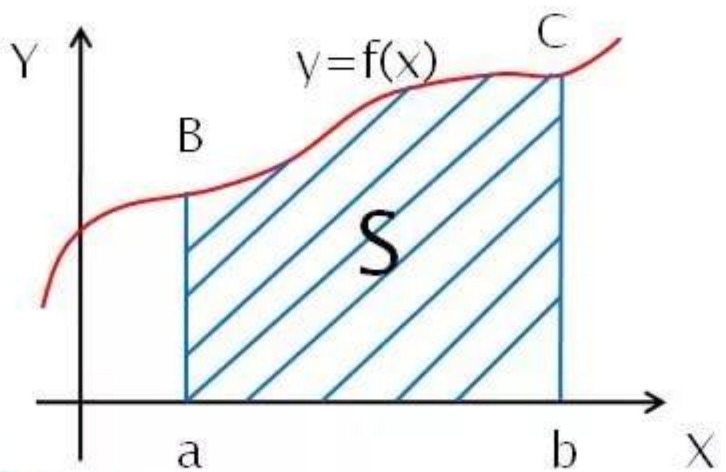
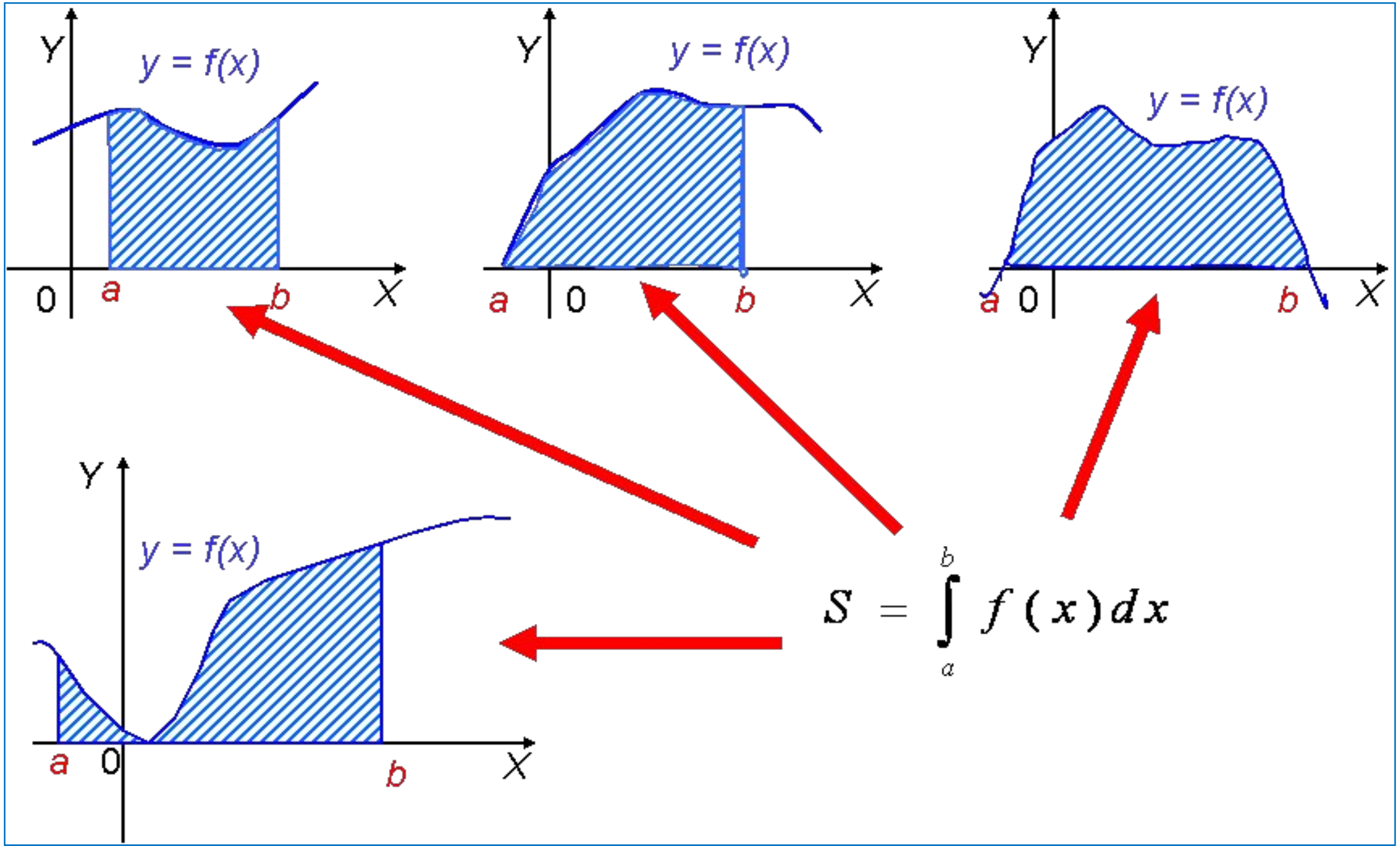
Геометрический смысл определенного интеграла

