Признак перпендикулярности двух плоскостей

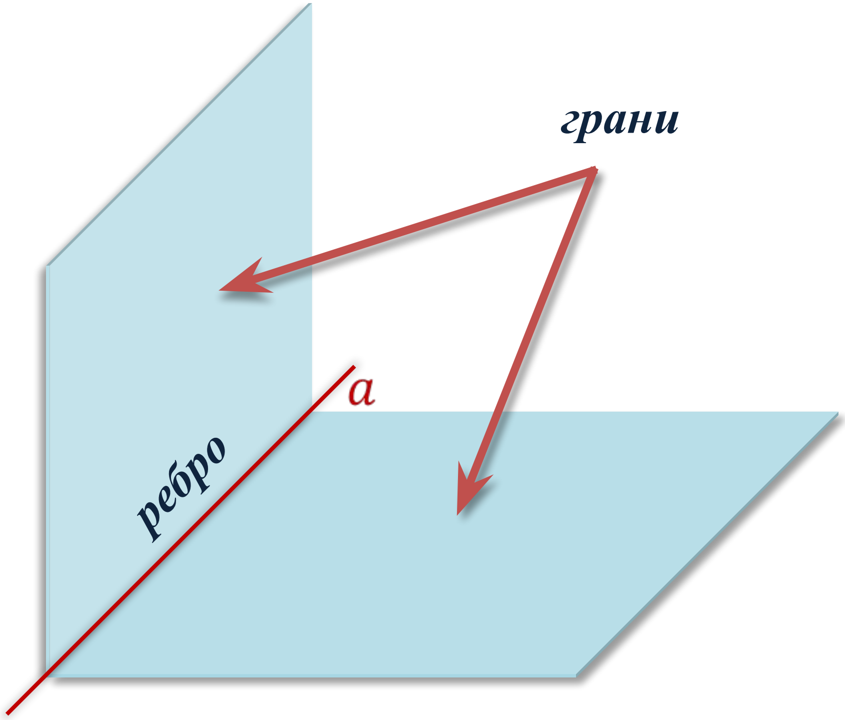
Сегодня на уроке:

- ✔ перпендикулярные плоскости
- ✔ признак перпендикулярности двух плоскостей

Определение. ***Двугранным углом*** называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a, не принадлежащими одной плоскости.

Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его *гранями*.

Прямая a называется *ребром* двугранного угла.



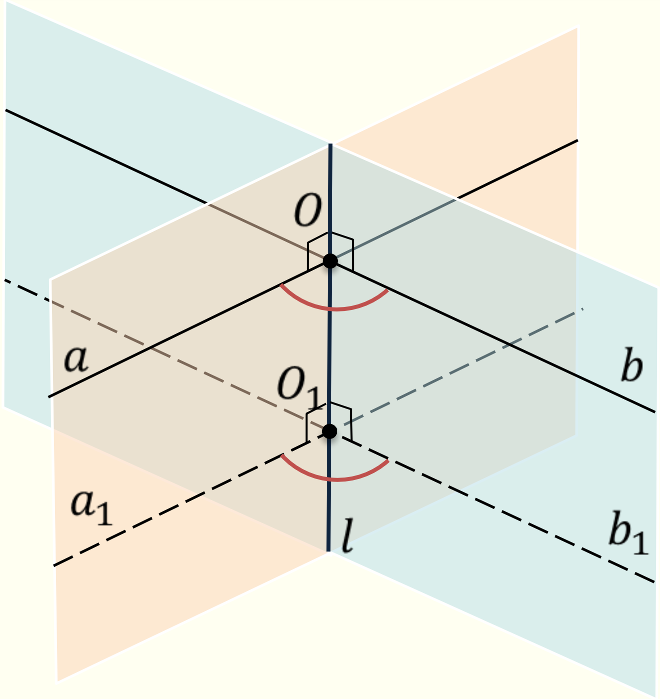
Определение. ***Углом между пересекающимися плоскостями*** называется угол между прямыми, проведенными в плоскостях перпендикулярно их линии пересечения через некоторую точку.

