайную величину, равную

$$t = \frac{b - \beta_0}{S_b},$$

которая имеет распределение Стьюдента с $v=n-2$ степенями свободы.

Вычисляется наблюдаемое значение критерия t. По таблице критических точек распределения Стьюдента по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $v=n-2$ находят критическую точку $t_{крит}$.

Сравнивая наблюдаемое значения критерия с критическим, можно принять или отвергнуть нулевую гипотезу.

Результаты оценивания регрессии совместны не только с конкретной гипотезой $H_0: \beta = \beta_0$, но и с некоторым их множеством.

Любое значение β, совместимое с оценкой b, удовлетворяет условию

$$\left|\frac{b-\beta}{S_b}\right| < t_{крит} \quad \text{или} \quad -t_{крит} < \frac{b-\beta}{S_b} < t_{крит}.$$

Разрешив это неравенство относительно β, получаем

$$b - t_{крит} S_b < \beta < b + t_{крит} S_b,$$

т.е. получили **доверительный интервал** для величины β.

Посередине интервала лежит величина b. Границы интервала одинаково отстоят от b, зависят от выбора уровня значимости и являются случайными числами.

Доверительный интервал покрывает значение параметра β с заданной вероятностью $(1-\alpha)$, т.е.

$$P\left(b - t_{\text{крит}} S_b < \beta < b + t_{\text{крит}} S_b\right) = 1 - \alpha.$$

Проверка гипотезы $H_0: \beta = 0$

Пусть по выборке получена оценка коэффициента регрессии b.

Гипотеза $H_0: \beta = 0$ используется для установления значимости коэффициента регрессии b.

Тогда величина t, используемая в качестве критерия проверки гипотезы H_0, равна

$$t = \frac{b - 0}{S_b} = \frac{b}{S_b}.$$

Величина t имеет распределение Стьюдента с $v=n-2$ степенями свободы.

Наблюдаемому (расчетному) значению критерия t соответствует определенная *значимость* t, которую можно вычислить в Excel с помощью функции

Значимость t =СТЬЮДРАСП$(t; v; 2)$.

Из сравнения *значимости* t с заданным стандартным уровнем значимости, получаем:

- Если *значимость* t больше стандартного уровня, то b незначим;
- Если *значимость* t меньше стандартного уровня, то b значим.

Пример

Регрессионная модель зависимости расходов на питание y от личного дохода x имеет вид:

$$\hat{y} = -1,75 + 0,775x.$$

Известны следующие данные: $n=5$, $var(x)=32$, $\overline{x^2} = 132$, $var(e)=1,98$.

Найти стандартные ошибки коэффициентов регрессии, оценить значимость коэффициента регрессии b при 5%-ном уровне значимости, построить доверительный интервал для коэффициента β при том же уровне значимости.

1. Расчет стандартных ошибок коэффициентов регрессии (a, b).

Находим несмещенную оценку дисперсии σ^2 (ее также называют остаточной дисперсией):

$$S^2 = \frac{n}{n-2} var(e) = \frac{5}{5-2} \cdot 1,98 = 3,3$$

Тогда

$$S_a^2 = \frac{\overline{x^2} \cdot S^2}{n \cdot var(x)} = \frac{132 \cdot 3,3}{5 \cdot 32} = 2,7225$$

$$S_b^2 = \frac{S^2}{n \cdot var(x)} = \frac{3,3}{5 \cdot 32} = 0,020625$$

Тогда стандартные ошибки коэффициентов регрессии равны:

Тогда стандартные ошибки коэффициентов регрессии равны:

$$S_a = \sqrt{2,7225} = 1,65$$

$$S_b = \sqrt{0,020625} = 0,1436.$$

2. Найдем наблюдаемое значение критерия t:

$$t = \frac{b}{S_b} = \frac{0,775}{0,1436} = 5,3969.$$

Для вычисления *значимость* t воспользуемся Excel

Значимость t =СТЬЮДРАСП$(t;\ v;\ 2)$.

Находим *значимость* $t = 0,01247$.

Вывод: т.к *значимость* t меньше заданного стандартного уровня значимости (0,05) , то коэффициент b значим.

3. Найдем доверительный интервал для β.