Теорема:

Определенный интеграл от a до b функции f(x) равен площади S соответствующей криволинейной трапеции, т.е.

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = S_{aBCb}$$





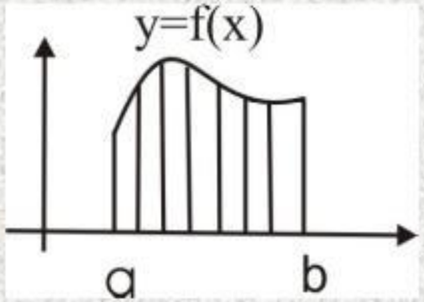
$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

Геометрические приложения определенного интеграла.

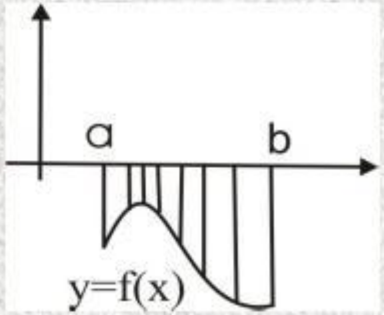
1. Вычисление площадей плоских фигур.

1) В декартовых координатах.

- $f(x) \geq 0, \quad S = \int_a^b f(x)dx$

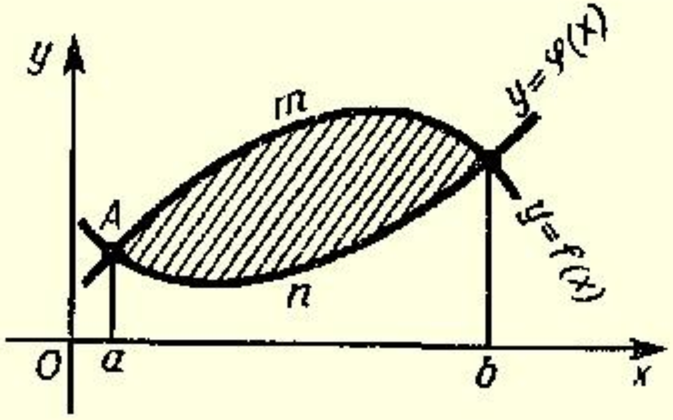


- $f(x) \leq 0, \quad S = -\int_a^b f(x)dx$

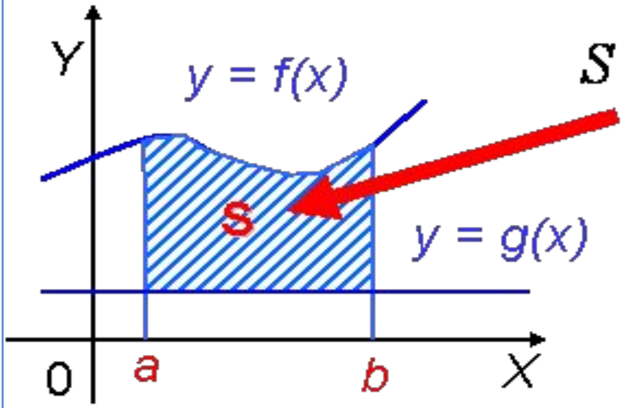


Приложения определенного интеграла.