Определение угла между плоскостями не зависит от выбора прямых a и b, проведенных в плоскостях и перпендикулярных их линии пересечения.

$a_1 \perp l, b_1 \perp l, O_1 \in a_1, O_1 \in b_1$

$a \parallel a_1, b \parallel b_1$

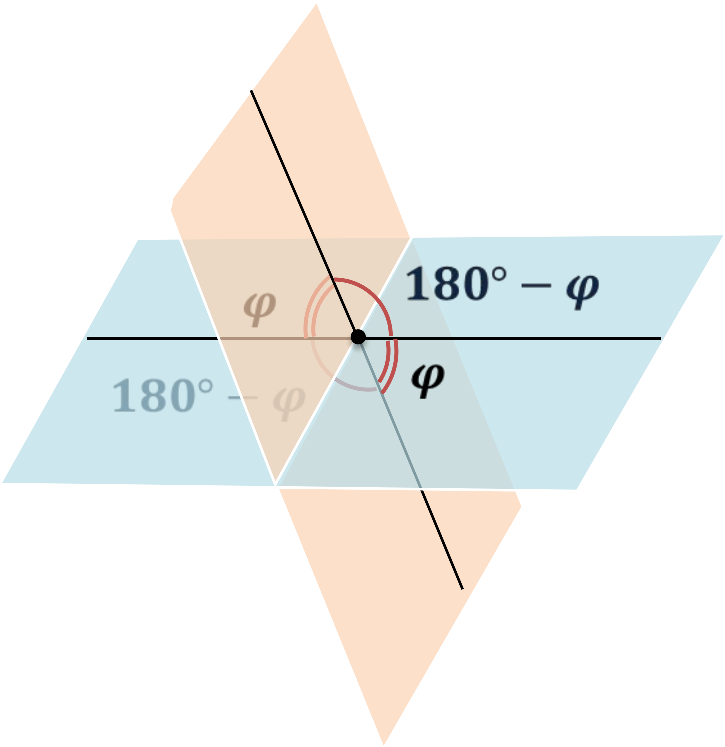
Следовательно, угол между прямыми a и b равен углу между прямыми a_1 и b_1.



Если плоскости *параллельны*, то угол между ними считается равным **0°**.

$$\angle(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta})$$

Если в пространстве *пересекаются две плоскости*, то они образуют четыре двугранных угла с общим ребром.



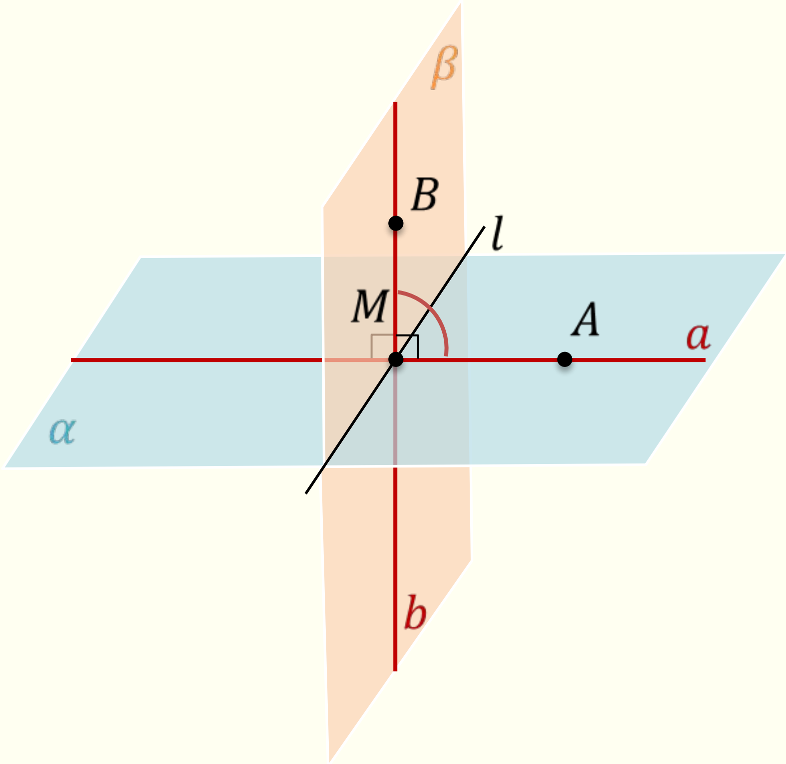
Если известен один из этих двугранных углов, то можно найти и другие три двугранных угла.