Для этого требуется найти $t_{крит}$. Воспользуемся таблицами распределения Стьюдента или или функцией Excel

$$t_{крит} = \text{СТЬЮДРАСПОБР}(\alpha,\ v)$$

Получаем:

$$t_{\text{крит}} = 3,1824.$$

Доверительный интервал для β имеет вид:

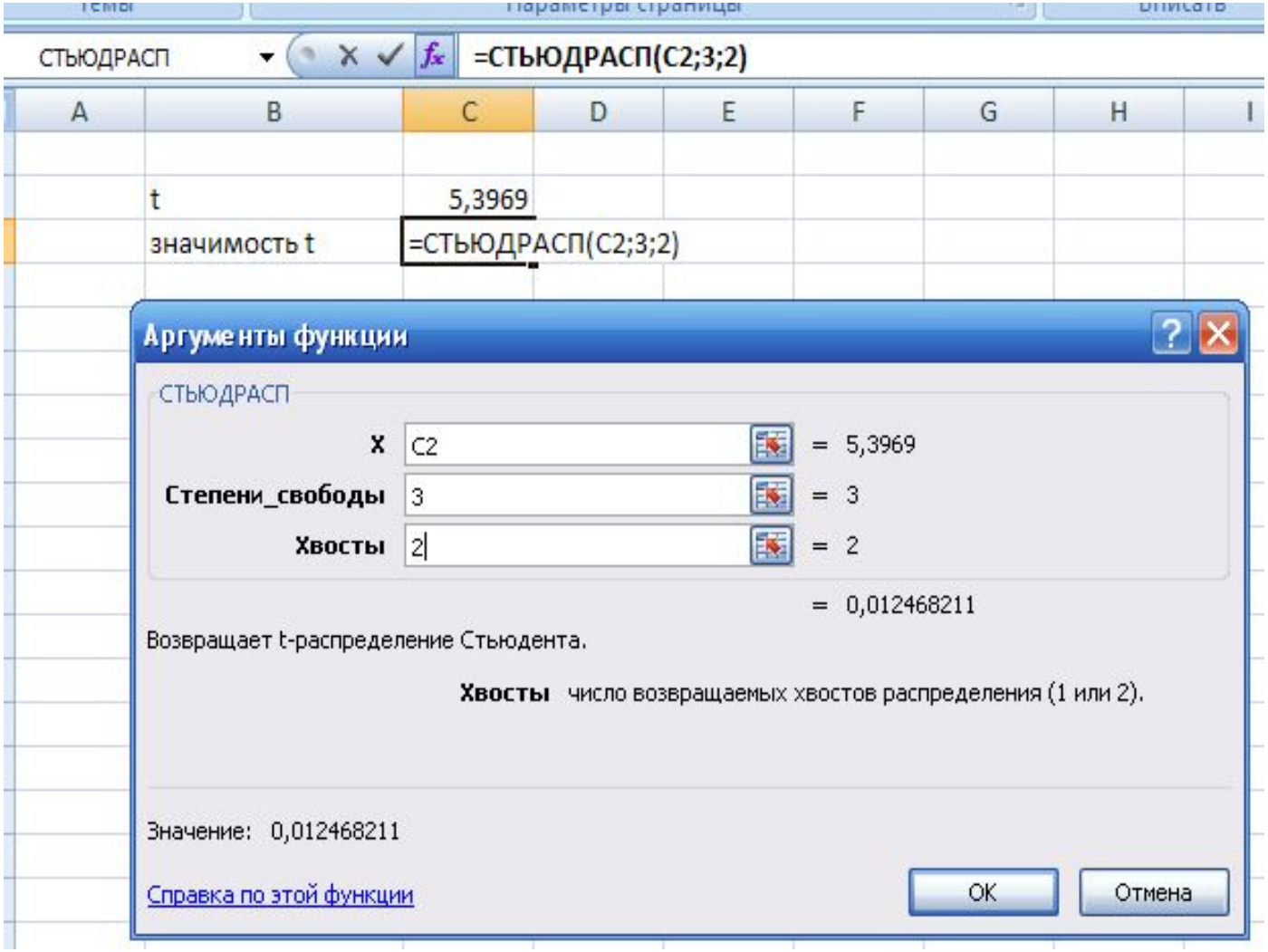
$$b - t_{\text{крит}} S_b < \beta < b + t_{\text{крит}} S_b$$

