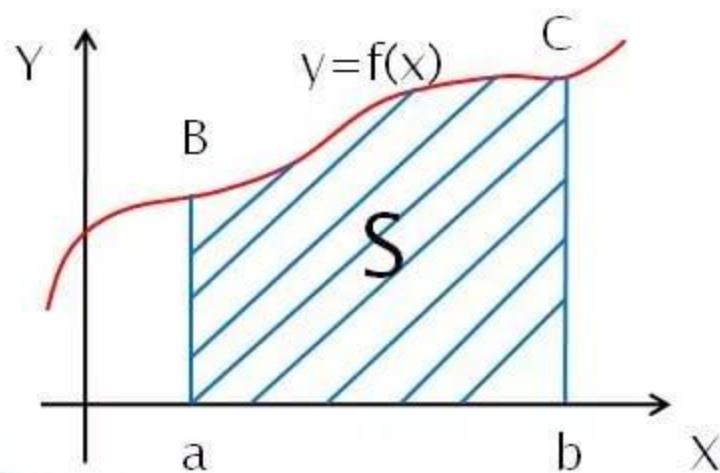


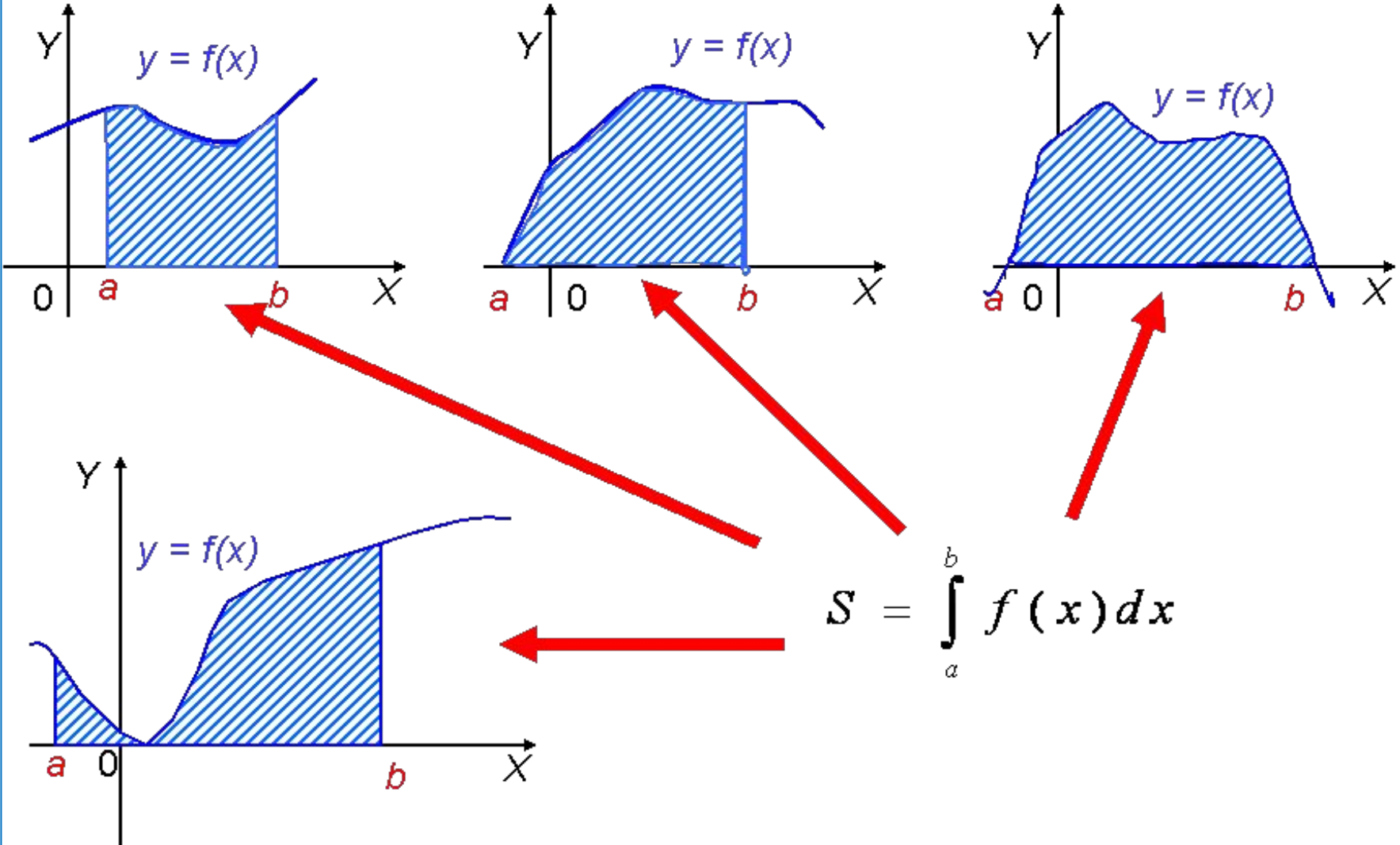
Геометрический смысл определенного интеграла