Если при пересечении плоскостей один из углов *прямой* (т.е. $\varphi = 90°$), то и *остальные три угла прямые*.

Если φ – тот из четырех углов, который не превосходит каждого из остальных, то говорят, что угол между пересекающимися плоскостями равен φ.

$$0° < \varphi \leq 90°$$

Определение. Две пересекающиеся плоскости называются ***перпендикулярными (взаимно перпендикулярными)***, если угол между ними равен **90°**.



Пусть $\alpha \cap \beta = l$.

$M \in l$

$M \in a, M \in b, a \perp l, b \perp l, a \subset \alpha, b \subset \beta$

$A \in a, B \in b$

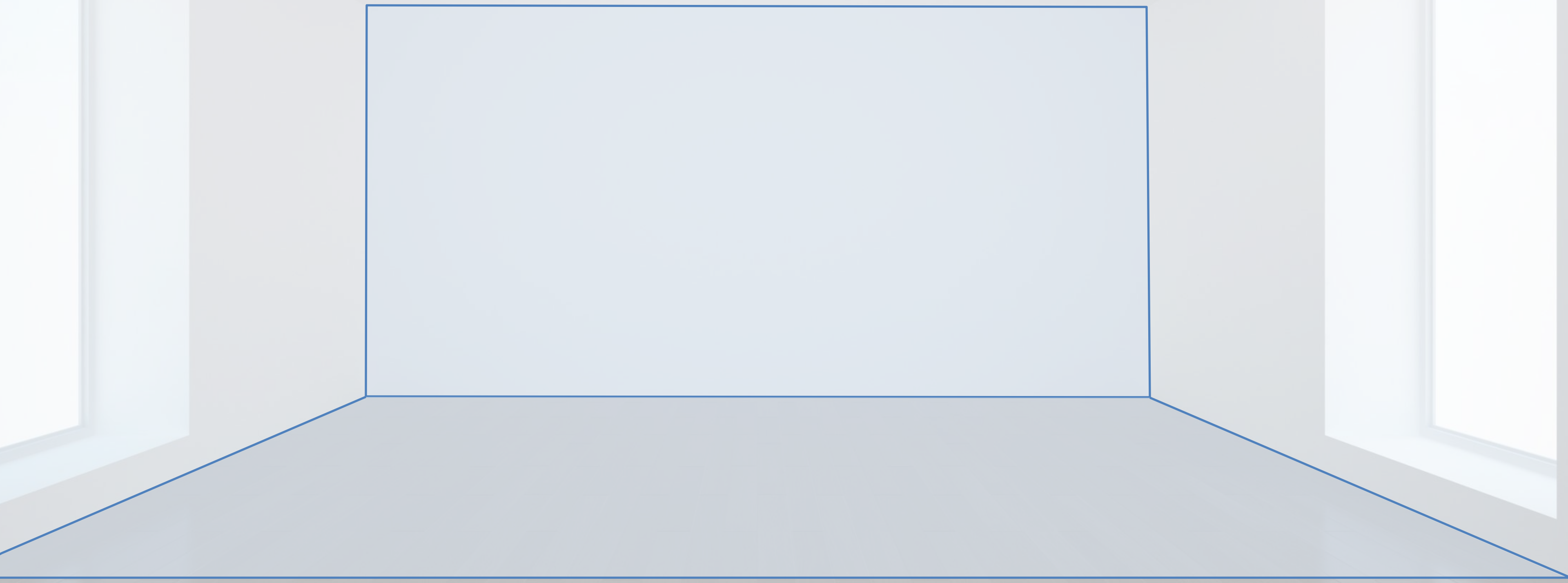
$\angle AMB$ – линейный угол двугранного угла AlB.