Подставляя значения, получаем:

$$0,775 - 3,18 \cdot 0,1436 < \beta < 0,775 + 3,18 \cdot 0,1436$$

Подсчитывая, получаем доверительный интервал для β:

$$0,318 < \beta < 1,23.$$


СТЬЮДРАСП
=СТЬЮДРАСП(C2;3;2)
A
B
C
D
E
F
G
H
I
t
5,3969
значимость t
=СТЬЮДРАСП(C2;3;2)
Аргументы функции
СТЬЮДРАСП
X
C2
= 5,3969
Степени_свободы
3
= 3
Хвосты
2
= 2
= 0,012468211
Возвращает t-распределение Стьюдента.
Хвосты число возвращаемых хвостов распределения (1 или 2).
Значение: 0,012468211
Справка по этой функции
OK
Отмена

Взаимосвязь критериев

В парном регрессионном анализе эквивалентны t – критерий для $H_0: \beta = 0$; t – критерий для $H_0: \rho = 0$; F – критерий для R^2:

$$t_b = \frac{b}{S_b}, \qquad t_r = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}, \qquad F = \frac{R^2(n-2)}{1-R^2}.$$

Связь между этими критериями выражается равенством:

$$t_b = t_r = \sqrt{F}.$$

Причем соотношение между критическими значениями критериев при любом уровне значимости имеет вид:

$$(t_b)_{\text{крит}} = (t_r)_{\text{крит}} = (\sqrt{F})_{\text{крит}},$$

и все эти критерии дают одинаковый результат.

Вывод: Проверки значимости коэффициента b в уравнении парной линейной регрессии, коэффициента корреляции r и коэффициента детерминации R^2 эквивалентны.

Прогнозирование в регрессионных моделях

Под прогнозированием в регрессионных моделях понимается построение оценки зависимой переменной для некоторого набора независимых переменных, которых нет в исходных наблюдениях.

Различают точечное и интервальное прогнозирование. При точечном прогнозировании оценка – некоторое конкретное число, при интервальном – интервал, в котором находится истинное значение зависимой переменной с заданным уровнем значимости.

Рассмотрим регрессионную модель

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon.$$

Действительное значение зависимой переменной при $x = x_p$ (x предсказания):

$$y_p = \alpha + \beta x_p + \varepsilon_p,$$

где $M(\varepsilon_p) = 0$, $D(\varepsilon_p) = \sigma^2$. Значения α, β, ε_p неизвестны.

Предсказанным значением является оценка y_p (точечный прогноз):

$$\widehat{y_p} = a + bx_p.$$

Ошибка предсказания равна разности между предсказанным и действительным значениями:

$$\Delta_p = \widehat{y_p} - y_p.$$

Ошибка предсказания имеет нулевой математическое ожидание:

$$M(\Delta_p) = 0.$$

Дис

Ошибка предсказания имеет нулевой математическое ожидание:

$$M(\Delta_p) = 0.$$

Дисперсия прогноза равна:

$$D(\Delta_p) = \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{nvar(x)}\right] \cdot \sigma^2.$$

Из формулы следует, что чем больше x_p отклоняется от выборочного среднего $\bar{x}$, тем больше дисперсия ошибки предсказания, и чем больше объем выборки n, тем меньше дисперсия предсказания.

Из среднего $\bar{x}$, тем больше дисперсия ошибки предсказания, и чем больше борочного объем выборки n, тем меньше дисперсия предсказания.

среднего $\bar{x}$, тем больше дисперсия ошибки предсказания, и чем больше

объем выборки n, тем меньше дисперсия предсказания.

Заменяя в дисперсии прогноза σ^2 на ее оценку S^2 и извлекая квадратный корень, получим стандартную ошибку предсказания:

$$S_p = S\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_p-\bar{x})^2}{nvar(x)}}.$$

Доверительный интервал для действительного значения y_p определяется выражением

$$\widehat{y_p} - t_{крит} S_p < y_p < \widehat{y_p} + t_{крит} S_p,$$

где $t_{крит}$ – критическое значение t – статистики при заданном уровне значимости и числе степеней свободы.

На рисунке в общем виде показано соотношение между доверительным интервалом предсказания и значением объясняющей переменной. Отрезок, отмеченный на рисунке стрелками, определяет доверительный интервал предсказания в точке x_p.