Теорема:

Определенный интеграл от a до b функции $f(x)$ равен площади S соответствующей криволинейной трапеции, т.е.

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = S_{aBCb}$$





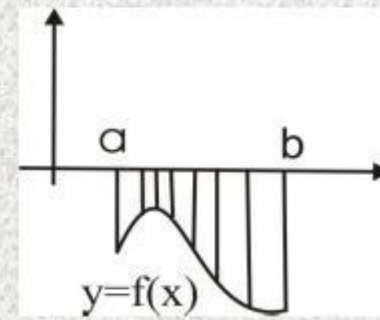
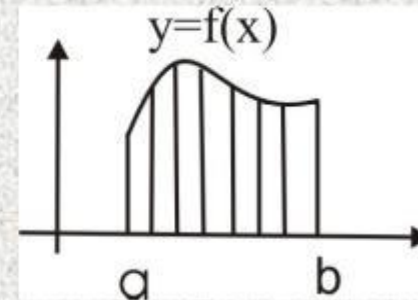
Геометрические приложения определенного интеграла.

1. Вычисление площадей плоских фигур.

1) В декартовых координатах.

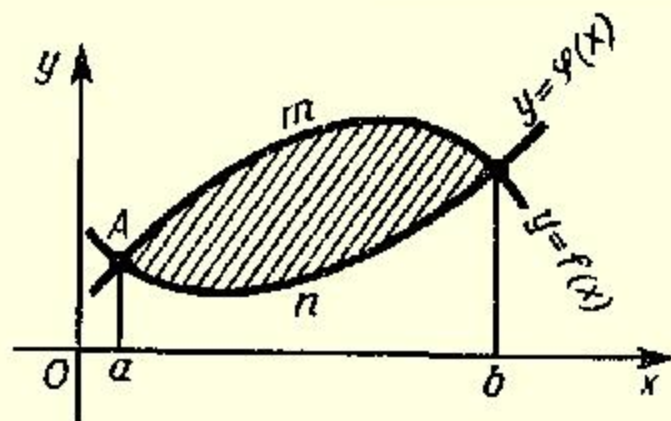