Если $\angle AMB = 90°$, то плоскости α и β называются ***перпендикулярными***.

$b \perp l, b \perp a \ (a \cap l = M, a \subset \alpha, l \subset \alpha) \implies b \perp \alpha$

$a \perp l, a \perp b \, (b \cap l = M, b \subset \beta, l \subset \beta) \implies a \perp \beta$

Взаимно перпендикулярные плоскости



Теорема (Признак перпендикулярности двух плоскостей).
Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Доказательство.

Пусть даны плоскости α и β.

Причем, $a \subset \alpha, a \perp \beta$.

Докажем, что $\alpha \perp \beta$.

Пусть $a \cap \beta = O$.

$\alpha \cap \beta = l, O \in l$

$b \subset \beta, O \in b, b \perp l$

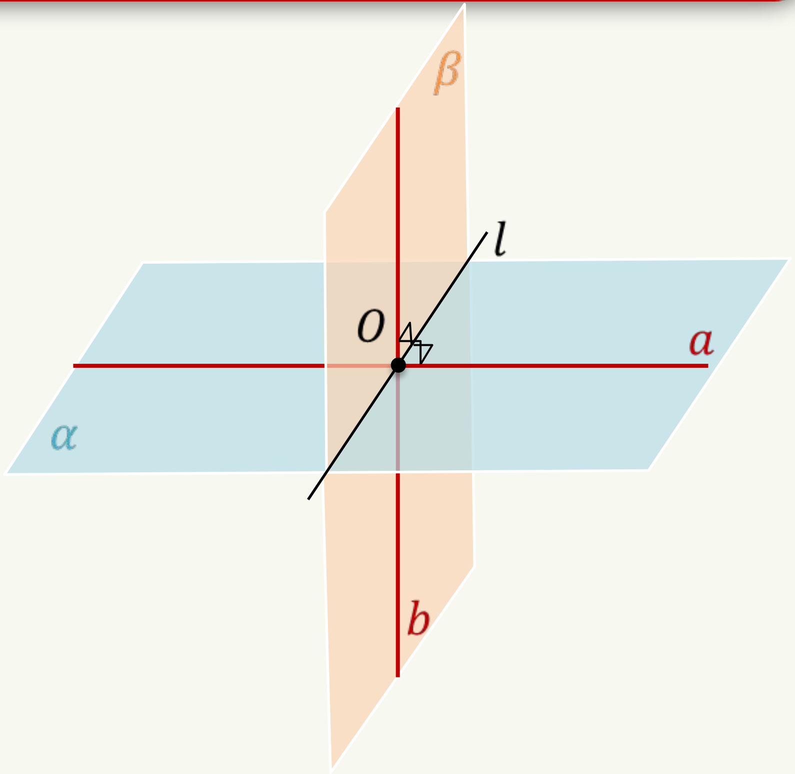
$b \subset \beta, l \subset \beta, a \perp \beta \quad \Rightarrow \quad a \perp b, a \perp l$

Таким образом, $a \subset \alpha$, $a \perp l$ и $b \subset \beta, b \perp l$.

Значит, $\angle(\alpha;\beta) = \angle(a;b) = 90°$.

Т.е. $\alpha \perp \beta$.

Теорема доказана.



Следствие. Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

Доказательство.

Пусть $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = l$.

$l \perp \gamma$

Докажем, что $\alpha \perp \gamma$ и $\beta \perp \gamma$.

