Определение параметров закона распределения результатов измерений по статистическим критериям.

Вопросы:

1. **Проверка нормальности распределения по критерию Пирсона.**
2. **Проверка нормальности распределения по составному критерию d.**
3. **Проверка нормальности распределения по критерию согласия Колмогорова А.Н.**

1. Проверка нормальности распределения по критерию Пирсона.

- Проверка гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения производится так же, как проверка гипотезы о параметрах распределения, т. е. при помощи специально подобранной случайной величины – критерия согласия.

Критерий согласия называют критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

Среди наиболее известных критериев следует отметить критерий Пирсона χ^2 , критерий Колмогорова, составной критерий $\overline{d}$.

Ограничимся описанием применения критериев Пирсона и составного критерия $\overline{d}$, применяемых в метрологической практике, для проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Следует отметить, что критерий Пирсона применяется и для других распределений (в этом состоит его достоинство).

• Критерий Пирсона отвечает на вопрос случайно (незначимо) или неслучайно (значимо) расхождение эмпирических и теоретических частот попаданий в заданный интервал. Случайность может быть объяснима либо малым числом наблюдений, либо способом их группировки, либо другими причинами. Однако возможно это расхождение неслучайно и объясняется тем, что теоретические частоты вычислены исходя из неверной гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Правда, как и любой другой критерий, он не доказывает справедливость гипотезы, а лишь устанавливает на принятом уровне значимости ее согласие или несогласие с данными наблюдений.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы (“генеральная совокупность распределена нормально”) принимается случайная величина, определяемая по формуле:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{S} \frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'}$$

где n_i – эмпирические частоты в некоторой выборке (серии результатов измерений);

n'_i – теоретические частоты, вычисленные в предположении нормально-распределенной генеральной совокупности.

- Для непрерывной случайной величины (какой может результат измерения) проверку принадлежности нормальному распределению по критерию Пирсона проводят, используя формулу:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(m_i - n \cdot p_i\right)^2}{n \cdot p_i},$$

где m_i – эмпирическая частота попадания исправленных результатов наблюдений в i-й интервал;

$n \cdot p_i$ – теоретическая (выравнивающая) частота попадания исправленных результатов наблюдений в этот же интервал;

P_i – вероятность попадания X в i-й частичный интервал, вычисленная при допущении, что X имеет предполагаемое распределение.

Таким образом, выравнивающие частоты непрерывного распределения находят по равенству: $n_i^{'} = n \cdot P_i$.

- В частности если основания предположить, что непрерывной случайной величины принадлежат нормально распределенной генеральной совокупности, то выравнивающие частоты могут быть найдены по формуле:

$$n_i^{'} = \frac{n \cdot h}{S} \cdot \varphi(U_i),$$

где *n* – число испытаний (серия наблюдений при измерениях);

h – длина частичного интервала;

S – выборочное среднее квадратическое отклонение (оценка СКО);

$U_i = \frac{(x_i - \overline{X})}{S}$ - (x_i - середина *i*-го частичного интервала).

Плотность общего нормального распределения *f* (*x*) и плотность нормированного распределения ф(*U*) связаны между собой следующей зависимостью:

$$f(x) = \frac{1}{S} \cdot \varphi(U).$$

В справочном пособии приведены значения дифференциальной функции нормированного нормального распределения.

Таким образом, вероятность попадания результатов наблюдения в *i*-ый интервал длиной h приближенно равна произведению длины интервала на значение плотности распределения $f(x)$ в любой точке интервала и, в частности, при $x = x_i$, т. е.:

$$P_i = h \cdot f(x_i) = h \cdot \frac{1}{S} \cdot \varphi(U_i).$$

Число степеней свободы находят по равенству:

$$k = S - 1 - r,$$

где S – число групп (частичных интервалов выборки);

r – число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по данным выборки.

В случае нормального распределения $r = 2$ (математического ожидания и среднее квадратическое отклонение), тогда $k = S - 3$.

При определении меры расхождения Пирсона исходные данные группируются как при построении гистограммы.

Однако, рекомендуется, что бы каждая группа содержала не менее 5-8 частот (вариант); малочисленные группы следует объединять в одну, суммируя эмпирические частоты.

Для этого задаются уровнем значимости $\alpha(q) = 1 - p$ (рекомендуется выбирать q=(0,1-0,02) , а число степеней свободы определяют как $k = r - 3$. Гипотеза о принадлежности эмпирического распределения подтверждается, если выполняется условие:

$$\chi^2_{k,\frac{1}{2}q} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{k,1-\frac{1}{2}q}.$$

Следует отметить, односторонний критерий более “жестко” отвергает нулевую гипотезу, чем двусторонний, построим правосторонний, построим правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в область в предположении справедливости нулевой гипотезы была в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости q .

$$P\left[\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}(q;k)\right] = q.$$

Таким образом, правосторонняя критическая область определяется неравенством $\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}(q;k)$, а область принятия нулевой гипотезы – неравенством $\chi^2 < \chi^2_{\text{кр}}(q;k)$.

Критерий χ^2 основан на группировке данных и не учитывает порядка отклонений частот эмпирического и теоретического распределений.

Поскольку возможны ошибки первого и второго рода, в особенности, если согласование теоретических и эмпирических частот “слишком хорошее”, следует проявлять осторожность в окончательной оценке принадлежности к нормальному закону распределения. При этом рекомендуется либо повторить измерительную процедуру (если установлена технико - экономическая целесообразность), увеличить число наблюдений, воспользоваться другими критериями, вычислить асимметрию и эксцесс.