- $f(x) \geq 0$, $S = \int_a^b f(x)dx$

- $f(x) \leq 0$, $S = -\int_a^b f(x)dx$

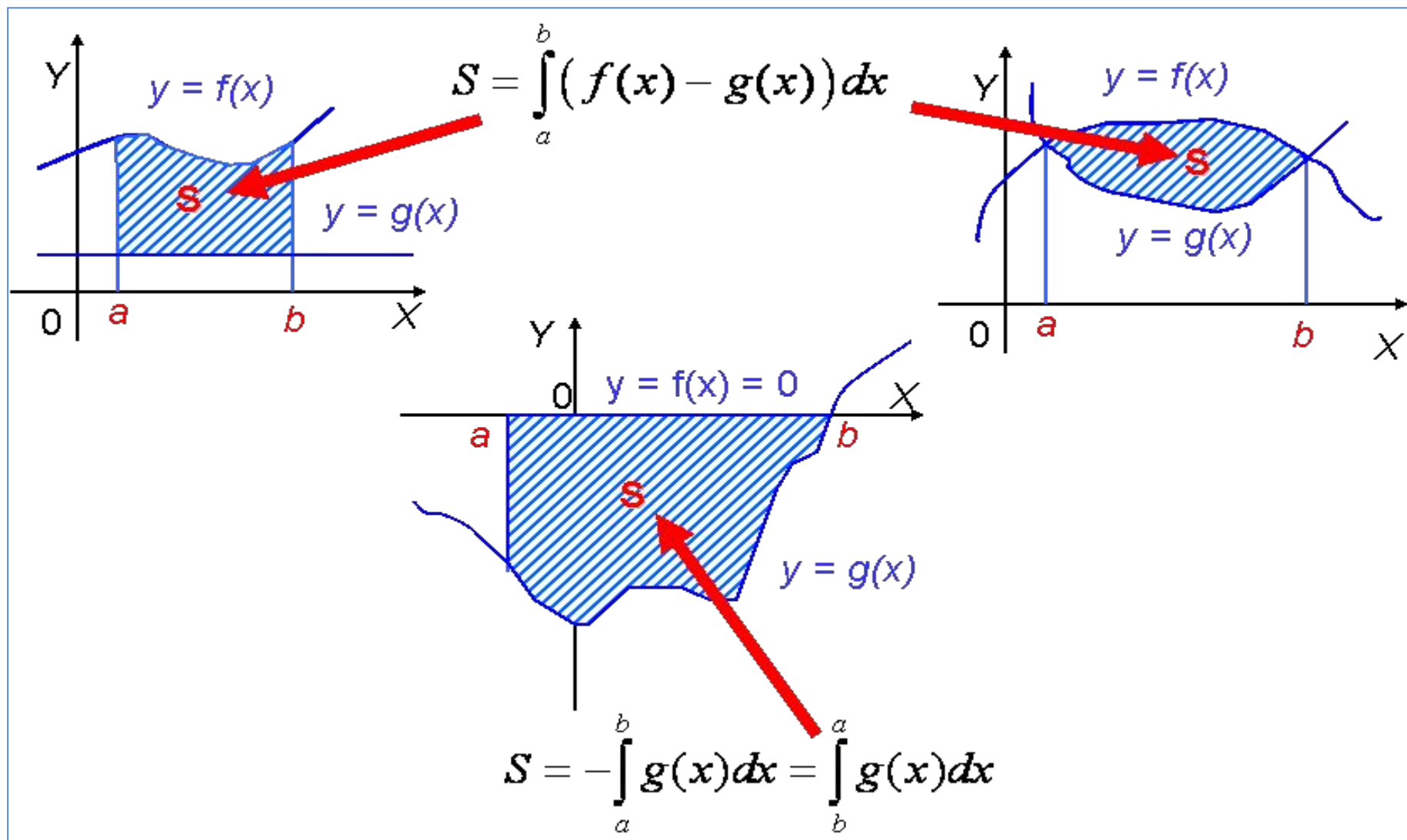


Приложения определенного интеграла.

Если плоская фигура ограничена несколькими линиями (см рис.), то формула для вычисления площади такой фигуры имеет вид

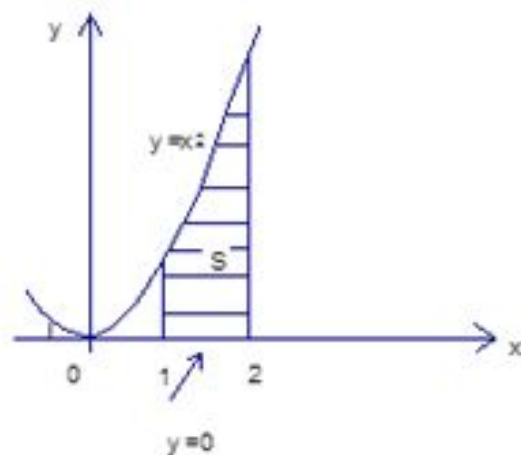


$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx$$



Пример 1.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2$.