$l \perp \gamma$, $l \subset \alpha$

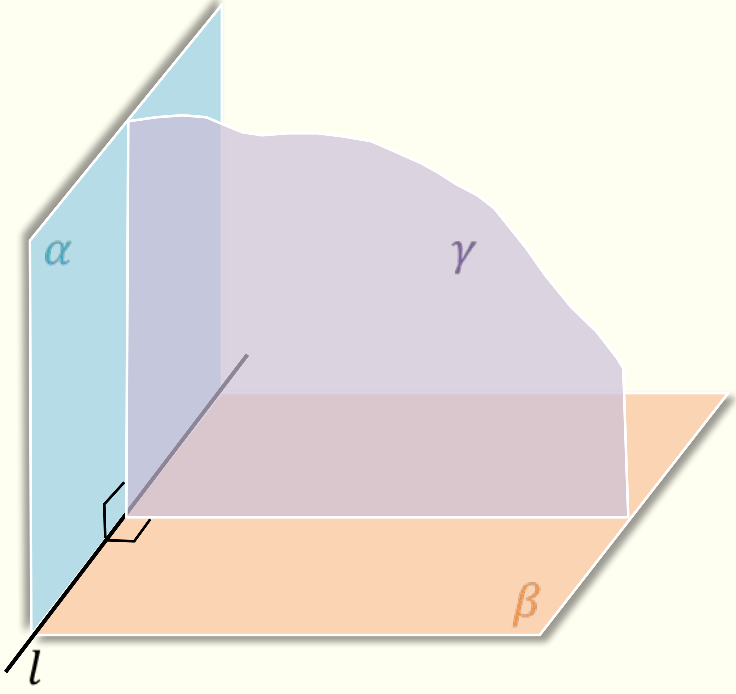
Значит, *по признаку перпендикулярности плоскостей*, $\alpha \perp \gamma$.

$l \perp \gamma$, $l \subset \beta$

Значит, *по признаку перпендикулярности плоскостей*, $\beta \perp \gamma$.

Таким образом, $\alpha \perp \gamma$ и $\beta \perp \gamma$.

Что и требовалось доказать.



Следствие. Прямая, проведенная в одной из двух перпендикулярных плоскостей перпендикулярно прямой, по которой они пересекаются, перпендикулярна другой плоскости.

Доказательство.

Пусть $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = l$.

$b \subset \beta$, $b \perp l$

Докажем, что $b \perp \alpha$.

$b \cap l = O$

$a \subset \alpha$, $a \perp l$

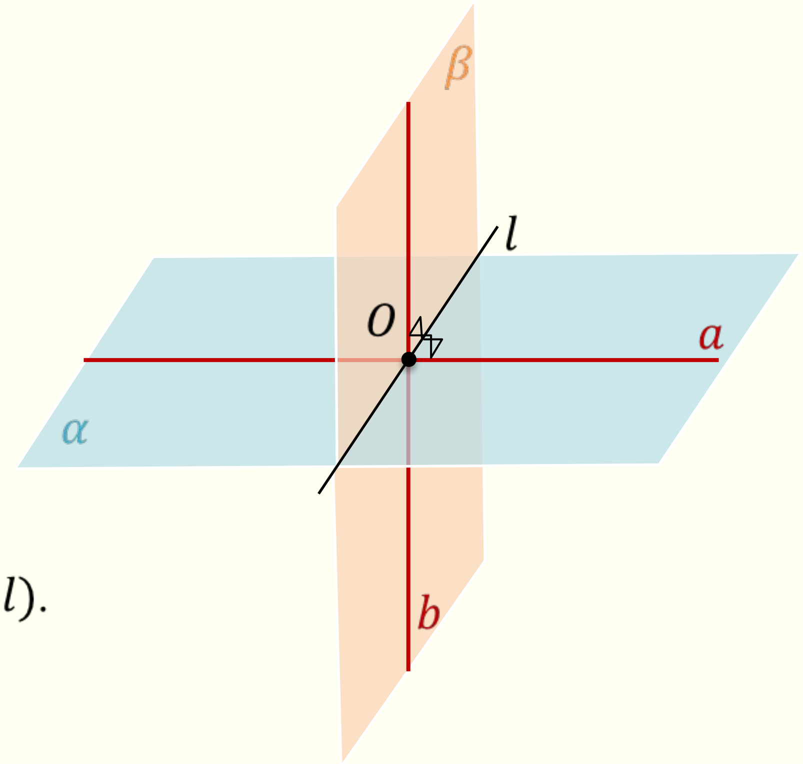
$b \perp l,\ a \perp l \implies \angle(a;b) = \angle(\alpha;\beta)$

Значит, $\angle(a;b) = 90°$.