2. Проверка нормальности распределения по составному критерию d.

- При малых объемах выборки $10 \le n < 50$ для проверки согласия опытного распределения с нормальным применяется составной критерий $\overline{d}$.

Составной критерий $\overline{d}$ рекомендован ГОСТ 8.207 – 76 “ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения”. При проверке задаются уровнем значимости $q_I(\alpha_I)$ (для критерия I) и $q_{II}(\alpha_{II})$ (для критерия II). Уровень значимости составного критерия должны удовлетворять условию:

$$q \le q_I + q_{II} \cdot (\alpha \le \alpha_I + \alpha_{II}) .$$

Гипотеза о согласованности опытного распределения с теоретическим нормальным проверяется следующим образом:

1) проверяем выполнение критерия I. Для этого определяется значение $\overline{d}$ по формуле:

$$\overline{d} = \frac{1}{nS^*} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \overline{X_{\text{ц.р.}}} \right|,$$

где $S^{*}\,(\sigma^{*})$ – смещенная оценка СКО результата наблюдений, найденная по формуле:

$$S^{*} = \sqrt{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X_{\text{ц.р.}}}\right)^2}.$$

Нулевая гипотеза о принадлежности эмпирического распределения нормальному справедлива, если выполняется условие:

$$\overline{d}_{1-\frac{1}{2}q_I} < \overline{d} < \overline{d}_{\frac{1}{2}q_I}$$

где $\overline{d}_{1-\frac{1}{2}q_I}$, $\overline{d}_{\frac{1}{2}q_I}$ – квантили распределения $\overline{d}$;

2) выполняем проверку по критерию II. Гипотеза о нормальности распределения подтверждается, если не более m разностей $\left|x_i - \overline{X_{\text{ц.р.}}}\right|$ превзошли значения $\frac{Z_{p/2}}{S}$.

Несмещенная оценка СКО результата наблюдений (S) определяется по известной формуле:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X_{\text{ц.р.}}}\right)^2}.$$

- Верхняя квантиль интегральной функции нормированного распределения Лапласа $Z_{p/2}$, отвечающая вероятности $\frac{p}{2}$ находится по таблице 1.

Таблица 1 – Квантили $Z_{p/2}$ интегральной функции Лапласа.

P	0,90	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99
	1,65	1,96	2,06	2,17	2,33	2,58

Задаются уровнем значимости q_2 и для известного n из таблицы 3 находят значения P и m .

Результирующий уровень значимости составного критерия:

$$q \leq q_1 + q_2 .$$

Если окажется, что хотя бы один из критериев не выполняется, то считают, что распределение исследуемой совокупности результатов измерений не соответствует нормальному закону.

Таблица 2 – Квантили распределения статистики *d*.

n	$d_{0,01}$	$d_{0,05}$	$d_{0,10}$	$d_{0,90}$	$d_{0,95}$	$d_{0,99}$
1	2	3	4	5	6	7
11	0,9359	0,9073	0,8899	0,7409	0,7153	0,6675
16	0,9137	0,8884	0,8733	0,7452	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,8631	0,7495	0,7304	0,6950
26	0,8901	0,8625	0,8570	0,7530	0,7360	0,7040
31	0,8827	0,8625	0,8511	0,7559	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,8468	0,7583	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,8436	0,7604	0,7470	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,8409	0,7621	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,8385	0,7636	0,7518	0,7291

Таблица 3 – Значения *m* и *P* , соответствующие различным *n* и *q.*

n	m	P при уровне значимости q, равном		
		0,01	0,02	0,05
1	2	3	4	5
10	1	0,98	0,98	0,96
11-14	1	0,99	0,98	0,97
15-20	1	0,99	0,99	0,98
21-22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,97
23-27	2	0,98	0,98	0,97
28-32	2	0,99	0,98	0,97
33-35	2	0,99	0,98	0,98
36-49	2	0,99	0,99	0,98

3. Проверка нормальности распределения по критерию согласия Колмогорова А.Н.

- В качестве меры расхождения между эмпирическим и теоретическим законами распределения в критерии Колмогорова А.Н. выбрано максимальное значение *D* модуля разности между эмпирической функцией распределения *F**(*x*) и выбранной теоретической функцией распределения *F*(*x*)

$$\left|D = max|F^*(x) - F(x)|\right|.$$

При этом Колмогоровым А.Н. доказано, что независимо от вида предполагаемой функции распределения непрерывной случайной величины *X* в случае неограниченного увеличения числа независимых измерений *n* вероятность неравенства

$$D\sqrt{n} \geq \lambda.$$

Стремиться к пределу вероятности *p*(λ) , равному

$$p(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k \cdot e^{-2\cdot k^2\cdot \lambda^2}.$$

- При практическом применении критерия согласия Колмогорова А.Н. величина λ, являющаяся критериальным параметром, принимается равной $\lambda = D \cdot \sqrt{n}$. Значение D находится после построения на одном графике эмпирической и теоретической функций изображением этих функций и представляет величину D. Затем по вычисленному значению λ по таблице 1 определяется вероятность $p(\lambda)$ как вероятность того, что за счет случайных причин максимальное расхождение между эмпирической и теоретической функциями распределения будет не меньше, чем полученное из результатов измерений. Следовательно, если вероятность $p(\lambda)$ достаточно большая, то гипотезу о соответствии опытного распределения теоретическому следует рассматривать как правдоподобную, не противоречащую опытным данным.