Решение. Построим фигуру на координатной плоскости. Вот искомая площадь:

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Это общая формула. Конкретно к нашему случаю она применима так:

Пределы интегрирования

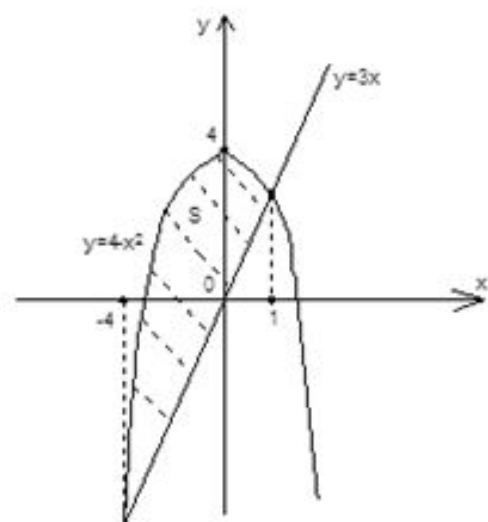
$$a = 1, b = 2, f(x) = x^2$$

$$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$$

Пример 7. *Случай, когда часть площади плоской фигуры лежит под осью.* Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 4 - x^2, y = 3x$$

Решение. Сначала построим графики, посмотрим, какую площадь нам нужно найти. Первая функция – парабола, ветви вниз. График второй функции – прямая линия. Есть две точки пересечения, их придется найти, а именно взять пределы интегрирования, и тогда будем решать задачу по знакомому нам плану.



Площадь
ограниченной
 $y = 4 - x^2, y = 3x$
фигуры,
линиями

Первое действие – найти
пределы интегрирования и
второе – найти площадь.

Пределы интегрирования
найдем из

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 3x \end{cases}$$

$$3x = 4 - x^2$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x = -4, x = 1$$

То есть, пределы интегрирования найдены.

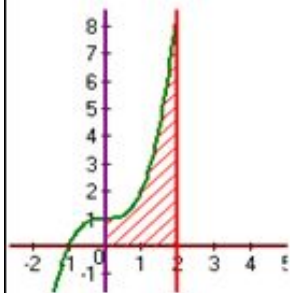
$$S = \int_{-4}^1 (4 - x^2 - 3x) dx = 4x - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$$

$$\Big|_{-4}^1 = \left(4 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(-16 + \frac{64}{3} - \frac{3 \cdot 16}{2}\right) =$$

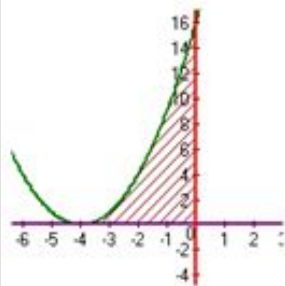
$$= (4 + 16 + 24) - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{44 \cdot 6 - 65 \cdot 2 - 3 \cdot 3}{6} = \frac{164 - 139}{6} = \frac{125}{6} = 20 \frac{5}{6}$$

Ответ: $20 \frac{5}{6}$

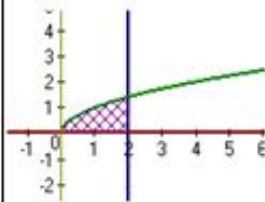
3.1 $y = x^3 + 1$
 $y = 0, x = 0, x = 2$



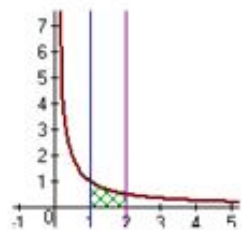
3.6 $y = x^2 + 8x + 16$
 $y = 0, x = 0$



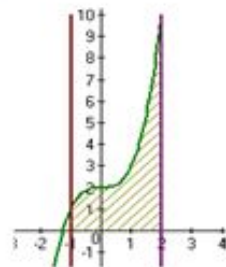
3.11 $y = \sqrt{x}$
 $y = 0$
 $x = 2$



3.2 $x = 2$
 $y = 0, y = \frac{1}{x^2}$



3.7 $y = x^3 + 2$
 $x = -1$
 $x = 2$



3.12 $y = 4 - x^2$
 $x = -1$
 $x = 1$