Таким образом, $b \perp a$ и $b \perp l$ ($a \subset \alpha$, $l \subset \alpha$, $a \cap l$).

Следовательно, $b \perp \alpha$.

Что и требовалось доказать.



Задача. Дана пирамида $SABCD$. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна основанию. Докажите, что высота пирамиды лежит в плоскости этой грани.

Доказательство.

Пусть $ASB \perp ABC$.

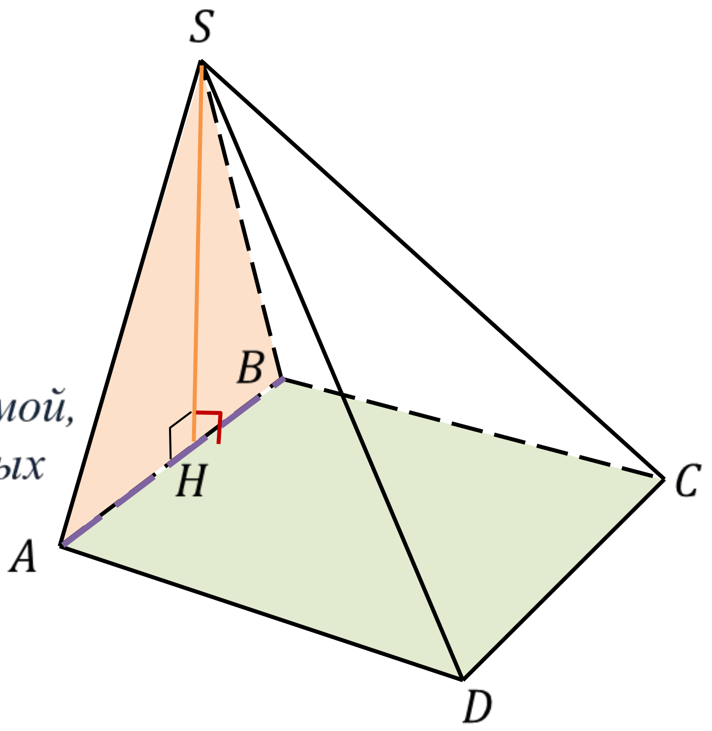
$ASB \cap ABC = AB$

$SH \subset ASB, SH \perp AB$

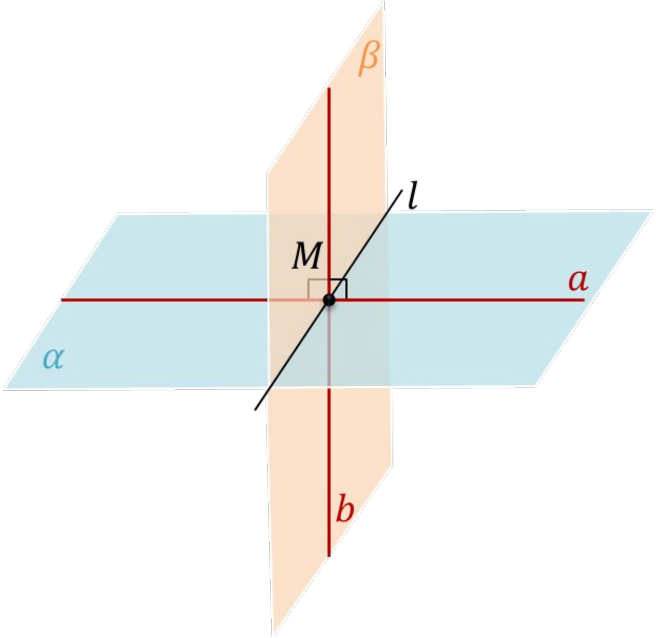
$SH \perp ABC$ (из *следствия о перпендикулярной прямой, проведенной к линии пересечения перпендикулярных плоскостей*).

Значит, SH – высота пирамиды.

Что и требовалось доказать.



Признак перпендикулярности двух плоскостей



Следствие. Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

Следствие. Прямая, проведенная в одной из двух перпендикулярных плоскостей перпендикулярно прямой, по которой они пересекаются, перпендикулярна другой плоскости.