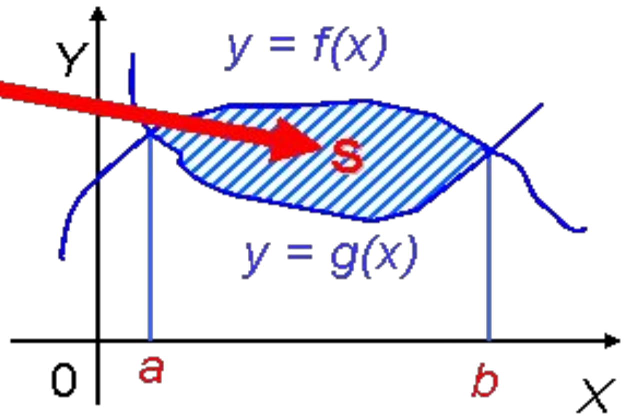
Если плоская фигура ограничена несколькими линиями (см рис.), то формула для вычисления площади такой фигуры имеет вид

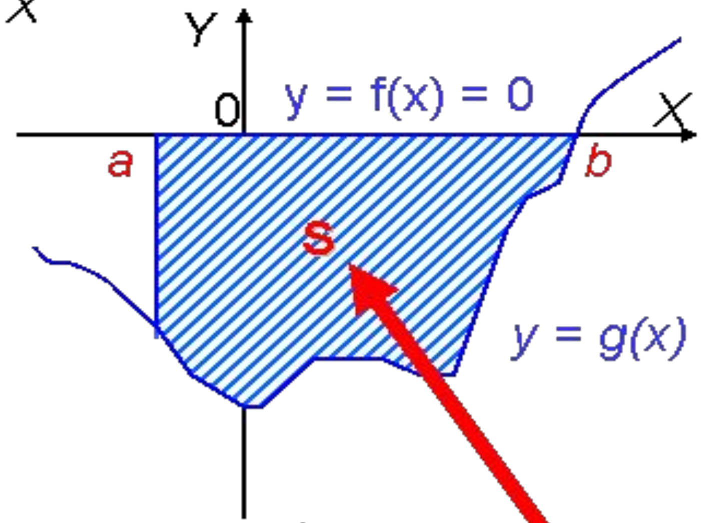


$$S = \int_a^b (f(x) - \phi(x))dx$$



$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

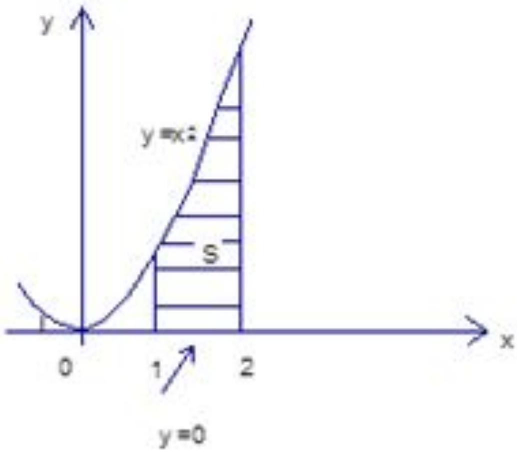




$$S = -\int_a^b g(x)dx = \int_b^a g(x)dx$$

Пример 1.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2.$



Решение. Построим фигуру на координатной плоскости. Вот искомая площадь:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Это общая формула. Конкретно к нашему случаю она применима так:

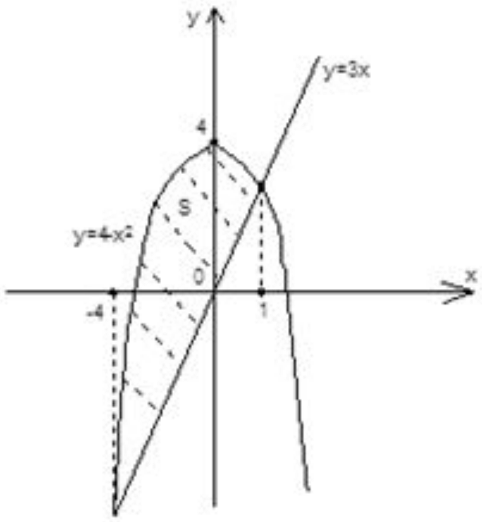
Пределы интегрирования $a = 1, b = 2, f(x) = x^2$.

$$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}.$$

Пример 7. *Случай, когда часть площади плоской фигуры лежит под осью.* Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 4 - x^2 \;, y = 3x$$

Решение. Сначала построим графики, посмотрим, какую площадь нам нужно найти. Первая функция – парабола, ветви вниз. График второй функции – прямая линия. Есть две точки пересечения, их придется найти, а именно взять пределы интегрирования, и тогда будем решать задачу по знакомому нам плану.



Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2 \;, y = 3x$

Первое действие – найти пределы интегрирования и второе – найти площадь.

Пределы интегрирования найдем из системы $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 3x \end{cases}$.

$$3x = 4 - x^2$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x = -4, x = 1$$

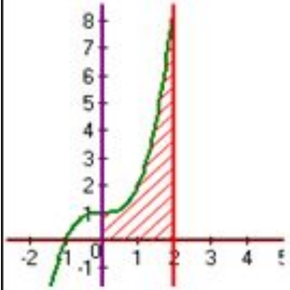
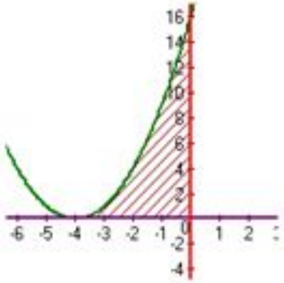
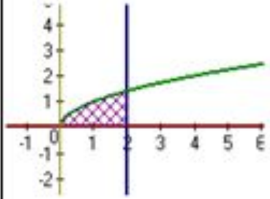
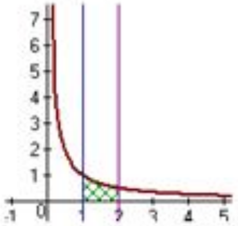
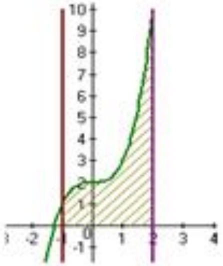
То есть, пределы интегрирования найдены.

$S = \int_{-4}^{1} (4 - x^2 - 3x)dx = 4x - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$

$|_{-4}^{1} = \left(4 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - (-16 + \frac{64}{3} - \frac{3*16}{2}) =$

$= (4 + 16 + 24) - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{44 * 6 - 65 * 2 - 3 * 3}{6} = \frac{164 - 139}{6} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}$

Ответ: $20\frac{5}{6}$

3.1 $y = x^3 + 1$ $y = 0, x = 0, x = 2$ 	**3.6** $y = x^2 + 8x + 16$ $y = 0, x = 0$ 	**3.11** $y = \sqrt{x}$ $y = 0$ $x = 2$ 
3.2 $x = 2$ $y = 0 \quad y = \dfrac{1}{x^2}$ 	**3.7** $y = x^3 + 2$ $x = -1$ $x = 2$ 	**3.12** $y = 4 - x^2$ $x = -1$ $x = 1$